UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Wellington Evangelista Duarte

A Biblioteca dos Objetos Matemáticos - A Matemática Viva e Instigante

BELÉM - PA

2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Wellington Evangelista Duarte

A Biblioteca dos Objetos Matemáticos - A Matemática Viva e Instigante

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento.

BELÉM - PA
2012

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Wellington Evangelista Duarte

A Biblioteca dos Objetos Matemáticos - A Matemática Viva e Instigante

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

____

Orientador : Professor Dr.Márcio Lima do Nascimento.
Faculdade de Matemática, UFPA

____

Professora Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
Faculdade de Matemática, UFPA

____

Professora MsC. Iza Helena Silva Travassos
Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ______________________________

DEDICATÓRIA

À minha amada mãe Sonia, por eu ter nela um exemplo de amor, carinho e dedicação materna, de amizade e companheirismo fraterno, por ser batalhadora e sempre ter me guiando nos passos desta caminhada, sem perder as esperanças e com fé de que tudo daria certo. Muito obrigado por ser este exemplo de mãe e mulher!

AGRADECIMENTOS

-Agradeço primeiramente a Deus, pois sem ele ninguém é nada!

Agradeço a todos meus familiares que sempre me apoiaram, me deram incentivo para estudar e que foram os pilares para que tudo isso esteja acontecendo na minha vida.

Agradeço a minha avó Rosa Evangelista por todo amor, todo o carinho e toda compreensão que teve comigo nos momentos mais difíceis da minha vida.

Agradeço a minha mãe Sonia Evangelista por eu ser o que sou hoje, sempre tendo minha educação em primeiro, me proporcionando muitas alegrias, e por ser um exemplo de mãe, de mulher, de amor exemplificado em uma só pessoa e de por sempre ter sido tudo na minha vida.

Um agradecimento mais que especial que tenho a fazer é ao meu avô, Antônio Evangelista, que foi o homem que me criou, que junto com minha mãe e minha avó, me ensinou a ser uma pessoa de bem, com caráter e que me fez ter força para estudar. Foi a pessoa que tive como um pai e que infelizmente não se encontra mais entre nós, mas tenho certeza que lá do céu ele olha todos os dias por mim e está muito orgulhoso.

Agradeço aos meus amigos Maurício Vinhote, Diany Leal e Amanda Lacerda por tudo que nós passamos nesses quatro anos de graduação. A presença de vocês foi fundamental em todo esse processo. Nossas conversas, discursões, idas desesperadas pra casa da Amanda nos finais de semana pra estudarmos, as horas de espera na fila do ru, tudo valeu muito apena!

Agradeço as mais novas amigas Ludmila e Ingrid Raiol, por toda a ajuda na realização deste trabalho. E agradeço também aos velhos amigos, Brenda Souza e Luiz Acácio, por poder contar com vocês sempre e pela paciência que tiveram comigo na reta final deste ciclo de minha vida.

Agradeço a todos os professores, desde a tia Raimundinha lá no jardim de infânca, por todos meus professores da graduação que foram responsáveis pela minha formação e, principalmente, ao professor Márcio Nascimento e a professora Iza Helena Travassos pelos ensinamentos, por terem me dado à oportunidade de trabalhar com eles e por terem acreditado no meu trabalho. Graças a vocês, consegui me encontrar como profissional.

Resumo

Este trabalho trata das teorias que norteiam o projeto biblioteca de objetos matemáticos da UFPA. Os aportes teóricos adotados são a teoria de Jean Piaget, aprendizagem significativa na perspectiva de Carl Rogers, Laboratório de ensino e as considerações físicas e/ou matemáticas de algumas peças da matemateca presentes no acervo do laboratório.

Palavras-chave: Aprendizagem Significativa, Laboratório de Ensino, Acervo do Laboratório.

CONTEÚDO

INTRODUÇÃO

Nos últimos séculos, muitos educadores famosos ressaltaram a importância do material manipulável como facilitador à aprendizagem. Assim, por exemplo, por volta de 1650, Comenius (considerado por muitos o maior educador e pedagogo do século XVII e o fundador da didática moderna) escreveu que a aprendizagem deveria ser construída do concreto ao abstrato, tendo como justificativa o fato do conhecimento começar pelos sentidos e que só se aprende fazendo (LORENZATO, 2006). Aproximadamente um século depois, Rousseau recomendou a experiência direta utilizando materiais manipuláveis, visando à aprendizagem.

"Mais recentemente, Montessori legou-nos inúmeros exemplos de materiais didáticos e atividades de ensino que valorizam a aprendizagem através dos sentidos, especialmente do tátil; enquanto Piaget deixou claro que o conhecimento se dá pela ação refletida sobre o objeto"(LORENZATO, 2006, p.4).

O registro que não poderia faltar é o do excepcional matemático que percebeu a influência de ver e do fazer na aprendizagem: Arquimedes. Ele evidenciou isso quando escreveu a Eratóstenes, aproximadamente 250 a.C., dizendo:

> "é meu dever comunicar-te particularidades de certo método que poderás utilizar para descobrir, mediante a mecânica, determinadas verdades matemáticas [...] as quais eu pude demonstrar, depois, pela geometria"(NICOLET, 1967 apud LORENZATO, 2006).

Assim, Arquimedes revelou sua maneira de realizar descobertas matemáticas, confirmando a importância das imagens no processo de construção de novos conhecimentos.

Com o passar dos anos, o ensino da Matemática vem apresentando sérios problemas quanto ao seu ensino, principalmente no que diz respeito à compreensão e assimilação por parte dos alunos, argumentando que os professores não facilitam nas explicações sobre uma determinada teoria ou exercício. Tal fato é evidênciado pelo alto índice de reprovação na disciplina durante o ensino fundamental e médio.

Em resposta a essa situação preocupante, muitas professores de matemática têm discutido sobre alternativas metedológicas à melhoria de ensino. Dentre esse questões metodológicas, uma proposta que aparece com bastante frequência é a questão do ensino ser construído a partir de materiais concretos, tornando a matemática mais acessível aos estudantes.

Visando uso deste tipo de metodologia, o Laboratório Biblioteca de Objetos Matemáticos da UFPA, que é uma parceria com a MATEMATECA da USP (onde consiste na reunião de um acervo de objetos concretos e materiais didáticos industrializados), tem como proposta a construção e elaboração de práticas alternativas no ensino de matemática, envolvendo interdisciplinarmente temas como a ludicidade no ensino de matemática e a aprendizagem significativa, que, para Justus (2003), ocorre quando o aluno percebe a relevância da matéria de estudo para seus objetivos, visto que "ensinar não é transferir conhecimento, mas criar as possibilidades para a sua produção ou a sua construção"(FREIRE, 2011, p.24).

No capítulo 1 será feito uma breve abordagem sobre alguns conceitos da área de psicologia, como a teoria de Jean Piaget e aprendizagem significativa na perspectiva de Carl Rogers, com o intuito de relacionarmos essas teorias com o projeto desenvolvido pela faculdade de matemática.

No capítulo 2, a abordagem será a partir das concepções de Laboratório de ensino segundo Sérgio Lorenzato, fazendo uma relação entre essa concepção e o trabalho realizado no laboratório da faculdade de matemática.

E por fim, no capítulo 3 vamos procurar responder alguns questionamentos dos alunos com relação aos experimentos realizados com o material do laboratório, com suas considerações físicas e/ou matemáticas.

CAPÍTULO 1

PSICOLOGIA DO DESENVOLVIMENTO E APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA

1.1 A Teoria de Piaget

Piaget é, indubitavelmente, um dos grandes nomes da psicologia do desenvolvimento. Sua contribuição inovadora ao estudo do desenvolvimento intelectual da criança tem sido extremamente valorizada (BIAGGIO, 1985).

1.1.1 Uma Breve Biografia

Jean Piaget nasceu no dia 9 de agosto de 1896, em uma pequena cidade universitária na Suíça. Desde criança Piaget mostrava interesse pela natureza, principalmente na observação de pássaros, peixes e outros animais em seu ambiente natural. Aos 11 anos teve seu primeiro artigo publicado que descrevia com grande detalhe e riqueza de observação uma andorinha albina vista em um parque, em uma revista de História Natural.

Sob influência de seu padrinho, um acadêmico suíço, Piaget, ainda na adolescência começou a ler sobre filosofia, lógica e religião. O estudo dessas disciplinas fez com que Piaget tivesse um interesse maior por Epistemologia que é o ramo da filosofia relacionado com o estudo do conhecimento (BIAGGIO, 1985).

Piaget completou sua formação educacional em Biologia, obtendo o bacharelado em Ciências Naturais na Universidade de Neuchâtel em 1916 e, 2 anos mais tarde, aos 21 anos, obteve o grau de doutor em filosofia, com sua tese sobre os moluscos da região de

Valais na Suíça.

Depois de obter o título de doutor, Piaget começou a explorar a psicologia, trabalhando em dois laboratórios e em uma clínica psiquiátrica. Logo depois, Piaget trabalhou no primeiro teste de inteligência. Embora ele achasse este tipo de trabalho entediante e monótono, consistindo na tabulação e números e respostas corretas que as crianças de várias idades davam a questões padronizadas, ele veio a se interessar pelas respostas erradas. Verificando que havia grande consistência quanto ao tipo de respostas erradas que crianças do mesmo tipo davam.

Isto lhe deu a ideia central de sua teoria, a de que a inteligência de crianças mais novas é qualitativamente diferente da das crianças mais velhas e não quantitativamente, ou seja, não a quantidade de itens respondidos corretamente e sim as maneiras diferentes de pensar.

Até a data de seu falecimento, Jean Piaget fundou e dirigiu o Centro Internacional para Epistemologia Genética. Ao longo de sua brilhante carreira, Jean Piaget escreveu mais de 75 livros e centenas de trabalhos científicos.

Jean Piaget (1896-1980) foi um renomado psicólogo e filósofo suíço, conhecido por seu trabalho pioneiro no campo da inteligência infantil. Jean Piaget passou grande parte de sua carreira profissional interagindo com crianças e estudando seu processo de raciocínio. Seus estudos tiveram um grande impacto sobre os campos da Psicologia e Pedagogia. Jean Piaget morreu em Genebra, em setembro de 1980, com 84 anos.

1.1.2 Conceitos Centrais na Teoria de Piaget

Todo o seu trabalho foi influenciado por concepções oriundas da biologia, da lógica e da epistemologia. Assim, podemos ver inicialmente as linhas gerais de desenvolvimento, dando ênfase na sua concepção de inteligência.

Primeiramente, Piaget rejeita o estudo feito com enfoque no QI do individuo e da medição das diferenças intelectuais por meio de testes padronizados. Tal estudo era praticamente o único, na época em que Piaget começou a realizar seus trabalhos, tornando-o pioneiro no estudo da inteligência por esta perspectiva.

Em uma de suas primeiras formulações sobre a inteligência, Piaget a define como um caso particular de adaptação psicológica. Outra definição afirma que a inteligência é a forma de equilíbrio para a qual tendem todas as estruturas cognitivas (PIAGET, 1936 apud BIAGGIO, 1985).

Piaget enfatiza como a criança atinge, gradativamente, estruturas cognitivas cada vez mais eficazes. E afirma que a realidade deve ser construída pela atividade da criança, ao invés de o conhecimento ser adquirido por um recipiente passivo (BIAGGIO, 1985).

Com intuito de deixar sistemática a teoria de Piaget, muitos estudiosos consideram que podemos distinguir três aspectos fundamentais em sua teoria, que são as seguintes: Conteúdo: o que indivíduo está pensando, de que forma ele consegue resolver um problema. Focalizando conteúdos do pensamento infantil; Estrutura: diz que o desenvolvimento da inteligência tem influência biológica, e; função: outro aspecto importante na teoria de Piaget.

Piaget enfatiza também que todas as espécies herdam duas tendências básicas chamadas de adaptação e organização. A organização faz referência à tendência de todas as espécies organizarem seus processos de modo coerentes, podendo ser psicológicos ou físicos. Já a adaptação é que todos os organismos tendem a se adaptar ao ambiente (noção nitidamente biológica). Porém, esta adaptação acontece concomitantemente com dois processos complementares: acomodação e assimilação.

A acomodação refere-se às mudanças que o organismo faz em suas estruturas a fim de poder lidar com estímulos ambientais (BIAGGIO, 1985). Na acomodação há um transformar do organismo com finalidade de lidar com o ambiente. Na assimilação temos a transformação do objeto, tornando-se parte do organismo. Com isso, diante de um estímulo novo, a criança modifica suas estruturas e esquemas (acomodação), depois tem como referência objetos semelhantes, aqueles cujo ela tinha um esquema, para então praticar com os novos.

Piaget diz que a atividade intelectual visa sempre um estado de equilíbrio. Entretanto, uma vez que já ocorreu à acomodação e o novo esquema já foi exercitado várias vezes, assimilados vários objetos, ocorre também um estado de desequilíbrio, tendo como exemplo o tédio da criança por um brinquedo que já foi utilizado numerosas vezes. A tendência dessa criança será a de procurar novos estímulos, se acomodando novamente, tornando um processo repetitivo.

A matemática, nos últimos anos, tem urgência em ser ensinada como instrumento para interpretação das coisas que rodeiam nossas vidas e o mundo, formando assim pessoas conscientes para a cidadania e a criatividade e não somente como memorização, alienação e exclusão.

É necessário e possível modificar esse enfoque atual do ensino de matemática, a partir de práticas alternativas de ensino que provoquem um desequilíbrio nos alunos fazendo com que os mesmo deixem sua zona de acomodação, com intuito de adaptá-los a um novo conhecimento para finalmente assimilá-los estes conhecimentos, garantindo um currículo que favoreça a construção do pensamento lógico-matemático das crianças através de sua ação/reflexão, considerando suas diferenças a partir dos estágios em que estão inseridas, cada qual com suas particularidades, mas todas em busca de algo em comum: aprender.

1.1.3 Estágios de Desenvolvimento Cognitivo

Agora vamos abordar um pouco sobre o estudo dos estágios de evolução cognitiva, que é uma das principais contribuições de Piaget. É importante ressaltar que as idades atribuídas nos estágios cognitivos não são rígidas, podendo haver grande variação dependendo do indivíduo.

Em linhas gerais, Piaget esquematiza o desenvolvimento intelectual da seguinte maneira:

1. **Estágio Sensório-Motor (0 a 2 anos):** Como o nome indica, não há capacidade de abstração, neste estágio inicial, com a atividade intelectual da criança sendo de natureza sensorial e motora. A criança age a partir da percepção do ambiente.

   O mais importante da contribuição dos estudos de Piaget sobre essa fase consiste em dar ênfase e importâncias nas atividades como base de toda atividade intelectual superior futura. Piaget enfatiza a importância da estimulação ambiental como essencial à progressão intelectual de estágio para estágio (BIAGGIO, 1985).A criança nesse estágio começa a experimentar novos comportamentos, imitar ações novas e casualmente esses comportamentos levam a criança a um resultado interessante, tendendo a repeti-lo, como, por exemplo, o fato da criança chorar quando quer receber algo.

   O fato de muitos psicólogos se importarem com o fato de bebê, desde os primeiros dias de vida, receber estímulo auditivo, visual, tátil, que ele tenha uma variedade de objetos concretos para manipular, pode ser atribuído à influência de Piaget, que considera essa estimulação como essencial para o desenvolvimento cognitivo futuro da criança.

2. **Estágio Pré-Operacional (2 a 6 anos):** O principal progresso desse período em

relação ao sensório-motor é o desenvolvimento da capacidade simbólica. Nesta fase a criança já não depende somente das sensações de seus movimentos, mas já tem a capacidade de distinguir imagens, palavras e símbolos.

Nesta etapa, Piaget estudou que a criança é egocêntrica, sendo incapaz de se colocar no ponto de vista de outra pessoa, tendo a percepção de que o mundo está ao redor dela.

O período pré-operacional também é a época em que há um "aprendizado"sobre as palavras. Esse "aprendizado"situa-se entre os 24 e 30 meses. A criança que aos dois anos possui um vocabulário com aproximadamente 270 palavras, por volta dos 3 anos já possui um vocabulário com cerca de 1000 palavras que ela fala e provavelmente compreende outras 2000 palavras e já forma sentenças bastantes complexas (LENNEBERG, 1967 apud BIAGGIO, 1985).

Com isso, a criança já possui ações que servem como representações. Essas ações são de formas intuitivas, expressões cognitivas esporádicas e isoladas, que não constituem estruturas organizadas.

3. **Estágio de Operações Concretas (7 a 11 anos):** Este período é caracterizado pelo pensamento que mostra que a criança já possui uma organização assimilativa, funcionando em equilíbrio com o mecanismo de acomodação. A criança já tem a seu comando um sistema cognitivo coerente e integrado com o qual manipula e organiza o mundo.

   Quando a criança atinge o estágio de operações concretas, com pensamentos mais coerentes e com propriedades estruturais, Piaget passa a falar então de operações e não mais de ações.

   Uma operação é definida como qualquer ato representacional. Piaget descreve grande variedade dessas operações: operações lógicas da adição, subtração, multiplicação, divisão; correspondência de termos, mensuração, tempo, espaço e mesmo operações que dizem respeito a sistema de valores. Assim, podemos tomar como regra geral que todas as ações implicadas nos símbolos matemáticos comuns, como $+ - \div \times = < >$, pertencem ao domínio das operações intelectuais. A esta altura, Piaget introduz então as estruturas lógico-matemáticas como modelos das estruturas cognitivas.

Uma das estruturas lógico-matemáticas que podem ser ensinadas à criança, mas de forma concreta, é referente à conservação de quantidades, como os problemas de conservação de massa, peso e de quantidade de líquido, ou seja, a criança é capaz de entender relações que lhe são apresentadas concretamente. Estes são os problemas mais conhecidos dentre os utilizados por Piaget.

O problema se dá da seguinte maneira: mostram-se dois copos à criança de formatos iguais, cheios de água até o mesmo nível, e a criança facilmente concorda que ambos contêm a mesma quantidade. Podemos tornar o problema mais interessante à criança, reformulando da seguinte maneira: - Temos esses dois copos de formatos diferentes, você escolhe um e eu fico com outro. Agora vamos encher um dos copos de refrigerante, despejando-se então o refrigerante de um dos copos, a vista da criança, para o outro copo de formato mais estreito e mais alto. E agora, tem a mesma quantidade ou um copo tem mais refrigerante do que o outro? A criança pré-operacional costuma errar, afirmando que um dos dois tem mais, seja o copo alto (por ser mais alto) ou o copo largo e baixo (por ser mais largo). A criança pré-operacional ainda não conserva as invariâncias.

Na vida escolar, notamos como exemplo da ausência dessa estrutura, a dificuldade que as crianças pré-operacionais têm em distinguir as relações entre país, estados e cidades.

Estes são apenas alguns exemplos do tipo de problema idealizado por Piaget para verificar se a criança já atingiu a fase de operações concretas.

4. **Estágio de Operações Formais (12 anos em diante):** A principal característica deste período é a capacidade de raciocinar logicamente com hipóteses verbais e não apenas com objetos concretos. É o ápice do desenvolvimento da inteligência e corresponde ao nível de pensamento lógico-matemático.

   O ponto de partida é a operação concreta, no entanto, o adolescente ultrapassa este estágio e começa a formular os resultados das operações concretas sob a forma de proposições e continua a operar mentalmente com elas.

   Ele é capaz de pensar em termos e possibilidades. Isto se reflete na compreensão de noções científicas. Para Piaget quando a criança atinge esse estágio das operações formais, já tem todos os elementos necessários para utilizar o método experimental da ciência (BIAGGIO, 1985).

> Neste estágio o indivíduo começa a deduzir conclusões a partir de hipóteses. Por exemplo, se uma pessoa é paraense, o que se pode dizer sobre a nacionalidade dessa pessoa? Se ela é paraense, implica dizer que ela é brasileira. Outro exemplo é a propriedade transitividade: Se $A > B$ e $B > C$, quando a criança atinge esse estágio ela consegue concluir que $A > C$.

A importância de se definir os períodos de desenvolvimento da inteligência reside no fato de que cada indivíduo adquire novos conhecimentos ou estratégias de sobrevivência, de compreensão e interpretação da realidade. E que o conhecimento é dado primeiramente do objeto concreto até a capacidade de abstração da criança. A compreensão deste processo é fundamental para que os professores possam também compreender com quem estão trabalhando.

Piaget defende uma grande reforma no ensino da Matemática que segundo ele se aproxima mais das operações espontâneas do sujeito do que o ensino tradicional. Para isso sugere que se tomem precauções no ensino: uma delas seria organizar as ações da criança com o cuidado de não queimar etapas de desenvolvimento. Só que os professores de matemática, em geral, parecem ignorar os estudos psicológicos do desenvolvimento da inteligência da criança. Infelizmente muitos programas educacionais contemporâneos incorreram no paradoxo de pretender ensinar as matemáticas modernas com métodos arcaicos, essencialmente verbais e baseados somente na transmissão dos conteúdos em vez da reinvenção pelo aluno.

Como as peças do Laboratório envolvem conteúdos que geralmente são estudados na graduação, é importante conhecermos as etapas de desenvolvimento dos alunos para podermos adaptar às apresentações a uma linguagem matemática mais acessível e a compreendermos o fato de determinadas peças serem mais interessantes para alguns alunos e para outros não e, a fim de proporcionar o melhor tipo de aprendizagem e maturação dos estágios de desenvolvimento, deve-se dar condições facilitadoras à criança que estimulem o conhecimento acomodado, para impulsionar novas adaptações, assimilações e acomodações.

1.2 Aprendizagem Significativa

A essência da aprendizagem é o significado (ROGERS, 1967, p.38).

Para que essa aprendizagem seja mais significativa à criança, precisa-se utilizar seu conhecimento, a priori, como base às novas aprendizagens, pois, deste modo, ela apreenderá esses novos conhecimentos com mais consistência.

Mas afinal, o que significa ensinar? Sem dúvida ensinar é mais difícil do que aprender, não por que o professor tem que possuir várias informações, conhecimentos e tê-los sempre como recursos para utilizá-los, mas pelo fato do ensino exigir que nada mais seja aprendido, a não ser a aprendizagem (Rogers, 1967). Essa conduta do professor, de aulas sistemáticas e repetitivas, faz com que o aluno tenha a impressão de que esse conhecimento é apenas obtenção de informações. Com isso, podemos dizer que o professor acha-se à frente de seus estudantes somente nisso: que ele tem muito mais a aprender do que eles - ele tem que aprender a deixá-los a aprender (ROGERS, 1967).

O professor tem como missão crucial permitir que o estudante aprenda alimentando a curiosidade deste, assim, ele atuará como um facilitador do processo de aprendizagem. Absorver, ou simplesmente decorar, conteúdos terá um valor superficial para o aluno no presente e, consequentemente, terá um valor ainda menor no futuro. Aprender a maneira de aprender constitui o elemento que sempre é de valor, agora e no futuro (ROGERS, 1967), tornando, assim, a missão do professor como árdua, delicado e exigindo uma verdadeira vocação à profissão. Mas como o professor pode ser criativo para facilitar a aprendizagem provocando curiosidade e vontade de aprender no estudante?

Se a proposta do ensino é promover a aprendizagem, precisamos primeiro nos questionar o que quer dizer esta palavra. Mas não vamos nos deter em falar sobre a aprendizagem, da matéria morta e rapidamente esquecida, que é imposto ao aluno pelo modo tradicional de ensino, mas falar sobre aprendizagem que torna o aluno curioso e que leva o aluno a dizer: - estou aprendendo!

Precisamos esclarecer que a aprendizagem pode ser divida em dois tipos gerais. Segundo Rogers (1967), numa extremidade encontra-se, o que os psicólogos estabelecem para os seus pacientes, a aprendizagem de sílabas absurdas, ou seja, memorizar os sons como ent, arl, lud, baz e outros semelhantes. Isso se constitui como uma tarefa difícil, já que não envolvem nenhum significado, tendo a probabilidade de serem rapidamente esquecidas. Como os alunos têm a maior parte dos conteúdos com essa perspectiva, os conteúdos sem sentido algum para o seu dia a dia assim como as sílabas absurdas têm, acaba acontecendo uma aprendizagem apenas do "pescoço para cima". Não envolvendo sentimentos e/ou significados pessoais, não tendo relevância para si.

Em contraste, na outra extremidade, existe uma aprendizagem significante, cheia de sentido experiencial (ROGERS, 1967). Por exemplo, quando o bebê que começa a engatinhar, começa a colocar o dedo nas tomadas e a mãe diz: - não é pra você tocar ai, se não pagará choque! A criança simplesmente ignora por não saber o significado da expressão. Mas a partir do momento que ele toca e sente um choque, aprende o significado da palavra choque, aprende a futuramente ter cautela com relação as tomadas, tendo essa aprendizagem de maneira significativa e envolvida que não será esquecida tão cedo. Já no caso de uma criança que aprendeu o "abc", descobre-se um dia interessado em histórias em quadrinhos compreende que as palavras podem conduzi-las para outro mundo. Ela agora realmente aprendeu a ler.

Essa aprendizagem pode ser definida como um relacionamento interpessoal, afetuoso e de interesse de ambos, professor e aluno, juntos, caminhando para o aprendizado significativo. Um aprendendo com o outro, todos os dias. Essa humildade por parte do professor o levará a um relacionamento autêntico e transparente com o educando. Segundo Justos (2003) a aprendizagem significativa ocorre quando o aluno percebe a relevância da matéria de estudos para seus objetivos, ou seja, a utilidade de determinado conteúdo e, como consequência, despertar a curiosidade do aluno será a principal ferramenta do educador que o conduzirá à aprendizagem significativa.

Nessa perspectiva, o professor passa a ser um facilitador da aprendizagem. Não mais aquele que apenas transmite o conhecimento, mas também aquele que auxilia os educandos a aprender e a viver como indivíduos em processo de transformação. O facilitador se reconhece como um material de apoio humano para o educando. Enquanto um bom professor é um estrategista da educação, ele usa o seu tempo planejando o currículo escolar, suas aulas e o faz muito bem. O facilitador, por sua vez, cria condições de interação pessoal com os educandos, prepara o ambiente psicologicamente favorável para recebê-los, proporciona aos alunos materiais de pesquisas, instiga a curiosidade que é inerente ao ser humano para promover a aprendizagem significativa. O que um facilitador ensina aos educandos é buscar o seu próprio conhecimento, para tornar-se independente e produtor de seu próprio processo cognitivo.

Pode-se pensar que um facilitador de aprendizagem é só mais uma denominação para os professores e que nada seria mudado, entretanto não existe semelhança alguma entre o modo tradicional de ensinar com o facilitador da aprendizagem.

O professor tradicional, o bom professor, durante seu planejamento pergunta-se o seguinte: "O que seria bom para um estudante nesta idade e nível aprender? Como planejar a ele um currículo adequado? Qual a melhor maneira de aplicar um exame para saber se determinado conteúdo foi realmente aprendido?".

Por outro lado, o facilitador da aprendizagem pergunta, não para si, mas aos estudantes: - O que querem aprender? O que os deixam intrigados? Sobre o que se tem curiosidade? Como posso ajuda-los a avaliar o seu próprio progresso e fixar objetivos de aprendizagem futuros? O aluno não tem que se preocupar em ser avaliado pelo professor, pois faz parte desse processo de aprendizagem a auto avaliação responsável. Lembramos que, na aprendizagem significativa, o aluno torna-se gestor de seu próprio processo de busca do conhecimento. Assim, o professor não deve olhar apenas os planejamentos curriculares e pré-determinados e sim do ponto de vista do aluno. Uma vez que este processo de facilitação da aprendizagem desejada se ache em ação, uma escola vai se tornar, para a criança, "a minha escola"(ROGERS, 1987).

Os estudantes devem ser confrontados com temas que tenham significância e relevância a eles e, com isso, os professores facilitadores devem se concentrar em fornecer todo tipo de recursos que possam dar ao estudante uma aprendizagem experiencial que seja que seja relevante para suas necessidades (ROGERS, 1987), concentrando-se também em tornar os recursos claramente disponíveis, tendo um lugar específico para abrigá-los como, por exemplo, um laboratório de ensino.

Entretanto, temos um dilema de que na vasta maioria das escolas, em todos os níveis educacionais, encontra-se o ensino dentro de uma abordagem tradicional e convencional que torna a aprendizagem significativa improvável, senão impossível.

CAPÍTULO 2

O LABORATÓRIO DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Um grande desafio para os educadores matemáticos é ensinar de forma mais interessante, mais atrativa, mais atual. Para isso, é preciso ampliar e diversificar as estratégias de ensino para que essa aprendizagem seja mais prazerosa e significativa.

Tendo em vista que parte dos alunos ainda apresentam aversão a essa disciplina e, muitas vezes, isso acontece exatamente pelo fato deles não entenderem, já que sua aplicação, de caráter abstrata e excessivamente teórica, dificulta a assimilação.

Falta, em geral, uma ligação entre a teoria matemática explicada e as questões práticas e interessantes da vida cotidiana e das ciências avançadas (astronomia, biologia, economia, dentre outras). Em algumas situações é importante é importante que o aluno saiba que determinada teoria não tem uma aplicação imediata, mais simples, porém é fundamental para áreas de pesquisas de ponta. Para isso tudo, o professor precisa de muitas informações e o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM) servirá de inspiração para os alunos e professores, na medida em que facilitará essas discursões e ampliará os horizontes.

Partindo desse entendimento, temos como espaço alternativo o Laboratório de Ensino de Matemática (LEM), que pode ser definido como um ambiente adequado para a organização dos jogos e materiais didáticos, local de reunião de professores para discussões metodológicas, elaboração de atividades usando recursos e materiais diversos, um espaço que possa facilitar o trabalho dos professores e onde os alunos possam vivenciar e assimilar conteúdos matemáticos de maneira concreta.

2.1 Algumas concepções de LEM

Existem concepções variadas e diferentes sobre o LEM. Inicialmente ele poderia ser um local apenas para guardar materiais do ensino de matemática como, por exemplo, jogos de tabuleiros; materiais didáticos industrializados; inclusive instrumentos para confeccionar esses materiais. Neste caso, o LEM é um depósito desses materiais.

O LEM pode ser mais do que um depósito, podendo ser um espaço dedicado às situações de criações pedagógicas instigantes, ou seja, situações que causam curiosidade e interesse em aprender matemática, com intuito de provocar questionamento dos alunos durante as aulas. Com isso, o LEM, nessa concepção, é uma sala-ambiente para estruturar, organizar, é um espaço facilitador, tanto ao aluno como ao professor, questionar, conjecturar, procurar, experimentar, analisar e concluir, enfim, aprender e, principalmente, aprender a aprender (LORENZATO, 2006).

O LEM, mesmo em condições desfavoráveis, pode tornar o trabalho altamente gratificante ao professor e a aprendizagem compreensiva e agradável ao aluno. Porém, para o trabalho ter eficiência, o professor precisa ter conhecimento em matemática, metodologia de ensino e psicologia, ou seja, uma boa formação matemática e pedagógica; é preciso acreditar no que deseja fazer e ter motivação para transformar e construir; é preciso ser criativo, não apenas para conceber, planejar e montar o seu LEM, como também para orientar seus alunos e transformá-los em estudantes com as pesquisas que podem ser feitas com os materiais existentes no LEM, ou seja, aprender a procurar, mesmo a encontrar respostas, é mais importante à formação do indivíduo do que as respostas às indagações (LORENZATO, 2006).

Podemos ter modos diferentes de usar o LEM, um deles seria relacionarmos os conteúdos matemáticos com um determinado material, fazendo com que os alunos explorem o material e, só depois disso, explicar a matemática envolvida; outro é simplesmente o de mostrar um material, dizendo seu nome e sua definição, tendo assim professores com concepções bem diferentes de LEM.

2.2 A construção do LEM

É difícil para o professor construir sozinho o LEM e, mais ainda, mantê-lo, já que precisa de pessoas para cuidar do espaço e de recursos para aquisição dos materiais. A respeito da construção do LEM é fundamental considerar a quem ele se destina, levando em consideração os estágios de desenvolvimento cognitivo segundo a teoria de Piaget.

Se o "público"do LEM forem crianças, é importante centrarmos o apoio ao desenvolvimento de processos mentais básicos (comparação, classificação, sequência, conservação, dentre outros). Para alunos das séries iniciais do ensino fundamental, o apelo tátil e visual deve manter-se forte, mas os materiais devem contemplar mais diretamente a ampliação dos conceitos, à descoberta de propriedades, à compreensão dos algoritmos, enfim, aos objetivos matemáticos. Essa característica deve prosseguir às séries seguintes do ensino fundamental, incluindo os materiais que desafiam o raciocínio lógico-dedutivos nos campos aritmético, geométrico, algébrico, trigonométrico, estatístico. Aos alunos do ensino médio, podem ser acrescidos problemas de questões da matemática, questões de vestibulares, desafios ao raciocínio topológico ou combinatório, entre outros. E também várias interpretações já abordadas em séries anteriores, mas com uma análise e interpretação mais aprofundada.

E o que se dizer sobre o LEM para alunos da graduação em uma licenciatura, para cursos de formação de professores? Que ele é, simplesmente, mais que necessário às instituições de ensino que oferecem tais cursos. Para Lorenzato (2006),

> "É inconcebível que, em suas aulas, os professores desses cursos realcem a necessidade da autoconstrução do saber, a importância dos métodos ativos de aprendizagem, o respeito às diferenças individuais, mas, na prática de ensino e no estágio supervisionado, os seus alunos não disponham de instrumentos para a realização da prática pedagógica"(2006, p.10).

É bom lembrarmos que mais importante do que ter acesso aos materiais, é saber utilizá-los corretamente. Com isso, não há argumento que justifique a ausência do LEM nas instituições que oferecem curso de licenciatura em matemática, pois é nela que os futuros professores devem aprender a utilizar o material didático de ensino. Afinal, o material deve estar sempre presente durante sua formação, principalmente nas disciplinas voltadas para o estudo didático-metodológico de cada assunto da ementa de metodologia ou didática na matemática.

Como já vimos, existem diversos tipos de LEM, em razões dos seus diferentes objetivos e público alvo. Mas de modo geral, segundo LORENZATO (2006), o LEM pode constituir-se de:

- Livros didáticos;
- Jogos;
- Quebra-cabeças;
- Sólidos;
- Modelos estáticos ou dinâmicos;
- Materiais didáticos industrializados;
- Materiais didáticos produzidos pelos alunos e professores;
- Computadores;
- Materiais e instrumentos necessários à produção de materiais didáticos.

Essa construção não é um objetivo a ser adquirido em curto prazo e, uma vez construído e em funcionamento, ele demanda que o professor esteja sempre se atualizando.

2.2.1 As controvérsias ao uso do LEM

Apesar de o laboratório ser uma excelente alternativa metodológica, ele possui limitações didáticas, sofre prejulgamentos e muitos professores não se interessam nem em saber sua potencialidade.

Segundo LORENZATO (2006), as objeções do LEM são as seguintes:

- O LEM é caro, exige materiais que a escola não dá ao professor e poucas escolas e instituições superiores possuem um LEM;

Lecionar numa escola que não possui LEM é uma ótima oportunidade para construí-lo, com a participação dos alunos, utilizando materiais alternativos tornando seu custo mais barato.

- O LEM exige do professor uma boa formação;

Na verdade é que nenhum professor despreparado, independente do método utilizado, produz aprendizagem significativa.

- O LEM possibilita o uso pelo uso;

Como todo instrumento, o LEM possibilita o "uso pelo uso", tudo dependerá do professor, de quais objetivos ele quer atingir com determinado material, daí a importância dos saberes do professor, indispensáveis em qualquer ambiente de ensino (LORENZATO, 2006).

- O LEM não pode ser aplicado a todos os assuntos da grade curricular;

O LEM definitivamente não é um caminho para todos os momentos da prática pedagógica, mas seguramente pode disponibilizar numerosos meios de ensino, sendo um deles os materiais e/ou peças que desenvolvam uma relevância nos alunos em aprender.

- O LEM não pode ser usado em classes numerosas;

Quando tratamos de educação, sabemos que a quantidade e a qualidade se envolvem de maneira inversa. Tendo poucos alunos no LEM, eles podem manusear o objeto, sendo propostas atividades a eles com os mesmo. Já um número elevado de alunos, "o fazer"é substituído pelo "ver", tornando-se assim um material de visualização coletiva, visto que o material será manipulado pelo professor, cabendo aos alunos apenas a observação.

- O LEM exige do professor mais tempo para ensinar;

É provável que o uso do LEM desperte curiosidades dos alunos juntamente com questionamentos não previstos pelo professor e, assim, sendo atendidos esses questionamentos, o ensino demandará de mais tempo do que o previsto.

- É mais difícil lecionar utilizando um LEM;

O LEM exige que o professor seja um facilitador da aprendizagem, exigindo que ele tenha conduta de diferente da exigida pela aula tradicional, fazendo com que o LEM influencie nos alunos uma mudança de comportamento pelo fato deles efetivamente trabalharem mais do que quando apenas assistem à aula expositiva do professor.

2.3 Material Didático (MD)

Material didático (MD) é qualquer material útil no processo de ensino aprendizagem, ou seja, um giz pode ser um MD, uma revista, um quebra-cabeça, um jogo, um slide, dentre outros.

Tendo em vista que existem numerosos materiais didáticos, eles podem desempenhar várias funções, conforme o objetivo a que se prestam e, por isso, o professor deve sempre perguntar-se quais seus objetivos com um determinado MD.

Por melhor que seja o MD ele nunca ultrapassa a categoria de meio auxiliar de ensino, de alternativa metodológica, à disposição de professor e aluno e, como tal, o MD não garantia de um bom ensino, nem de uma aprendizagem significativa e não substitui o professor (LORENZATO, 2006).

Dessa maneira, temos que saber distinguir as diferenças entre os materiais didáticos manipuláveis, visto que alguns não possibilitam modificações em suas formas. Com isso, o material por ser estático, permite apenas a observação. Enquanto outros já permitem uma maior participação do aluno, uma aprendizagem mais significativa, como é o caso do ábaco, do material dourado, dos jogos de tabuleiros e dos materiais da matemateca (mais adianta veremos suas descrições juntamente com suas considerações físicas e matemáticas).

Vale ressaltar que a realização em si de atividades manipulativas ou visuais não garante a aprendizagem; para que essa aprendizagem aconteça de uma forma efetiva deve-se ter por parte dos alunos uma atividade mental; que a eficiência do MD depende do professor do que do próprio MD; e que a utilização correta do MD é muito importante para o desenvolvimento cognitivo e afetivo do aluno.

2.4 A Biblioteca de Objetos Matemáticos da UFPA

Como o LEM, que dispõe de diversos recursos a serem utilizados pelos educadores em sala de aula, surgem projetos que seguem o mesmo pensamento como a *Biblioteca de Objetos Matemáticos da Universidade Federal do Pará (UFPA): a matemática viva e instigante mediando o processo de aprendizagem*, idealizado pelo professor Márcio Lima do Nascimento.

No ano de 2010, em visita a Universidade de São Paulo, o Professor Márcio Nascimento entrou em contato com o projeto Matemateca da Universidade de São Paulo (um laboratório contendo objetos matemáticos manipuláveis), coordenado pelo Professor Dr. Eduardo Colli, onde discutiram a ideia de se fazer um projeto similar na Universidade Federal do Pará (UFPA), adequando às peculiaridades da região e da UFPA. Por outro lado, a Faculdade de Matemática já tinha discutido na reformulação do seu Projeto Político Pedagógico (PPP), a implementação de novos Laboratórios de Ensino que agregassem materiais didáticos e jogos, além dos recursos computacionais existentes no Laboratório de Matemática Aplicada e Computacional (LABMAC), situado na Faculdade de Matemática. O laboratório, juntamente com o material manipulável, situa-se na sala multiuso 1, no prédio da assessoria de educação à distância (AEDI).

O laboratório busca a construção de uma linguagem que permita aproximar a Matemática de estudantes de todos os níveis e do público em geral, com objetos concretos e, assim, expressando uma linguagem facilitadora de ensino, possibilitando que as pessoas interajam com conceitos clássicos, modernos e até em pesquisa atual na matemática, tendo como objetivo central instigar a curiosidade e a vontade de aprender. O Laboratório tem como pretensão levar os objetos matemáticos à diversas escolas públicas e particulares, além de eventos e feiras acadêmicas para que os alunos tenham contato com a matemática do ensino fundamental, médio e superior, através de problemas motivadores possibilitando ver as disciplinas de matemática com outros olhares. Além das explicações sobre a matemática envolvida e as áreas de aplicação de cada objeto, os alunos podem manusear as peças e as brincadeiras matemáticas.

Com a proposta de fabricação de objetos concretos que contemplem diversas áreas do conhecimento matemático, com um número inicial de 10 objetos matemáticos oriundos da MATEMATECA da USP, junto com as peças e jogos já existentes na Faculdade de Matemática, o laboratório com algumas ações iniciais, que foram exposições sobre as peças a alunos de uma escola particular de Belém, participação na mostra científica da Escola de Aplicação da UFPA e alunos de uma escola da zona rural em Salvaterra na ilha do Marajó, já conseguiu ter um efeito motivador (ocasionaram-se perguntas pertinentes sobre as peças e a participação dos jogos matemáticos envolvidos em determinadas peças) nos poucos alunos que tiveram a oportunidade de assistirem as exposições das peças.

O encantamento das crianças com as peças e as possibilidades que os professores vislumbram nas suas ações em sala de aula a partir desse encontro diferente com a matemática, já demonstram a necessidade desse aumento do número de peças e principalmente a ação que tem ser discutida com os roteiros de apresentação das peças, com a relação das peças com os assuntos vistos em sala de aula, o uso das peças nas atividades de laboratório de ensino e de estágio, dentre outras atividades.

Os objetos matemáticos concretos que são parte do acervo da Biblioteca de Objetos Matemáticos da UFPA têm como objetivo principal trabalhar a favor da divulgação da matemática em todos os níveis: do aluno do ensino fundamental, do aluno do ensino médio e do aluno de graduação. Sendo assim, cada um terá uma visão diferente das peças, ocasionando questionamentos distintos sobre as mesmas. Uma peça pode ser muito popular entre as crianças do ensino fundamental e ter aspectos matemáticos e perguntas complicadas se analisarmos com calma. Outra peça pode ter uma explicação física simples para um aluno do ensino médio, porém bem mais detalhado para um aluno de geometria diferencial.

O laboratório tem peças que possam "agradar a gregos e troianos". Sem dúvida é uma tarefa árdua.

CAPÍTULO 3

DESCRIÇÃO DAS PEÇAS DO LABORATÓRIO COM CONSIDERAÇÕES FÍSICAS E/OU MATEMÁTICAS

Como o LEM é um espaço de práticas alternativas instigantes e tem como um de seus objetivos provocar questionamentos dos alunos durante as atividades propostas pelo laboratório e buscando assim uma aprendizagem mais significativa.

Para se ter uma organicidade, foi elaborado um roteiro de apresentação e sempre no início da exposição de cada peça, são feitas algumas perguntas de motivação aos alunos, sempre levando em consideração o que pode estar próximo da realidade deles.

Vamos neste capítulo responder aos questionamentos dos alunos com relação aos experimentos, com suas considerações físicas e/ou matemáticas. Sendo assim, temos a seguir as considerações acerca das peças do laboratório.

Iremos detalhar os conceitos e resultados matemáticos que envolvem algumas peças. O roteiro das apresentações das peças segue uma outra linha, que envolve apresentar os conceitos de forma lúdica e gradual. Dependendo da faixa etária do público envolvido, o roteiro pode ser modificado.

3.1 A Curva Tautócrona

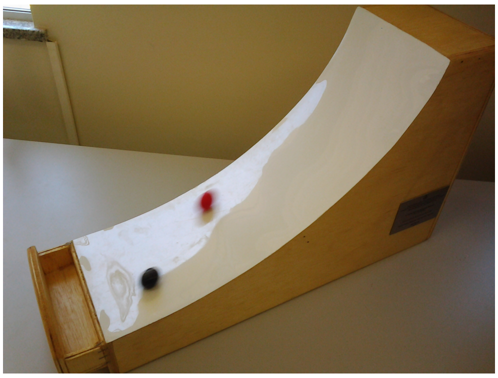


Figura 3.1: A Curva Braquistócrona

Incialmente a apresentação desta peça ocorre com o seguinte problema:

Problema 1- Plano Inclinado:Considerando um plano inclinado e duas bolinhas (uma preta e outra vermelha) com os mesmos diâmetros e pesos. Se posicionarmos a bolinha B a uma altura maior que a bolinha A e lançarmos ambas as bolinhas ao mesmo tempo, qual chegará primeiro?

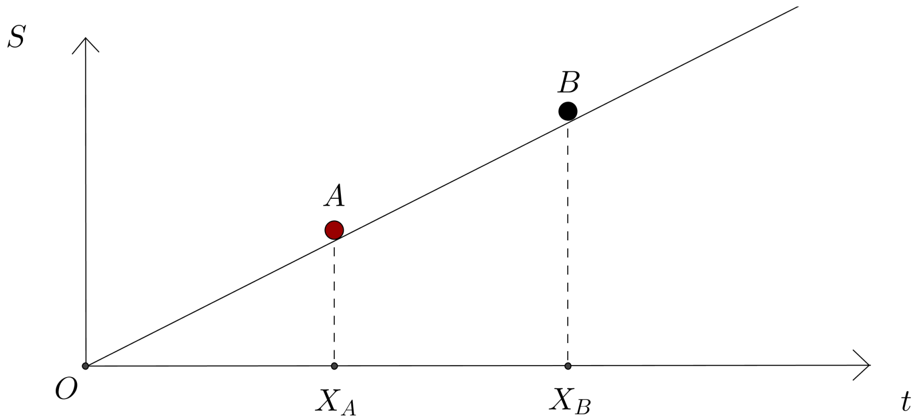


Figura 3.2: Situação do Problema 1

Nesta situação, a bolinha que chegará primeiro será a bolinha A. De fato,

As velocidades das bolinhas, quando lançadas ao mesmo tempo, serão as mesmas pelo fato de estarem nas mesmas condições em um mesmo plano inclinado, logo

$$v_A = v_B \tag{3.1}$$

E como as bolinhas estão em distâncias distintas do solo (origem), temos:

$$d(A,O) < d(B,O) \tag{3.2}$$

Temos que a velocidade das duas bolinhas são as seguintes:

$$v_A = \frac{d(A,O)}{t_A} \Rightarrow d(A,O) = v_A t_A \tag{3.3}$$

e

$$v_B = \frac{d(B,O)}{t_B} \Rightarrow d(B,O) = v_B t_B \tag{3.4}$$

Por (3.2), temos:

$$v_A t_A < v_B t_B \tag{3.5}$$

e por (3.1), temos:

$$t_A < t_B \tag{3.6}$$

Como queríamos demonstrar.

A partir do problema 1, utilizando o material, é posto em xeque a seguinte pergunta:

Problema 2 - Tautócrona: Se colocarmos as mesmas bolinhas, nesta curva, nas mesmas condições em que colocamos no plano inclinado (uma mais próxima ao poço do que a outra), qual chegará primeiro?

A Tautócrona é um dos objetos que pertencem ao acervo do laboratório. Esta significa em grego "a curva de mesmo tempo".

Mas para respondermos o problema 2, vamos recorrer à história que envolve esta curva tão peculiar.

Nos séculos XVII e XVIII a medição precisa do tempo era extremamente importante à navegação, uma vez que uma boa determinação das longitudes requeria métodos confiáveis para medir intervalos de tempo. A elaboração de métodos para se medir longitudes, neste período, desafiou cientista brilhantes como, por exemplo, Galileo Galilei, Isaac Newton, Christiaan Huygens, dentre outros.

O físico, matemático e astrônomo holandês Christiaan Huygens, nascido em Haia em 1629, esteve envolvido durante 40 anos de sua vida tentando desenvolver e melhorar cronômetros marítimos. Em particular, ele estava interessado em construir um pêndulo que tivesse o mesmo período qualquer que fosse a sua amplitude de oscilação. Embora Galileo (1564 - 1642) soubesse que um pêndulo simples com pequenas amplitudes de oscilação tem um período que independe da amplitude, porém Huygens já sabia que para grandes amplitudes de oscilação o período de um pêndulo simples passa a depender de sua amplitude. Huygens verificou, ainda, que o período de um pêndulo simples é tanto maior quando maior for sua amplitude de oscilação.

Por coincidência, Huygens foi convidado pelo filósofo, físico e matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) a participar de uma competição sobre a cicloide, uma nova curva que acabara de ser introduzida por Mersenne e que estavam atraindo a atenção de muitos matemáticos da época devido ao seu caráter não algébrico. Huygens se tornou um especialista nas propriedades peculiares da cicloide e não foi preciso muito tempo para que se perguntasse se essa curva particular não lhe ajudaria a resolver o problema do pêndulo isócrono.

3.1.1 A cicloide

Esta é uma curva traçada por um ponto fixado sobre o círculo de raio r qualquer, que rola sem escorregar sobre uma superfície plana e rígida. Temos que o disco de raio r é chamado de círculo gerador da cicloide, conforme figura 3.3.

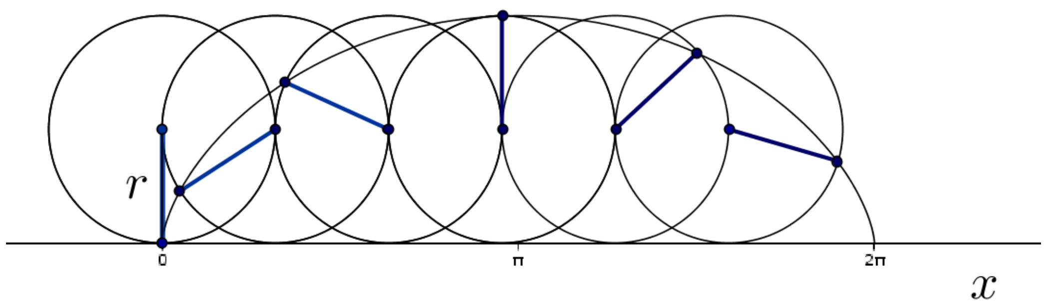


Figura 3.3: Construção da cicloide a partir de uma circunferência de raio r

Seja P um ponto da extremidade do disco e θ o ângulo que mede a rotação do disco à medida que ele se move rolando sem deslizar sobre a superfície. A partir disso, podemos deduzir a equação paramétrica da ciclóide.

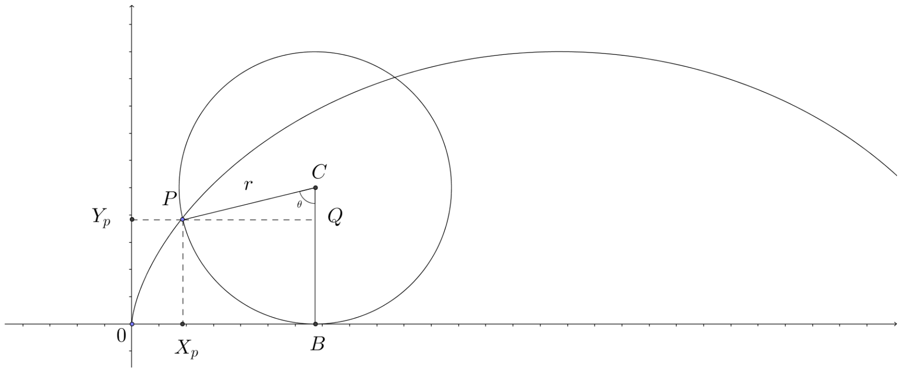


Figura 3.4: Ciclóide formada a partir de uma circunferência de raio r

$$X_c = 0B - PQ = r(\theta - sen\theta) \tag{3.7}$$

$$Y_p = 1 - CQ = r(1 - cos\theta) \tag{3.8}$$

Logo, deduzimos a equação paramétrica da ciclóide.

3.1.2 Solução ao Problema 2

A resposta ao problema 2 é que as bolinhas chegarão sempre juntas. De fato, primeiramente, por conveniência, contruíremos um sistema de coordenadas contendo os pontos $A(0,0)$, que será a origem do sistema, e o ponto (posição) final B da partícula. O eixo y deve estar no sentido oposto ao usual e este será o sentido, pois estamos tomando como referência a gravidade. Como nos mostra a figura a seguir:

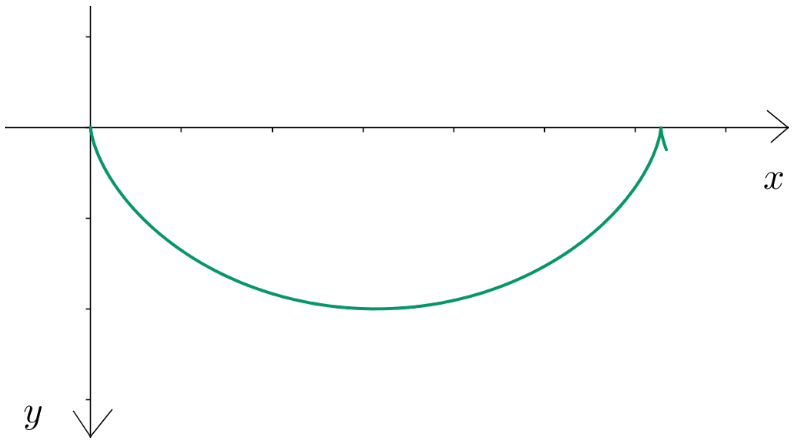


Figura 3.5: Cicloide

A física nos diz que uma partícula que se encontra apenas sob a ação da gravidade realiza um trabalho ao se deslocar de um ponto A até um ponto B igual a variação de sua energia cinética.

Seja v o valor absoluto da velocidade na partícula no ponto B, y seu deslocamento vertical e m sua massa. Pela conservação de energia, temos:

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 0 \tag{3.9}$$

$$v^2 = 2gh \tag{3.10}$$

$$v = \sqrt{2gh} \tag{3.11}$$

Com isso, temos que a velocidade na cicloide depende apenas da altura e como

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gh} \tag{3.12}$$

precisamos encontrar o espaço pecorrido pela bolinha pra podermos calcularmos o seu tempo de queda, mas para isso vamos enunciar a definição de comprimento do arco.

Definição 3.1.1 (Comprimento do Arco) *Seja $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, com $n = 2, 3$, uma curva parametrizada regular. A função comprimento do arco $s : I \to \mathbb{R}$ é definida por*

$$s(t) := \int_{t_0}^{t} ||\alpha'(u)||du, \ t_0 \text{ está fixo em } I.$$

Para calcularmos o espaço percorrido pela bolinha, podemos calcular o comprimento do arco que a bolinha desliza.

$$\alpha = (r(\theta - sen\theta), r(1 - cos\theta)) \tag{3.13}$$

$$\alpha'(\theta) = (r(1 - cos\theta), rsen\theta) \tag{3.14}$$

$$||\alpha'(\theta)|| = \sqrt{r^2(1 - 2cos\theta + cos^2\theta) + r^2sen^2\theta} \tag{3.15}$$

$$||\alpha'(\theta)|| = \sqrt{r^2(2 - 2cos\theta)} = \sqrt{2r^2(1 - cos\theta)} \tag{3.16}$$

Pela definição anterior, temos:

$$s(t) = \int_0^\pi ||\alpha'(\theta)||d\theta = \int_0^\pi \sqrt{2r^2(1 - cos\theta)}d\theta \tag{3.17}$$

Logo,

$$ds = \sqrt{2r^2(1 - cos\theta)}d\theta \tag{3.18}$$

Agora basta provar que o tempo de queda da bolinha, de qualquer posição da curva que for lançada, é sempre constante.

Vamos supor que a bolinha seja lançada do topo da peça.

Como já vimos em (3.12), o tempo de queda será dado por:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2gh}} \tag{3.19}$$

que substituindo os valores, temos:

$$dt = \frac{\sqrt{2r^2(1 - cos\theta)}}{\sqrt{2g(1 - cos\theta)}}d\theta \tag{3.20}$$

cancelando o termo em comum, temos:

$$dt = \sqrt{\frac{r^2}{g}}d\theta \tag{3.21}$$

Então, o tempo t necessário para que o corpo se desloque do ponto mais alto ao mais baixo será dado resolvendo a seguinte integração:

$$T = \sqrt{\frac{r^2}{g}}\int_0^\pi d\theta \tag{3.22}$$

$$T = \sqrt{\frac{r^2}{g}}\pi \tag{3.23}$$

Mas, quando a bolinha for lançada em uma altura qualquer da peça (um ponto qualquer t_0), com $\theta_0 \sqsupset 0, \pi \sqsubset$ onde $v(\theta_0) = 0$, a velocidade deve ser escrita como

$$v = \frac{ds}{dT} = \sqrt{2g(h - h_0)} \tag{3.24}$$

então a integral que nos diz o tempo percorrido na curva, será:

$$T = \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2r^2(1 - cos\theta)}{2g(1 - cos\theta - 1 + cos\theta_0)}} d\theta = \sqrt{\frac{r^2}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - cos\theta}{-cos\theta + cos\theta_0}} d\theta \tag{3.25}$$

$$T = \sqrt{\frac{r^2}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{1 - cos\theta}{cos\theta_0 - cos\theta}} d\theta \tag{3.26}$$

Lembrando a equação do arco metade:

$$sen(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1 - cos\theta}{2}} \tag{3.27}$$

$$cos(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1 + cos\theta}{2}} \tag{3.28}$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.26), temos:

$$T = \sqrt{\frac{r^2}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \sqrt{\frac{2sen^2(\frac{\theta}{2})}{2(cos^2(\frac{\theta_0}{2}) - cos^2(\frac{\theta}{2}))}} d\theta \tag{3.29}$$

$$T = \sqrt{\frac{r^2}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \frac{sen(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{cos^2(\frac{\theta_0}{2}) - cos^2(\frac{\theta}{2})}} d\theta \tag{3.30}$$

$$T = \sqrt{\frac{r^2}{g}} \int_{\theta_0}^{\pi} \left[\frac{sen(\frac{\theta}{2})}{\sqrt{1 - \left(\frac{cos^2(\frac{\theta}{2})}{cos^2(\frac{\theta_0}{2})} \right)^2}} . \frac{1}{cos(\frac{\theta_0}{2})} d\theta \right] \tag{3.31}$$

Agora, basta fazer uma mudança de variável para resolvermos essa integral:

$$u = \frac{cos(\frac{\theta}{2})}{cos(\frac{\theta_0}{2})} \tag{3.32}$$

$$du = \frac{-sen(\frac{\theta}{2})}{2cos(\frac{\theta_0}{2})} d\theta \tag{3.33}$$

Substituindo na integral (3.31), temos:

$$T = -2\sqrt{\frac{r^2}{g}} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} du = -2\sqrt{\frac{r^2}{g}} \left(\left[sen^{-1} \left(\frac{cos(\frac{\theta}{2})}{cos(\frac{\theta_0}{2})} \right) \right]_{\theta_0}^{\pi} \right) \tag{3.34}$$

E, finalmente,

$$T = \sqrt{\frac{r^2}{g}} \pi \tag{3.35}$$

$\blacksquare$

Logo, o tempo de queda necessário para ir de um ponto até outro é constante, independente de onde a bolinha for lançada.

Pergunta: Como podemos explicar isso para uma criança do 6º ao 9º ano?

3.2 Paraboloide Hiperbólico

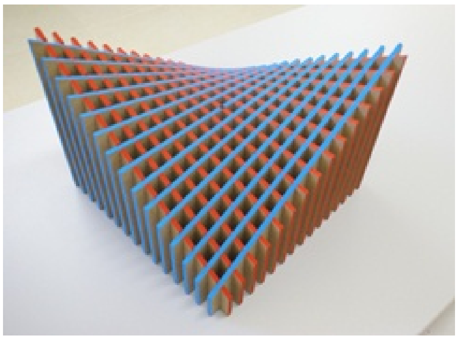


Figura 3.6: Sela

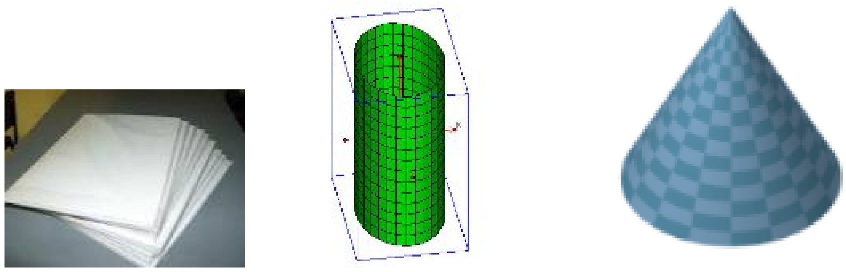
Com intuito de causar interesse pelo objeto matemático acima, perguntamos aos alunos que já assistiram a apresentação, o que eles acham que pode ser essa peça?

Alunos de uma escola particular de Belém responderam que era um prédio moderno de Dubai. Já alunos de uma escola da zona rural de Salvaterra disseram que era um chifre de um búfalo. Isso significa que a percepção do objeto depende do contexto no qual o indivíduo está inserido. Na verdade, este objeto é um paraboloide hiperbólico, mais conhecido como uma sela de cavalo, que tem como característica ser uma superfície duplamente regrada. Para melhor entendimento desta característica, deve compreender, primeiramente, o que é uma superfície regrada.

Mas afinal, o que é uma superfície? De acordo com O'Shea (2009) "chegamos a essa noção pensando as formas possíveis de um mundo, e é relativamente fácil imaginar variedades bidimensionais como modelos de mundos em que poderíamos viver. Em particular, vamos estabelecer que uma variedade bidimensional ou superfície é um objeto matemático cujas áreas podem ser representadas todas em algum mapa sobre uma folha de papel. A palavra bidimensional se refere ao fato de, em qualquer ponto sobre esse objeto, os pontos máximos poderem ser expressos em termos de duas dimensões independentes. Isso é importante porque a construção de um mapa exige que possamos determinar como os pontos se relacionam uns com os outros. É necessário ser capaz de identificar cada um deles. Os mapas, ou seja, as folhas de papel em que são representados os pontos do mundo, são bidimensionais. Uma coleção de mapas que cubra a superfície, de forma que todo ponto da superfície seja representado em pelo menos um dos mapas, é chamada de atlas. Se alguém um atlas da Terra, vai receber um livro de mapas, e se pode esperar que cada ponto da Terra apareça em pelo menos um dos mapas. Uma variedade bidimensional, ou superfície, é, portanto, um objeto representado por um atlas"(p.38).

Definição 3.2.1 (Superfície Regrada) *Uma superfície é dito regrada quando a mesma é formada por retas, ou seja, em cada ponto passa pelo menos uma reta que esteja totalmente contida na superfície.*

Exemplos:



(a) Folha de Papel (b) Cilindro (c) Cone

Figura 3.7: Superfícies Regradas

Desta forma, percebemos no objeto que em cada ponto passam pelo menos duas retas contidas inteiramente na superfície e por isso é **Duplamente Regrada**.

Nesta peça estamos falando apenas da superfície. Porém, observando a peça como um todo, veremos que ela é formada por planos.

(a) Estável (b) Instável

Figura 3.8: Ponto de Sela

Olhando a peça frontalmente, vemos nitidamente uma parábola. Olhando por um ângulo lateral vemos, mas não com a mesma nitidez que vemos a parábola, as hipérboles.

A superfície é chamada de parabolóide hiperbólico. Esta superfície possui uma equação que é estudada na geometria analítica, que é:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

Quando $x = 0$, temos $z = \frac{-y^2}{b^2}$, que é a nossa conhecida parábola no plano yz. Quando $y = 0$, aparece outra parábola.

Em cada nível (ou altura), com $z = c$ (constante), temos $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = c$ que é a equação de uma hipérbole.

Mas estamos interessados em mostrar a propriedade que fica evidenciada nesta peça que é a questão dela ser duplamente regrada. De fato,

Primeiramente vamos considerar a equação do paraboloide hiperbólico com $a = b = 1$ só para efeito de cálculo (já que a e b são constantes).

Parametrizando o paraboloide hiperbólico em termo de u e v, temos que

$$X(u, v) = (u, v, u^2 - v^2) \tag{3.36}$$

Reparemetrizando esta superfície, obtemos

$$Y(x + y, x - y) = (x + y, x - y, 4xy) \tag{3.37}$$

$$Y(x + y, x - y) = (x, x, 0) + y(1, -1, 4x) \tag{3.38}$$

Mas também podemos escrever a superfície como

$$Y(x + y, x - y) = (y, -y, 0) + x(1, 1, 4y) \tag{3.39}$$

■

Observando na peça, tocando em cada ponto da SELA, visualizamos as duas retas em cada ponto.

3.3 Máquina de Traçar Elipse

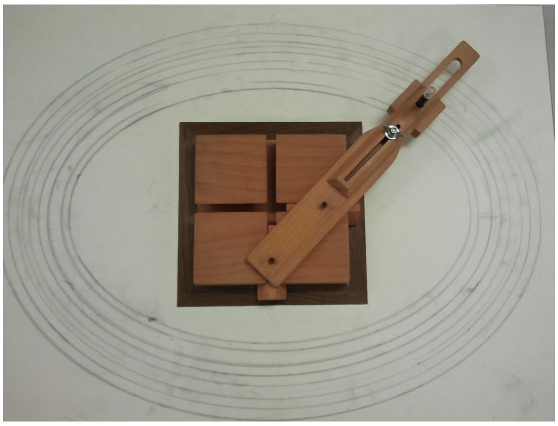


Figura 3.9: Traçador de Elipse

A peça tem um mecanismo de se movimentar no centro sobre uma "cruz"formando uma curva peculiar, você já viu algo parecido com essa curva que é formada?

O nome desta curva chama-se elipse que é uma curva obtida por corte de cones circulares por planos (secção cônica). Este tipo de curva era bem conhecido pelos antigos estudiosos, porém seu estudo foi divulgado pelo desenvolvimento da geometria analítica e do cálculo. Ela aprace com frequência no cotidiano e natureza. Podemos encontrar objetos que têm o arco da elipse como, por exemplo, uma mesa, um brinco ou um espelho. (Figura 3.10).

(a) Mesa (b) brinco (c) espelho

Figura 3.10: Objetos que têm o arco de uma elipse

Inicialmente, vamos definir a elipse e deduzir sua equação para podermos dar ênfase a propriedade presente na peça do laboratório.

Definição 3.3.1 *Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja a soma das distâncias a dois pontos fixos desse plano é constante.*

Consideremos no plano dois pontos distintos, F_1 e F_2, tal que a distância $d(F_1, F_2) =$

$2c$. Seja um número real a tal que $2a > 2c$. Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que: $d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$ dá o nome de elipse (figura abaixo).

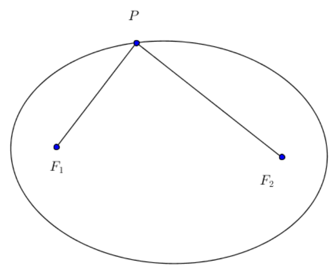


Figura 3.11: Elipse

Elementos da Elipse:

Focos: são os pontos F_1 e F_2.

Distância Focal: é a distância $2c$ entre os focos.

Centro: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.

Eixo Maior: é o segmento A_1A_2 de comprimento $2a$ (o segmento A_1A_2 contém os focos e os seu extremos pertencem à elipse).

Eixo Menor: é o segmento B_1B_2 de comprimento $2b$ ($B_1B_2 \perp A_1A_2$ no seu ponto médio).

Vértices: São os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

Proposição 3.3.1 *Sejam $PF_1 + PF_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ e $F_1F_2 = 2c$. Então $a^2 = b^2 + c^2$. Sendo P um ponto qualquer na extremidade da elipse.*

Demonstração 3.3.1 *Sendo $B2F_1 + B_2F_2 = 2a$ e $\triangle CB_2F_1 \simeq \triangle CB_2F_2$, então $B_2F_1 = B_2F_2 \implies 2B_2F_2 = 2a \implies B_2F_2 = a$*

Logo, pelo teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$.

Outro elemento da elipse é a *excentricidade* que é o número e dado por $e = \dfrac{c}{a}$.

Tendo em vista que $2c < 2a \implies c < a$, tem-se: $0 < e < 1$.

A excentricidade da elipse é responsável pela forma da elipse. Elipses com excentricidade próxima de zero têm os semi-eixos com comprimentos próximos. Elas são aproximadamente um círculo, pois

$$e = \frac{c}{a} \approx 0 \implies c \approx 0 \implies c^2 \approx 0 \implies b^2 = a^2 - c^2 \approx a^2 \implies b \approx a.$$

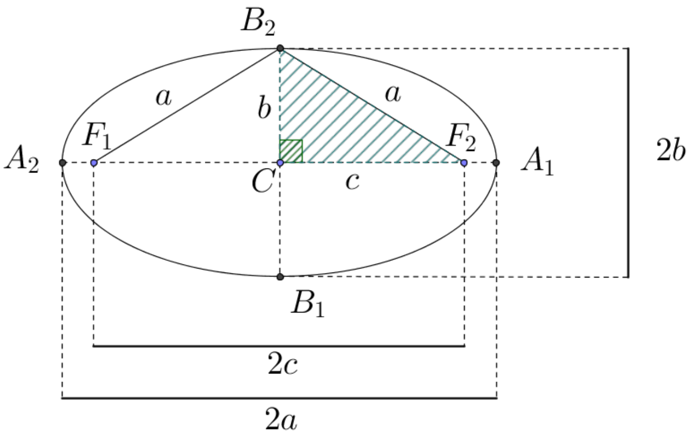


Figura 3.12: Elipse

Elipses com excentricidade próxima de um têm uma forma alongada, com o semi-eixo menor de comprimento próximo de zero, pois

$$e = \frac{c}{a} \approx 1 \Longrightarrow c \approx a \Longrightarrow c^2 \approx a^2 \Longrightarrow b^2 = a^2 - c^2 \approx 0 \Longrightarrow b \approx 0.$$

A partir dessas informações podemos deduzir a equação da elipse. Vamos supor que o eixo maior está sobre o eixo x. Seja $P(x, y)$ um ponto qualquer de um elipse de focos $F_1(-c, 0)$ e $F_2(c, 0)$.

Por definição, temos que:

$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a$

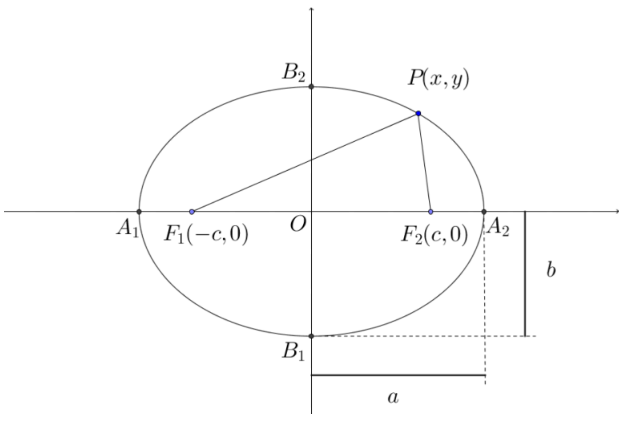


Figura 3.13: Elipse

ou em coordenadas:

$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a$

$\sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2} = 2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xc + c^2}$

$(\sqrt{x^2 + y^2 + 2xc + c^2})^2 = (2a - \sqrt{x^2 + y^2 - 2xc + c^2})^2$

$x^2 + y^2 + 2xc + c^2 = 4a - 4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2xc + c^2} + x^2 + y^2 + -2xc + c^2$

$4a\sqrt{x^2 + y^2 - 2xc + c^2} = 4a^2 - 4xc$

$a\sqrt{x^2 + y^2 - 2xc + c^2} = a^2 - xc$

$a^2(x^2 + y^2 - 2xc + c^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$

$a^2x^2 + a^2y^2 - a^22xc + a^2c^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2$

$a^2x^2 - c^2x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

Porém, $a^2 - c^2 = b^2$

Logo,

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

Divindo a equação por a^2b^2, obtemos:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.40}$$

que é a equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo x.

Voltando a peça do laboratório, que tem um mecanismo de se movimentar no centro sobre uma "cruz"formando uma elipse, podemos confirmar que esse mecanismo realmente forma uma elipse dada em (3.40).

Com efeito, vamos cosiderar que essa "cruz"que o material se movimenta coincida com o eixo cartesiano, conforme esquema abaixo.

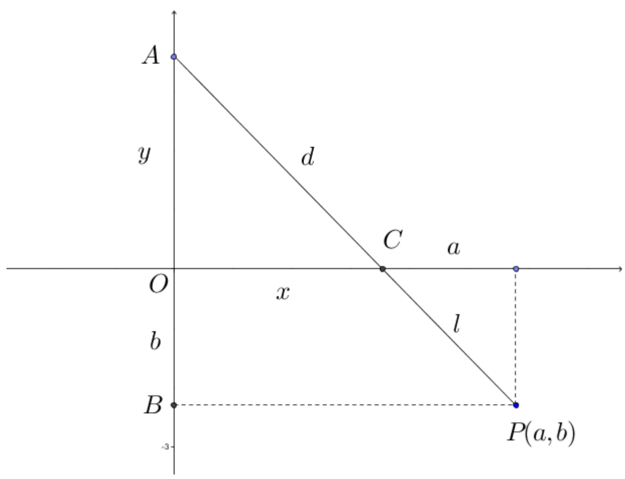


Figura 3.14: Representação da Peça do Laboratório

Por semelhança de triâgulos, temos:

$$\frac{d}{d+l} = \frac{x}{a} = \frac{y}{y+b} \tag{3.41}$$

De (2), temos:

$$x = \frac{da}{d+l} \tag{3.42}$$

e

$$d(y+b) = y(d+l) \Longrightarrow y = \frac{db}{l} \tag{3.43}$$

Como $d^2 = x^2 + y^2$, temos

$$d^2 = \frac{d^2a^2}{(d+l)^2} + \frac{d^2b^2}{l^2} \tag{3.44}$$

Dividindo a equação (3.44) por d^2, obtemos:

$$\frac{a^2}{(d+l)^2} + \frac{b^2}{l^2} = 1 \tag{3.45}$$

que é a equação reduzida de uma elipse.

3.4 Icosiano

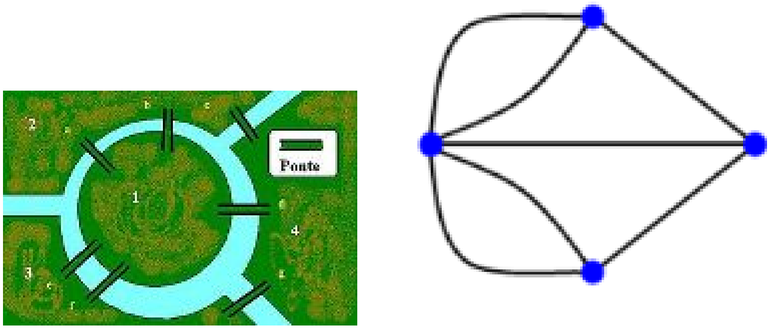
Figura 3.15: Jogo Icosiano

Problema 1: Imagine que um carteiro tenha que distribuir cartas por 20 casas de um bairro, onde as casas estão dispostas como na figura 3.15. De que modo ele pode fazer um trajeto de forma que não passe por uma casa mais de uma vez?

Evidentemente que ele terá que passar por cada casa uma única vez, evitando percorrê-las mais do que isso.

O problema de Konigsberg

Imagine agora duas grandes ilhas que, juntas, formam um complexo contendo sete pontes (figura abaixo). Discutia-se nas ruas da cidade a possibilidade de atravessar todas as pontes sem repetir nenhuma.



(a) Esquema das Pontes (b) Grafo das Pontes

Figura 3.16: Pontes de Konigsberg

Como você faria para percorrer por todas as pontes, passando uma única vez por cada uma? Para responder esta pergunta, podemos considerar a teoria dos grafos, isso porque os grafos aparecem em inúmeras situações do cotidiano e em qualquer uma delas existe a necessidade de se locomover de um ponto ao outro. Em 1736, Euler respondeu essa pergunta e esse problema foi fundamental para o início do estudo desta teoria.

Estes dois problemas estão relacionados ao Jogo Icosiano. Este foi inventado no início do século XIX pelo matemático John Hamilton. O jogo foi inspirado no problema do caixeiro-viajante que consistia na determinação da rota de menor custo para uma pessoa que parta de uma cidade tendo que visitar diversas outras. Repare na peça que o tabuleiro é a planificação das arestas e vértices de um dodecaedro regular, como é o caso da figura seguinte:

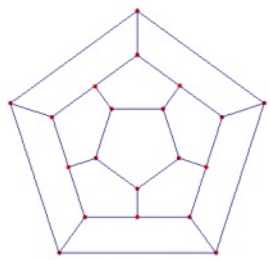


Figura 3.17: Grafo do Icosiano

Objetivos:

Um dos primeiros desafios é achar um caminho passando exatamente uma vez em cada ponto ao longo das arestas do dodecaedro, respeitando as seguintes condições:

- O início é um vértice qualquer;
- Cada vértice é percorrido uma única vez;
- Nenhuma aresta é percorrida duas vezes.

Esse tipo de caminho em grafos ficou conhecido como um caminho hamiltoniano.

A partir desse contexto, podemos extrair várias verdades matemáticas para explorar o estudo da teoria dos grafos, como as mencionadas a seguir.

De modo geral, as estruturas associadas à teoria dos grafos são definidas por associações de conjuntos de dois tipos:

1. um conjunto da forma

$$X = \{x_\imath | \imath = 1, \ldots, n\}$$

cujos elementos são chamados vértices, nós ou pontos.

2. um conjunto da forma

$$\mathcal{E} = \{E_\jmath | \jmath \in I\} \ I \subset N$$

que pode ser uma família de partes de X, ou de elementos de $X \times X$;

Seus elementos são chamados de arestas no primeiro caso e arcos no segundo.

Definição 3.4.1 *Um ciclo é uma cadeia simples na qual os vértices inicial e final se coincidem.*

Definição 3.4.2 (Grafos Eulerianos ou Caminhos Eulerianos) *Um grafo G é euleriano se existe uma trilha fechada que passa por todos os vértices e arestas de G.*

Informalmente, podemos afirmar que um grafo G é euleriano se pudermos desenhar uma representação gráfica de G sem tirar o lápis do papel e voltar ao ponto de partida, sem passar mais de uma vez por nenhuma aresta.

Definição 3.4.3 (Grafos Hamiltonianos ou Caminhos Hamiltonianos) *Um caminho hamiltoniano em G é um caminho que passar por todos os vértices de G.*

Um caminho hamiltoniano equivale a permutação dos vértices. Com isso, o número máximo de caminhos hamiltonianos em um grafo é n!

Resposta ao Problema das Pontes de Konisgsberg

A solução consiste em, partindo de qualquer vértice, tentar atravessar todas as arestas um única vez e retornar ao vértice de origem. Os vértices de um grafo são os pontos de onde saem suas linhas. Uma linha unindo dois vértices consecutivos chama-se arco ou aresta. O grau de um vértice é o número de arcos que sai dele. Um vértice se diz par ou ímpar conforme seu grau seja par ou ímpar.

Euler, ao propôr a solução para este problema, se preocupou em descobrir em que tipos de grafos se pode fazer esse caminho fechado, passando por todas as arestas uma única vez. Como todo grafo de Euler possui um caminho de Euler, como o proposto neste problema, para sabermos se existe solução, basta sabermos se o grafo modelo do problema é um grafo de Euler ou não.

Teorema 3.4.1 *Um grafo conexo G é um grafo de Euler se, e somente se, todos os seus vértices são de grau par.*

Demonstração 3.4.1 *Imagine que G seja um grafo de Euler. Então ele contém um caminhado de Euler. Seguindo esse caminho nota-se que chegamos em um vértice "entrando"por uma aresta e encontramos outra para "sair"do vértice e continuar o caminho. Se houver outras arestas adjacentes ao vértice, "entramos"por uma destas arestas e devemos encontrar uma, ainda não visitada, para "sairmos"do vértice. Se houver um número n ímpar de arestas em pelo menos um dos vértices, ao realizar o caminhamento, cruzaremos esse vértice* $\frac{n}{2}$*vezes, passando por* $(n-1)$ *arestas. Ao passarmos pela n-ésima aresta, "entraremos"no vértice e não encontraremos mais arestas ainda não visitadas. Assim, o caminho não pode continuar.*

∎

3.5 Centro de Massa

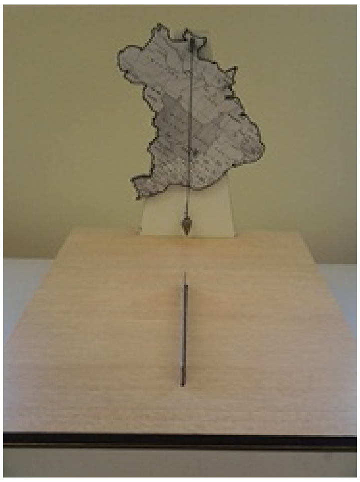


Figura 3.18: Aparelho para Encontrar o Centro de Massa de Figuras Planas

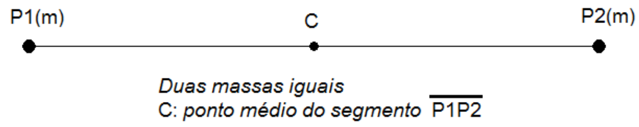
Como vocês acham que em uma escola de samba uma pessoa roda um pandeiro na ponta do dedo sem deixar cair? E como você acha que os jogadores de basquete conseguem girar uma bola na ponta do dedo sem derrubá-la?

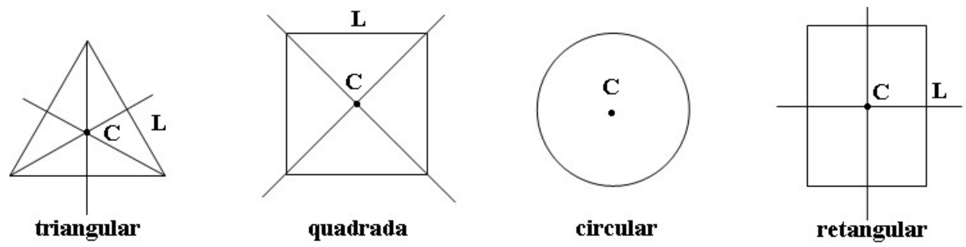
Isso acontece por causa do centro de massa. Este, falando de uma forma bem simples, é o ponto de equilíbrio do corpo. Todo corpo tem seu respectivo centro de massa.

No cotidiano, muitas vezes, nos deparamos com situações onde o conceito de centro de massa está envolvido. Como por exemplo, pode-se citar a caçamba de um caminhão contendo uma carga relativamente pesada. Se esta carga estiver concentrada em uma das laterais da caçamba, existe grande risco do caminhão tombar ao executar uma curva devido à inércia, pois a carga como um todo, está em desequilíbrio com o caminhão. No entanto, Se a carga estiver distribuída de modo que o centro de massa da carga esteja localizado sobre o eixo central do caminhão, então a carga não irá tombar devido ao equilíbrio entre o caminhão e a carga.

Propriedades do Centro de Massa

Se o sistema de pontos materiais admite um eixo (ou um centro de simetria), de modo que as massas dos pontos simétricos sejam iguais, então o centro de massa pertence ao eixo (ou ao centro) de simetria.





Se tivermos um quadrado e um retângulo, os seus centros de massa localizam-se na interseção das diagonais. Se tivermos uma região circular, o seu centro de massa estará localizado no seu centro. Se for uma região triangular, o seu centro de massa será o baricentro.

Baricentro é uma palavra de origem grega, onde barus significa peso, e designa inicialmente "o centro dos pesos".

O baricentro assim definido é também chamado de centro de massa (Deborah Raphael, IME-USP).

Vamos desenvolver nosso modelo matemático em etapas de raciocínios. A primeira delas é considerar três partículas com massas m_1, m_2 e m_3 em um eixo x fixado e mantido por um sustentáculo na origem.

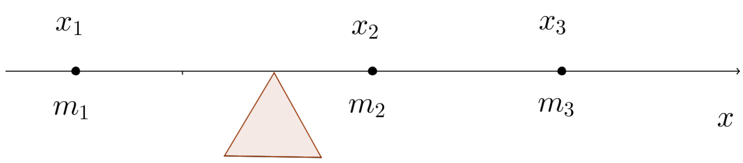


Figura 3.19: Sustentáculo na Origem

Podemos ter o equilíbrio desta situação ou não, dependerá das massas das partículas e de como elas estão dispostas.

Como cada massa m_k exerce uma força mkg para baixo que é igual a magnitude da massa vezes a aceleração da gravidade, cada uma das forças têm uma tendência a provocar a rotação do eixo em torno da origem, do modo como move-se uma gangorra. Chamamos esse feito de rotação de torque, que é medido multiplicando a força $m_k g$ pela distância x_k determinada, do ponto de aplicação à origem.

Quando consideramos as massas à direita da origem, elas exercem torque positivo e quando consideramos as massas à esquerda, temos torque negativo. A soma de todos desses torques medem a tendência de rotação em torno da origem. Essa soma é chamada de Torque do Sistema.

$$Torque\,do\,Sistema = m_1 g x_1 + m_2 g x_2 + m_3 g x_3 \tag{3.46}$$

O sistema ficará em equilíbrio se, e somente se, seu torque for zero.

Se tirarmos o fator g da equação (3.42), vemos que o sistema de torque é

$$g(m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3) \tag{3.47}$$

Assim, o torque é o produto da aceleração gravitacional (g), que é uma característica do meio ambiente e o número $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ uma constante que permanece a mesma não importa onde o sistema esteja localizado.

O número $(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3)$ é chamado o momento do sistema em torno da origem.

$$M_o \;=\; Momento\,do\,sistema\,sobre\,a\,origem \;=\; \sum m_k x_k \tag{3.48}$$

Geralmente queremos saber onde colocar o sustentáculo para fazer o sistema ficar em equilíbrio, ou seja, em que ponto x colocá-la para fazer os torques somarem-se zero.

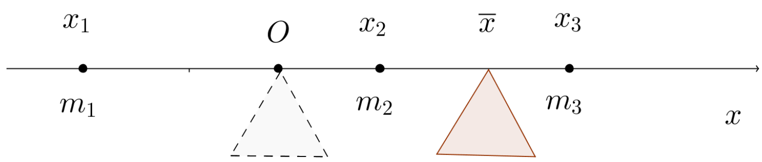


Figura 3.20: Localização especial para equilíbrio

O torque de cada massa em torno do sustentáculo nessa localização especial é

$$Torque\, de\, m_k\, sobre\, \overline{x} \ = (x_k - \overline{x})m_k g \tag{3.49}$$

Escrevendo a equação que diz que a soma desses torques é zero, temos uma equação que podemos escrever para $\overline{x}$:

$$\sum (x_k - \overline{x})m_k g = 0 \tag{3.50}$$

$$g \sum (x_k - \overline{x})m_k = 0 \tag{3.51}$$

$$\sum (x_k m_k - \overline{x} m_k) = 0 \tag{3.52}$$

$$\sum x_k m_k - \sum \overline{x} m_k = 0 \tag{3.53}$$

$$\sum x_k m_k = \overline{x} \sum m_k \tag{3.54}$$

$$\overline{x} = \frac{\sum x_k m_k}{\sum m_k} \tag{3.55}$$

ou seja, é a razão entre a soma dos momentos dos sistemas sobre a origem com a massa total do sistema. O ponto $\overline{x}$ é chamado de centro de massa.

3.5.1 Centro de massa em fios e barras finas

Em muitas aplicações, queremos conhecer o centro de massa de uma barra ou um pedaço estreito de metal. Em casos como esses em que podemos modelar a distribuição de massa em uma função contínua, os sinais de soma em nossas fórmulas tornam-se integrais de uma maneira que agora descreveremos.

Vamos imaginar uma barra fina situada ao longo do eixo x, de $x = a$ a $x = b$, e cortada em pequenos pedaços de massa Δm_k em uma partição do intervalo $[a, b]$.

O k-ésimo pedaço de Δx_k unidades de tamanhos e situa-se aproximadamente x_k unidades da origem. Agora, vamos observar três coisas.

Primeira, o centro de massa da faixa x é aproximadamente o mesmo que o do sistema de pontos de massa que obteríamos somando cada massa Δm_k ao ponto x_k:

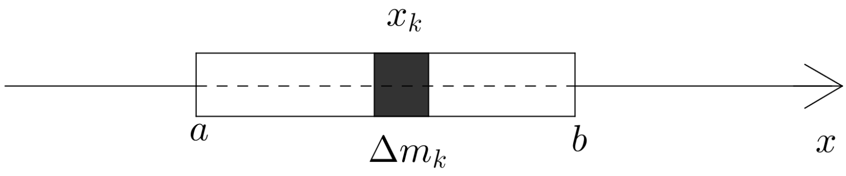


Figura 3.21: Barra fina cortada em pequenos pedaços de massa

$$\overline{x} \approx \frac{momento\, do\, sistema}{massa\, do\, sistema} \tag{3.56}$$

Segunda, o momento de cada pedaço da faixa em torno da origem é aproximadamente $x_k \Delta m_k$, portanto o momento do sistema é aproximadamente a de $x_k \Delta m_k$:

$$Momento\, do\, sistema \approx \sum x_k \Delta m_k \tag{3.57}$$

Terceira, se a densidade da faixa em x_k é $\delta(x_k)$, expressa em termos de massa por unidade de comprimento, e se δ é contínua, então Δm_k é aproximadamente igual a $\delta(x_k)\Delta x_k$ (massa por unidade de comprimento vezes o comprimento):

$$\Delta m_k \approx \delta(x_k)\Delta x_k \tag{3.58}$$

A partir dessas três observações, obtemos:

$$\overline{x} \approx \frac{momento\, do\, sistema\, (M_0)}{massa\, do\, sistema\, (M)} \approx \frac{\sum x_k \Delta m_k}{\sum \Delta m_k} \approx \frac{\sum x_k \delta(x_k)\Delta x_k}{\sum \delta(x_k)\Delta x_k} \tag{3.59}$$

A soma no último numerador na equação (3.55) é uma soma de Riemann à função contínua $x\delta(x)$ ao longo do intervalo fechado $[a, b]$. A soma no denominador é uma soma de Riemann à função $\delta(x)$ ao longo desse intervalo. Espera-se que as aproximações feitas na equação (3.55) melhorem à medida que a faixa é dividida em intervalos menores e, assim, somos levados à equação

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int_a^b x\delta(x)dx}{\displaystyle\int_a^b \delta(x)dx} \tag{3.60}$$

Essa é a fórmula que usamos para determinar o centro de massa $\overline{x}$.

Exemplo: Mostre que o centro de massa de uma faixa reta e fina ou barra de densidade constante situa-se no meio do caminho entre um extremo e outro.

Solução: Modelaremos a faixa como uma parte do eixo x no intervalo $[a, b]$. Dessa forma, temos que mostrar que $\overline{x} = \frac{a+b}{2}$. De fato,

Como a densidade é constante, vamos considerar a função $\delta(x)$ como uma constante. Daí temos:

$$M_0 = \int_a^b \delta x dx = \delta \int_a^b x dx = \delta \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{\delta}{2}(b^2 - a^2) \tag{3.61}$$

$$M = \int_a^b \delta dx = \delta \int_a^b dx = \delta \left[x\right]_a^b = \delta(b - a) \tag{3.62}$$

$$\overline{x} = \frac{M_0}{M} = \frac{\frac{\delta}{2}(b^2 - a^2)}{\delta(b-a)} = \frac{a+b}{2} \tag{3.63}$$

■

3.5.2 Massas Distribuídas em uma Região Plana

Suponhamos que temos um conjunto finito de massas localizadas no plano, com massa m_k no ponto (x_k, y_k). A massa do sistema é $M = \sum m_k$

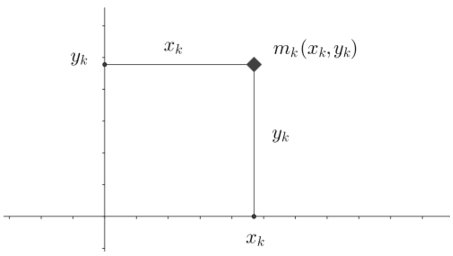


Figura 3.22: Conjunto finito de massas

Cada massa m_k tem um momento em torno de cada eixo. Seu momento em torno do eixo x é $m_k y_k$ e em torno do eixo y é $m_k x_k$. Os momentos do sistema inteiro em torno dos eixos são

$$Momento\,em\,torno\,do\,eixo\,x:\; M_x = \sum m_k y_k \tag{3.64}$$

$$Momento\,em\,torno\,do\,eixo\,y:\; M_y = \sum m_k x_k \tag{3.65}$$

A abscissa do centro de massa é definida como

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \tag{3.66}$$

Com essa escolha de $\overline{x}$, como no caso de uma dimensão, o sistema fica equilibrado em torno da reta $x = \overline{x}$.

Já a ordenada do centro de massa do sistema é definido como

$$\overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k} \tag{3.67}$$

Com essa escolha de $\overline{y}$, o sistema fica equilibrado em torno da reta $y = \overline{y}$ também. Assim, uma vez que o equilíbrio é atingido, o sistema se comporta como se toda a sua massa estivesse no ponto $(\overline{x}, \overline{y})$. Chamamos esse ponto de centro de massa do sistema.

3.5.3 Placas Finas e Planas

Em muitas aplicações, precisamos determinar o centro de massa de uma placa fina e plana: um disco de alumínio ou uma folha triangular de aço. Nesses casos, presumimos que a distribuição de massa seja contínua e as fórmulas que usamos para calcular o centro de massa contanham integrais, em vez de somas finitas. As integrais aumentam da maneira a seguir.

Imagine a placa ocupando uma região no plano xy, cortada em faixas finas paralelas a um dos eixos. O centro de massa de uma faixa típica é $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. Sendo assim, é como se a massa da faixa Δm estivesse concentrada em $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$. O momento de uma faixa em torno do eixo y é então $\widetilde{x}\,\Delta m$ e em torno do eixo x é $\widetilde{y}\,\Delta m$. As equações (3.62) e (3.63) então se tornam

$$\overline{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\sum \widetilde{x}\Delta m}{\sum \Delta m}, \ \ \overline{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\sum \widetilde{y}\Delta m}{\sum \Delta m} \tag{3.68}$$

Como acontece no caso de uma dimensão, as somas são somas de Riemann para integrais e se aproximam dessas integrais como valores-limite, à medida que as faixas em que a placa é cortada tornam-se cada vez mais estreitas. Escrevemos essas integrais simbolicamente como

$$\overline{x} = \frac{\displaystyle\int \widetilde{x}dm}{\displaystyle\int dm} \ \ e \ \ \overline{y} = \frac{\displaystyle\int \widetilde{y}dm}{\displaystyle\int dm}. \tag{3.69}$$

A partir dessas integrais encontramos os centros de massas de figuras planas. A seguir veremos como se procede o experimento com a peça do laboratório e como a mesma é apresentada aos alunos.

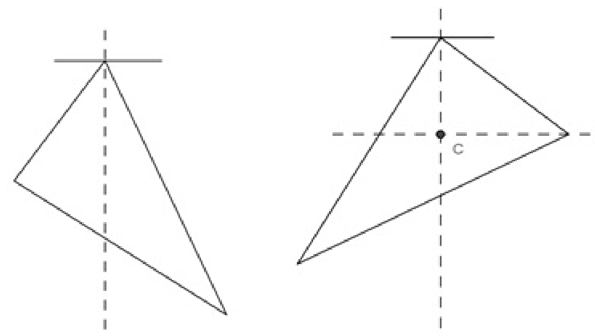
3.5.4 Determinação Experimental do Centro de Massa

Em (3.65) podemos calcular o centro de massa de regiões planas, já com a peça do laboratório encontramos os centro de massa sem precisar utilizar a equação anterior. Para isso temos duas possibilidades:

- Na primeira pendura-se um corpo por um ponto qualquer e traça-se uma linha vertical passando pelo ponto ao qual o corpo está pendurado. Em seguida, repete-se o procedimento tomando-se um outro ponto. A intersecção das duas linhas é o centro de massa.

  A linha vertical se justifica porque o experimento é apoiado na força gravitacional cuja direção é normal à superfície terrestre. Deixando o corpo em repouso, o que se obtém é a linha de atuação da força gravitacional resultante agindo sobre o corpo como um todo. Para determinar o ponto, basta repetir o processo para outro pontoqualquer. Para um corpo tridimensional, o procedimento é o mesmo, mas, agora, para três pontos diferentes situados em dois planos distintos.

  É interessante notar que, embora o experimento utilize a força gravitacional, o que se obtém é, efetivamente, o centro de massa geométrico e, mais ainda, mesmo que



(a) Reta Normal (b) Interseção Reta Normal

Figura 3.23: Interseção da Linha do Experimento

as linhas de atuação sejam obtidas em campos gravitacionais diferentes, o ponto obtido será o mesmo, pois a direção dos campos gravitacionais é sempre normal à superfície do planeta. Deste modo, podemos determinar o centro de gravidade de polígonos quaisquer, utilizando esta propriedade da linha de atuação da gravidade.

- Na segunda possibilidade, a placa fica em equilíbrio sobre uma reta se o centro de massa da placa estiver sobre a reta. Pode-se utilizar um batente de janela ou uma ripa de madeira ou ainda um perfil de metal: a ideia é ter uma "régua"em cima da qual vamos equilibrar a placa (a face na qual a placa se equilibra deve ter não mais que 3 mm). Colocando a placa sobre a régua, o equilíbrio é alcançado quando o centro de massa da placa estiver sobre a reta. Traçamos na placa a reta e repetimos o procedimento buscando outra reta. A intersecção das duas retas novamente é o centro de massa.

3.6 Dados Não Transitivos

Figura 3.24: Jogo Dados Não Transitivos

Você entraria em um jogo onde suas chances de perder são maiores do que de ganhar? E se fosse o contrário?

Vamos imaginar que três pessoas resolvam fazer uma brincadeira com dados normais, o jogo é o mais simples possível. Dois jogadores escolhem um dado cada um e jogam. Quem tem mais chances de ganhar? Vamos chamar os jogadores de A, B e C.

Mas antes de falar sobre essas chances possíveis do jogo, precisamos saber da matemática que o envolve, que é a teoria das probabilidades que é assim definida:

Definição 3.6.1 (Probabilidade) *A Probabilidade de um evento X acontecer é determinado por* $P(X) = \frac{m}{n}$*, onde m é o número de casos favoráveis (o evento ocorreu) e n é o número de casos possíveis (todas as possibilidades).*

Primeiramente o jogador A começa jogando com o B, os resultados possíveis desse jogo encontra-se na tabela a seguir.

A/B	1	2	3	4	5	6
1	E	B	B	B	B	B
2	A	E	B	B	B	B
3	A	A	E	B	B	B
4	A	A	A	E	B	B
5	A	A	A	A	E	B
6	A	A	A	A	A	E

Tabela 3.1: Possibilidades de Resultados

As chances do jogador A ganhar são de $\frac{15}{36}$, as chances do jogador B ganhar são de $\frac{15}{36}$

e a chance de empate para ambos os jogadores são $\frac{6}{36}$.

Como vimos, quando A joga com B, as chances de ganhar são as mesmas para ambos e as chances de acontecer um empate é menor. Quando B joga com C temos a mesma situação: as chances de B são as mesmas de C para ganhar o jogo.

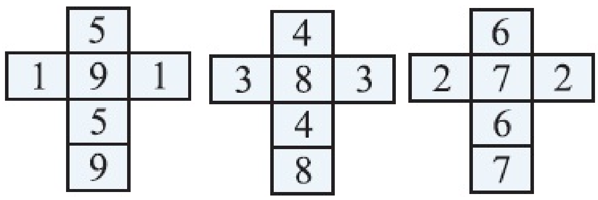
Portanto, podemos afirmar que se A jogar com C as situações anteriores vão se repetir. Falando matematicamente, sendo P(A) a probabilidade de um jogador A ganhar, temos que

$P(A) = P(B)$ e $P(B) = P(c) \Rightarrow P(A) = P(c)$

Essas equações acima simplesmente dizem que eu não preciso fazer A jogar com C para saber que as chances são as mesmas, pelo fato de conhecer a propriedade transitiva.

Ingenuamente podíamos esperar que a propriedade transitiva seja verdadeira sempre que uma ordem esteja envolvida. Mas por quê esperamos transitividade? Pelo fato de que em nossas experiências com números, desde a infância, temos transitividade: $3 > 5$ e $5 > 9$ e isso impica em $3 > 9$

O que queremos mostrar é uma situação onde a transitividade não acontece. Agora vamos considerar três dados, só que dessa vez não convencionais (todos diferentes). Tais dados têm faces opostas iguais e a soma de suas faces é igual a 30.



(a) Jogador A (b) Jogador B (c) Jogador C

Figura 3.25: Planificação dos Dados

Jogando A contra B, A tem mais chances de ganhar que B; em B versus C, B tem mais chances de ganhar. Nesse sentido, A é melhor do que B e B é melhor do que C. A grande surpresa é que quando jogam A e C, é C que tem mais chance de ganhar! Conclusão: A é melhor do que B, B é melhor do que C e C é melhor do que A!

Uma forma interessante de explorar esses dados é desafiar seu oponente e deixar que ele escolha um dado. Em seguida você escolhe o seu dado; sempre há um dado melhor que o escolhido por seu oponente. Aqui também o senso comum falha: ser o segundo a escolher é uma vantagem. Mas lembre-se: a probabilidade está do seu lado, mas não necessariamente os anjos. Ou seja, mesmo escolhendo o melhor dado, você pode perder,

A \ B	3	4	8
1	B	B	B
5	A	A	B
9	A	A	A

A x B
$P(A) = 5/9$
$P(B) = 4/9$

B \ C	2	6	7
3	B	C	C
4	B	C	C
8	B	B	B

B x C
$P(B) = 5/9$
$P(C) = 4/9$

C \ A	1	5	9
2	C	A	A
6	C	C	A
7	C	C	A

C x A
$P(C) = 5/9$
$P(A) = 4/9$

Figura 3.26: Chances de Resultados no Jogo

mas, no longo prazo (várias jogadas), suas chances de ganhar crescem.

Observações:

1. Além dessa faceta não transitiva que desafia nosso senso comum, esses dados têm outra característica, digamos, inesperada. Vamos mudar o jogo: cada jogador toma agora dois dados iguais e joga os dois ao mesmo tempo. O vencedor é aquele que conseguir a maior soma. Por exemplo, suponhamos um jogo com dois dados A contra dois dados B (2A x 2B). O que você acha que vai acontecer? Naturalmente, você raciocina que, como A tem maior probabilidade de vencer do que B, então 2A terá maior probabilidade de vencer do que 2B. Pois é, isso não ocorre! Veja abaixo as possibilidades para o jogo 2A x 2B.

2A \ 2B	3+3=6	3+4=7	3+8=11	4+3=7	4+4=8	4+8=12	8+3=11	8+4=12	8+8=16
1+1=2	B	B	B	B	B	B	B	B	B
1+5=6		B	B	B	B	B	B	B	B
1+9=10	A	A	B	A	A	B	B	B	B
5+1=6		B	B	B	B	B	B	B	B
5+5=10	A	A	B	A	A	B	B	B	B
5+9=14	A	A	A	A	A	A	A	A	B
9+1=10	A	A	B	A	A	B	B	B	B
9+5=14	A	A	A	A	A	A	A	A	B
9+9=18	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Figura 3.27: Chances de Resultados no Jogo

3.7 Amigo Secreto

Figura 3.28: Brincadeira do Amigo Secreto

Quem nunca fez uma brincadeira de amigo secreto?

Para boa parte dos brasileiros fim de ano é sinônimo de confraternização, natal, Réveillon e, claro, amigo secreto (ou amigo oculto, dependendo da sua região). Esta brincadeira é bem simples, cada pessoa escreve seu nome em um pedaço de papel e o deposita em algum recipiente. Após embaralhar todos os pedacinhos de papel, cada pessoa retira (em alguma ordem pré-estabelecida), um destes. A pessoa que retirou o papel, entretanto, não pode contar o nome de quem tirou. Posteriormente, estas pessoas combinam um dia e, nesta data, acontece a troca de presentes entre as pessoas que estão na brincadeira.

Mas a probabilidade de alguma determinada pessoa tirar o seu próprio nome, em um sorteio com n pessoas, é fácil: $\dfrac{1}{n}$.

Problema: E se alguém tira o papel com o seu próprio nome? Então o processo teria que ser feito novamente, até que nenhuma pessoa tire seu próprio nome. Qual a probabilidade de isso acontecer? Esta probabilidade está longe de ser trivial.

Essa brincadeira traz consigo uma intrigante questão que motivou leonhard Euler, no século XVIII, a solucionar esta questão.

Sabemos que o problema equivale a calcular as formas diferentes que n pessoas podem sortear n "papeizinhos"de modo que nenhuma das n pessoas tire um papel contendo o próprio nome.

Este é um conhecido problema de análise combinatória que envolve as permutações caóticas. Uma vez resolvido este problema, podemos calcular quais as chances de um sorteio ser bem sucedido nesta brincadeira.

3.7.1 Número de Permutações Caóticas

Definição 3.7.1 *Uma permutação de* $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$ *é dita caótica quando nenhum desses* $a_\imath$ *está no seu lugar primitivo, com* $1 \leq \imath \leq n$.

Ou seja, quando nenhum dos $a_\imath$ encontra-se na posição original que é na $\imath$-ésima posição. Uma permutação com essa característica é chamada também de desarranjo de $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$.

Seja D_n o número de permutações caóticas dos n primeiros números naturais.

Quando $n = 1$, temos somente um número, logo não existe uma forma de "desarranjá-lo"e, portanto, $D_1 = 0$. Quando $n = 2$, podemos "desarranjar"os números 1 e 2 apenas de uma forma: 21. Assim, $D_2 = 1$. Quando $n = 3$, podemos permutar os números os números 1, 2 e 3 de 6 maneiras: 123, 132, 213, 231, 312, 321, onde 231 e 312 são os únicos "desarranjos". Portanto, $D_3 = 2$. Assim, ccontinuando a análise dos casos particulares, temos que $D_4 = 9$ e $D_5 = 44$, mas, a partir daí, as alternativas tornam-se muito numerosas de tal modo que é preciso deduzir matematicamente uma lei de formação para D_n.

Vamos ver agora o raciocímio que Euler teve para encontrar o valor de D_n. Seja $1, 2, 3, 4, ...$ um arranjo inicial com n números. Rearranjando esses números de modo que nenhuma retorne à sua posição primitiva, existem $n - 1$ opções para o primeiro número, já que não pode ser o 1. Suponha que na primeira posição esteja o número 2. Assim, D_n será dado pelo produto do número de variações dos demais números por $n - 1$ (já que existem $n - 1$ opções para o primeiro número).

Sendo 2 o primeiro número de um "desarranjo", dois casos podem acontecer:

1. O segundo número é o 1. Neste caso precisamos rearranjar os $n-2$ números restantes de modo que nenhum volte à sua posição de origem. Esse caso é o mesmo problema do qual partimos (reduzido de 2 números), havendo portanto D_{n-2} formas de fazê-lo.

2. O segundo número não é obrigatoriamente o 1. O problema agora é rearranjar os $n - 1$ números restantes que ficarão à direta do 2, isso pode ser feito de D_{n-1} maneiras.

Como os rearranjos das duas alternativas acontecem em dois conjuntos disjuntos, temos que quando o 2 é o primeiro número, existem $D_{n-1} + D_{n-2}$ permutações caóticas possíveis, pelo princípio aditivo. Como há $n - 1$ opções ao primeiro número, pelo princípio multiplicativo de contagem, temos:

$$D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2}) \tag{3.70}$$

Dessa maneira, temos uma fórmula de recorrência que soluciona o problema, porém que não fornece D_n como uma função explícita de n.

Fazendo $n = 3$ em (3.70), obtemos:

$$D_3 = 2(D_2 + D_1) \Rightarrow D_3 = 2D_2 + 2D_1 \tag{3.71}$$

Reescrevendo (3.71), temos:

$$D_3 = (-D_2 + 3D_2) + 2D_1 \Rightarrow D_3 - 3D_2 = -D_2 + 2D_1 \Rightarrow D_3 - 3D_2 = -(D_2 - 2D_1)$$

Analogamente, para $n = 4$ e $n = 5$, temos:

$$D_4 - 4D_3 = -(D_3 - 3D_2)$$

$$D_5 - 5D_4 = -(D_4 - 4D_3)$$

Logo, para qualquer inteiro $n, n \geq 3$, temos:

$$\begin{array}{rcl} D_3 - 3D_2 & = & -(D_2 - 2D_1) \\ D_4 - 4D_3 & = & -(D_3 - 3D_2) \\ D_5 - 5D_4 & = & -(D_4 - 4D_3) \\ \vdots & & \vdots \\ D_n - nD_{n-1} & = & -(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2}) \end{array}$$

Multiplicando essa $n-2$ igualdades, temos:

$$(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3)(D_5 - 5D_4)\cdots(D_n - nD_{n-1}) =$$
$$(-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1)(D_3 - 3D_2)(D_4 - 4D_3)\cdots(D_{n-1} - (n-1)D_{n-2})$$

$$\Rightarrow D_n - nD_{n-1} = (-1)^{n-2}(D_2 - 2D_1) \tag{3.72}$$

Como $(-1)^{n-2} = (-1)^n$, $\forall \in \mathbb{Z}$ e $D_2 - 2D_1 = 1 - 2.0 = 1$, assim, substituindo em (3.72:

$$D_n - nD_{n-1} = (-1)^n \Rightarrow D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \forall n \geq 2 \tag{3.73}$$

Note que (3.73) é verdadeira para $n = 2$. De fato, sabemos que $D_2 = 1$. Entretanto, $D_2 = 2D_1 + (-1)^2 = 2.0 + 1 = 1$. Logo, (3.69) é válida para $n = 2$.

Da igualdade (3.73), temos:

$D_3 = 3D_2 - 1$

$D_4 = 4D_3 + 1 = 4(3D_2 - 1) + 1 = 4.3D_2 - 4 + 1 = 4.3 - 4 + 1$

$D_5 = 5D_4 - 1 = 5(4.3 - 4 + 1) - 1 = 5.4.3 - 5.4 + 5 - 1$

Podemos observar que:

$5.4.3 - 5.4 + 5 - 1 = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$.

Daí,

$D_5 = 5!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!}\right)$.

$D_6 = 6D_5 + 1 = 6.(5.4.3 - 5.4 + 5 - 1) + 1 = 6.5.4.3 - 6.5.4 + 6.5 - 6 + 1 = 6!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!}\right)$.

Agora, vamos mostra que:

$$D_n = n!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right), \forall n \geq 2 \tag{3.74}$$

De fato, para $n = 2$, tem-se:

$$D_2 = 2!\left(\frac{1}{2!}\right) = 1, \text{ verdadeira}$$

Suponhamos que (3.74) seja verdadeira para $n - 1$, ou seja

$$D_{n-1} = (n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

Daí, multiplicando ambos os membros da igualdade por n:

$$nD_{n-1} = n(n-1)!\left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!}\right)$$

De (3.73), temos que:

$$nD_{n-1} = D_n - (-1)^n$$

Assim,

$$D_n - (-1)^n = n(n-1)! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right)$$

$$D_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n-1)!} \right) + (-1)^n$$

$$D_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n} \frac{1}{n!} \right),$$

Como queriamos demonstrar.

Lembrando que $D_1 = 0$, temos que o número procurado é:

$$D_n = n! \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n} \frac{1}{n!} \right), \forall n \geq 1 \tag{3.75}$$

3.7.2 Chances do sorteio ser viável no amigo oculto

Já sabemos que o número de permutações caóticas de n elementos, com $n \in \mathbb{Z}_+$, é dado pela equação (3.75). Com isso já podemos resolver o problema proposto inicialmente envolvendo o amigo oculto.

Em outras palavras, o problema equivale a:

"Se um conjunto ordenado com n elementos é permutado aleatoriamente, qual a probabilidade de nenhum deles voltar à sua posição original?"

Assim, o número total de maneiras dos n elementos serem "desarranjados"é D_n e o número total de permutações dos n elementos é $n!$, temos que a probabilidade de ninguém tirar seu próprio nome é dada por:

$$P_n = \frac{D_n}{n!} = \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^{n} \frac{1}{n!} \right) \tag{3.76}$$

■

Logo, a resposta do problema do "amigo oculto"é dada pela equação (3.76).

Podemos perceber que esta probabilidade se estabiliza para aproximadamente 0,37 quando n aumenta. Por exemplo, $P_{12} = 0,36787944$, enquanto $P_{24} = 0,3678794412$, que são valores muito próximos.

n	P_n
1	0
2	0,5
3	0,33333
4	0,37500
5	0,36667
6	0,36806
$\vdots$	$\vdots$
12	0,36787944
$\vdots$	$\vdots$
24	0,3678794412

Como P_n tende a se aproximar do intervalor $[0,36667; 0,36806]$, a aproximação com $0,37$ acontece quando n aumenta. Temos que essa aproximação é o número $\frac{1}{e}$, ou seja, o limite dessa expressão quando $n \to \infty$ é $\frac{1}{e}$. Com efeito, das séries das potências, temos que:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Aplicando o teste da razão, temos:

$\lim_{x\to+\infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}} \right| = \lim_{x\to+\infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} . \frac{n!}{x^n} \right| = \lim_{x\to+\infty} |x| \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$

$$\therefore \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad converge, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Como $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ $converge, \forall x \in \mathbb{R}$, então podemos definir uma função $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ cujo domínio é o intervalo de convergência da série, ou seja, $D_f = \mathbb{R}$.

Assim seja,

$$f(x) = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \tag{3.77}$$

Como a série converge $\forall x$, escolhendo $x = -1$ em (3.35), obtemos:

$\frac{1}{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots = 0,37$

Portanto,

$$P_n = \frac{1}{e}$$

$\blacksquare$

3.8 Sistemas Lineares

Figura 3.29: Peça que envolve o estudo de sistemas lineares

Para entendermos melhor o que será discutido envolvendo esse material, temos como motivação o problema de Arquimedes e a Coroa do rei Hierão II. A história é a seguinte:

Uma das histórias mais famosas sobre o Arquimedes envolve a resolução do problema da determinação da densidade da coroa do rei e a verificação que era uma falsificação. Vamos à história então:

Quando Hierão reinava em Siracusa, decidiu oferecer uma coroa de ouro aos deuses imortais. Contratou um artesão que, mediante uma boa soma em dinheiro e a entrega da quantidade de ouro necessária, se encarregou da sua confecção. O artesão entregou a coroa na data combinada com o Rei. Porém, apesar de considerá-la executada com perfeição, este duvidou que contivesse todo o ouro que tinha entregue e suspeitou que o artesão tivesse substituído uma parte desse ouro por prata.

Para comprovar a sua suspeita, o rei encarregou Arquimedes de, com a sua inteligência, encontrar uma forma de provar a fraude. Um dia em que Arquimedes, preocupado com este assunto, foi tomar banho, percebeu que à medida que entrava na banheira, a água transbordava. Subitamente, esta observação fez-lhe descobrir o que procurava. Ficou tão contente que saiu do banho e correu para a rua a gritar: Eureka! Eureka! (encontrei! encontrei!). Conhecendo a densidade do ouro puro ($19,3\ g/cm^3$), Arquimedes precisava determinar a densidade da coroa e comparar valores.

Com base nesta hipótese explicativa, pegou em duas massas com o mesmo peso que o da coroa, uma de ouro e outra de prata. Mergulhou a massa de prata numa taça cheia de água e mediu a água que transbordou. Retirou então esta massa, voltou a encher a taça, mergulhou a massa de ouro e voltou a medir a água que saiu. Com esta experiência pôde verificar que a massa de ouro não fez transbordar tanta água como a de prata e que a diferença entre as quantidades de águia deslocadas era igual à diferença entre os volumes da massa de ouro e da massa de prata em igual peso.

Finalmente, voltou a encher a taça, mergulhando desta vez a coroa, que transbordou mais água do que a massa de ouro de igual peso, mas menos que a massa de prata. Calculou então, de acordo com estas experiências, em quanto à quantidade de água que a coroa desalojara era maior que aquela que deslocara a massa de ouro. Estava, pois, em condições de saber qual a quantidade de prata que fora misturada ao ouro e mostrar claramente a fraude do artesão.

Mas afinal, o que é densidade? A densidade mede o grau de concentração de massa em um determinado volume, ou seja, mede a resistência de determinado material. Temos que $Densidade = \dfrac{massa}{volume}$ (notação: $d = \frac{m}{v}$).

Alguns exemplos de densidade:

- Água (CNTP) $\approx 1,0\ g/cm^3$
- Gelo $\approx 0,97\ g/cm^3$
- Algodão $\approx 0,1\ g/cm^3$
- Concreto $\approx 2,0\ g/cm^3$
- Aço $\approx 7,87\ g/cm^3$
- Buraco Negro $\approx 4.10^{14}\ g/cm^3$

Na peça temos um problema semelhante ao problema de motivação. Suponhamos que queremos construir alguns pilares de madeira de modo que estes pilares sirvam para sustentar uma construção, para isso precisamos de uma madeira mais resistente, ou seja, uma madeira de maior densidade.

Uma madeireira dispõe de três tipos de madeira como amostra, porém não podemos separá-las e nem descobrir de imediato suas respectivas densidades.

O que pode ser sugerido para descobrir qual dos três tipos de madeira é a mais adequada para serem construídos os pilares da construção? Neste texto, será apresentado um método matemáico para resolver este problema. Mas para isso, vamos supor que já temos conhecimentos prévios sobre sistemas lineares.

Figura 3.30: Modelo do Problema

Sejam d_1, d_2 e d_3 as densidades das madeiras 1, 2 e 3 nesta ordem. Note que $d_1 = \frac{m_1}{V_1}$, $d_2 = \frac{m_2}{V_2}$ e $d_3 = \frac{m_3}{V_3}$, onde V_1, V_2 e V_3 são os volumes conhecidos das madeiras 1,2 e 3 respectivamente. Assim, podemos escrever $m_1 = d_1V_1$, $m_2 = d_2V_2$ e $m_3 = d_3V_3$ e, para o bloco B_1 de massa M_1, escrevemos:

$$m_1 + m_2 = M_1$$

$$d_1V_1 + d_2V_2 + d_3V_3 = M_1 \tag{3.78}$$

Fazendo o mesmo processo para o bloco B_2 de massa M_2 e para o bloco B_3 de massa M_3, obtemos:

$$d_1V_1' + d_2V_2' + d_3V_3' = M_2 \tag{3.79}$$

e

$$d_1V_1^* + d_2V_2^* + d_3V_3^* = M_3 \tag{3.80}$$

onde os volumes de cada bloco são conhecidos. Assim obtemos o sistema:

$$\begin{cases} d_1V_1 + d_2V_2 + d_3V_3 = M_1 \\ d_1V_1' + d_2V_2' + d_3V_3' = M_2 \\ d_1V_1^* + d_2V_2^* + d_3V_3^* = M_3 \end{cases} \tag{3.81}$$

Agora, precisamos de uma balança de precisão para sabermos qual a massa total dos blocos (M_1, M_2 e M_3) e de uma régua para sabermos qual o volume de cada "bloquinho"contido no bloco maior.

Feito isso, podemos substituir os valores no sistema acima, resultando no sistema a seguir:

$$\begin{cases} 160d_1 + 72d_2 + 78,4d_3 = 234,70 \\ 116,1d_1 + 135,52d_2 + 118,09d_3 = 250,90 \\ 137,59d_1 + 74,09d_2 + 88,2d_3 = 238,15 \end{cases} \tag{3.82}$$

A resolução desse sistema implicará na descoberta das densidades das madeiras.

Resolvendo o sistema pelo método de Cramer, encontramos $d_1 = 0,701038657$, $d_2 = 0,556230$ e $d_3 = 2,0737548$. Como d_3 tem uma maior denssidade, a madeira 3 é a mais ideal à construção proposta inicialmente.

3.9 Montanha de Areia

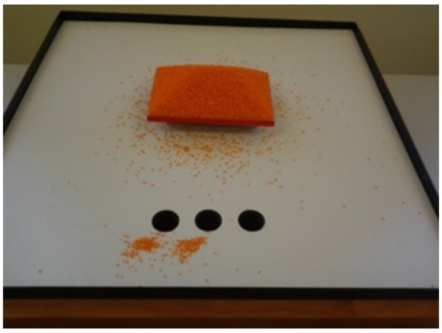


Figura 3.31: Experiência com a montanha de areia

A atividade realizada com esse material é mais de caráter experimental, mas com a tentativa de explicar o que podemos encontrar de geometria neste.

Inicialmente é feita a seguinte pergunta: você já brincou de fazer castelo de areia? Já percebeu que em determinado momento a areia que você joga não fica mais sobre o monte de areia que está construído?

Entende por esse fenômeno de saturação. Esta saturação se dá a partir quando qualquer acréscimo de areia sobre a montanha desliza e escapa do monte. A explicação desse experimento poderia ser enveredar por uma discussão cheia de aspectos sutis. Mas uma ideia física intuitiva é de que a areia se sustenta graças ao atrito estático entre seus grãos, que é consequência de propriedade físicas do material. Isso se traduz num coeficiente de inclinação máxima que a areia suporta sem deslizamento.

Mas o nosso objetivo aqui é falar da geometria envolvida neste experimento. Quando despejamos areia sobre um monte, a tendência é que ela deslize sobre o lado mais inclinado, o que nos leva a crer que o monte se estabilizará quando a inclinação nas duas direções for a mesma. Podemos ainda constatar, por congruência de triângulos, que as inclinações são iguais quando a projeção da altura divide a base em segmentos iguais, ou seja, quando a altura é a mediatriz.

Se olharmos para o retângulo, por exemplo, especificamente para um determinado vértice, veremos qual ponto da espinha é equidistante a duas arestas do polígono, conforme podemos ver na figura abaixo, onde A e B são as arestas equidistantes, ou seja, os comprimentos dos segmentos a e b são iguais.

Assim, os triângulos assinalados na figura 2 são triângulos retângulos com hipotenusa comum e catetos iguais e, portanto são congruentes, donde segue que a reta r é a bissetriz

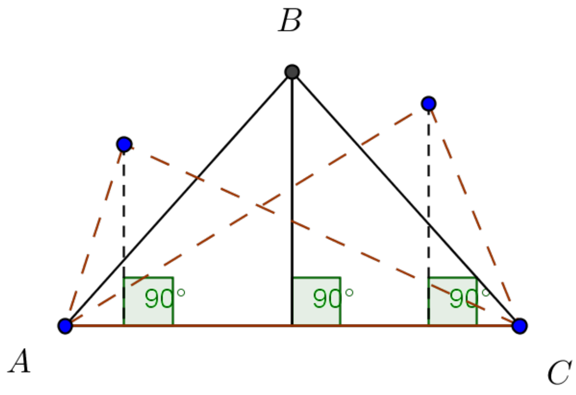


Figura 3.32:

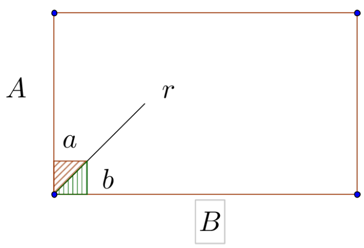


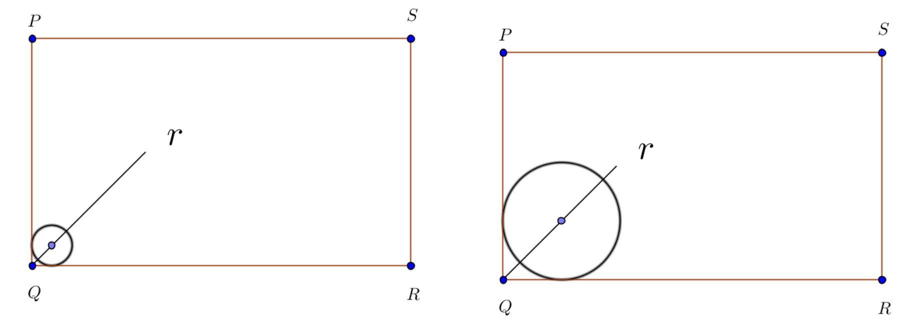
Figura 3.33: Retângulo mostrando a forma da espinha da montanha de areia

do ângulo correspondente ao vértice. Como para cada ponto desta reta temos que a distância aos lados A e B são iguais, podemos dizer que cada ponto é o centro de uma circunferência que tangencia estes dois lados.

O mesmo ocorre nos outros vértices, como abaixo:

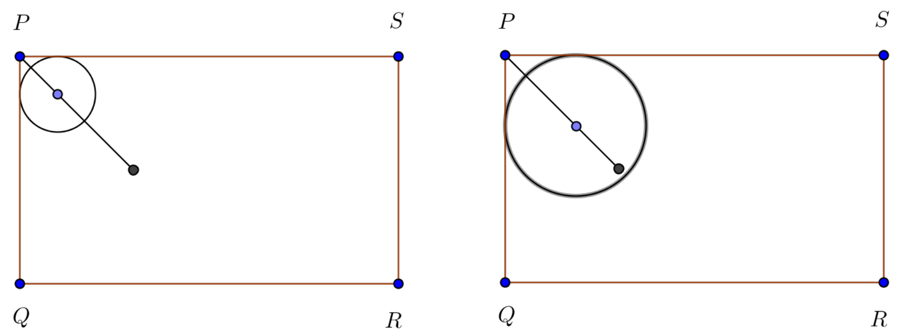
Se partirmos dos vértices P e Q ao longo da espinha do retângulo e cada ponto construirmos a circunferência máxima centrada neste ponto da espinha e contida no polígono, obtemos, a partir de cada um dos vértices, família crescente de círculos, até que seus centros coincidem (no ponto de bifurcação da espinha) e neste caso a circunferência é tangente a 3 lados do polígono.

Se continuarmos ao longo do segmento s da espinha, veremos que esta última contém os centros das circunferências que tangenciam B e C apenas até que atinja um ponto em que tangencia 3 lados novamente, a partir daí temos uma situação análoga a das figuras 5 e 6. Todas as retas consideradas são partes de bissetrizes, inclusive a reta s da figura anterior, ela é a bissetriz definida pelos lados B e C, se assumirmos que a bissetriz entre duas retas é o conjunto de pontos equidistantes das retas. Desta discussão, podemos



(a) (b)

Figura 3.34: Os ponto contidos na espinha são centros de circunferência



(a) (b)

Figura 3.35: Visualização por outro vértice

concluir que *a espinha de um polígono é o lugar geométrico formado pelos centros das circunferências que tangenciam dois ou mais lados do polígono*.

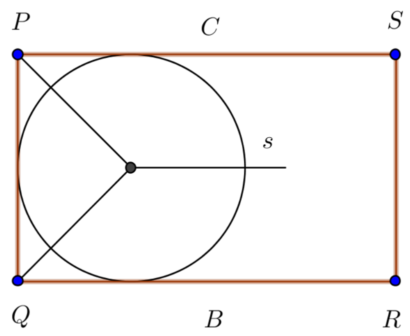


Figura 3.36: A bifurcação é um centro de circunferência

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho foi realizado com muito esforço e trabalho árduo, visto que inicialmente houve a dificuldade em "descobrir"de que maneira falar acerca de cada peça e em encontrar referências específicas. No processo de construção do trabalho, deparei-me com outras áreas de conhecimento como a psicologia e a própria educação matemática.

É importante ressaltar que algumas peças não foram concluídas sabendo que esse processo é de pesquisa contínua, deixando a cargo de outro graduando se aprofundar com relação a esses conhecimentos.

Durante as apresentações do laboratório foram realizadas duas exposições aos alunos do Ensino Fundamental, uma destinada aos de uma escola particular de Belém e uma aos de uma escola na zona rural de Salvaterra (Ilha do Marajó); quatro aos alunos do Ensino Fundamental e Médio, em uma escola particular de Belém; duas aos alunos que estudam no EJA em duas escolas públicas de Belém e três aos alunos de Matemática da UFPA: uma aos estudantes do 5º semestre e duas aos calouros de 2012 que ingressaram no primeiro semestre.

Dos dados obtidos, a partir de relatórios, constatamos que os alunos do ensino fundamental e médio, inicialmente observavam os materiais, porém não os manipulavam, esperando pela autorização do "responsável"(apresentador) para poder atuar e só começaram a manipulá-los quando este convidava. Pôde-se perceber, entretanto, que ao manusearem as peças, eles se implicaram mais no conteúdo ministrado, questionando, indagando e propondo soluções a problemas matemáticos, além de tecerem hipóteses acerca das propriedades de alguns materiais. Entretanto, com os alunos adultos, como os da licenciatura e os do EJA, inicialmente não tinham todo esta curiosidade, ocasionando uma apresentação muito "travada"pela pouca participação deles, constatando-se ser mais difícil a motivação neles.

Ainda a partir dos relatórios, percebeu-se a necessidade de expor aos alunos não apenas um conteúdo de forma mais didática, mas também mostrar-lhes a aplicabilidade, almejando o maior entendimento por parte destes. No decorrer das apresentações foi visto que não houve distinção da maneira em que foram expostos os materiais aos diferentes públicos, ou seja, independente da série a exposição se mantinha fiel a um roteiro de apresentação, não havendo dificuldade de compreensão por parte dos alunos.

Cabe aos professores/educadores possibilitarem um ambiente facilitador que focalize a capacidade do aluno e potencialize seus conhecimentos prévios. Deste modo, o professor pode buscar, por meio dos materiais manipuláveis e jogos, como os utilizados pelo projeto, a aprendizagem dos conceitos apresentados e a aplicabilidade dos mesmos em situações reais.

BIBLIOGRAFIA

[1] BARBOSA, João L. M. Geometria euclidiana plana. 10ª edição. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[2] BIAGGIO, Ângela M. Psicologia do Desenvolvimento. Petrópolis: Vozes, 1985.

[3] DEESE, James; HULSE, Stewart H; tradução de Dante Moreira Leite. A Psicologia da Aprendizagem. São Paulo: Pioneira, 1975.

[4] DO CARMO, Manfredo P. Differential Geometry of Curces and Surpeces. New Jersey: Prentice-Hall, 1976.

[5] EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Campinas: editora unicamp, 2004.

[6] FREIRE, Paulo. Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa. 2ª impressão da 43ª edição. São Paulo: Paz e Terra, 2011.

[7] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um curso de cálculo, volume 1. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

[8] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um curso de cálculo, volume 2. 5ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2008.

[9] HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. Fundamentos da física volume 1 - mecânica. 7ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2009.

[10] JUSTUS, Henrique. Teoria da personalidade, aprendizagem centrada no aluno. 3.ª edição. Porto Alegre: Livraria S. Antônio, 1976.

[11] LORENZATO, Sérgio. O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores. Campinas: Autores Associados, 2006.

[12] MACEDO, Lino de; PETTY, Ana Lúcia S.; PASSOS, Norimar C. Os Jogos e o Lúdico na Aprendizagem Escola. Porto Alegre: Artmed, 2005.

[13] MORGADO, Augusto C. O.; DE CARVALHO, João B. P.; CARVALHO. Paulo C. P. C.; FERNANDEZ, Pedro. Análise combinatória e probabilidade. Rio de Janeiro: SBM, 2006.

[14] O'SHEA, Donal. A Solução de Poincaré. Rio de Janeiro: Record, 2009.

[15] ROGERS, Carl R. Liberdade de aprender em nossa década. Porto Alegre: Artes Médicas, 1972.

[16] STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. Geometria Analítica, São Paulo: Pearson Makro Books, 1987.

[17] TENENBLAT, Keti. Introdução à geometria diferencial. 5ª edição. São Paulo: Blucher, 2008.

[18] THOMAS, George B. Cálculo, volume 1. São Paulo: Pearson Makro Books, 2008.