



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

ANTONIO ELITON DE LIRA DA COSTA

**ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E DIDÁTICA: UM ESTUDO DE EQUAÇÕES DE 2º
GRAU NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

BELÉM
2014

ANTONIO ELITON DE LIRA DA COSTA

**ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E DIDÁTICA: UM ESTUDO DE EQUAÇÕES DE 2º
GRAU NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**

Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) apresentado à Faculdade de Matemática, do Instituto de Ciências Exatas e Naturais da UFPA, Campus Belém, como exigência parcial para obtenção do grau de Licenciado em Matemática, sob a orientação do Prof. Msc. José Augusto Nunes Fernandes.

**BELÉM
2014**

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

ANTONIO ELITON DE LIRA DA COSTA

ORGANIZAÇÃO MATEMÁTICA E DIDÁTICA: UM ESTUDO DE EQUAÇÕES DE 2º GRAU NO 9º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal do Pará pela seguinte banca examinadora:

Banca Examinadora

Orientador: Prof. MsC. José Augusto Nunes Fernandes
Faculdade de Matemática, UFPA

Profª MsC Cristiane Ruiz Gomes
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg Quaresma
Faculdade de Matemática, UFPA

Conceito atribuído: _____

Data: ____/____/____

*Dedico este trabalho aos meus pais,
Antonio Elias da Costa e Francisca
Farias de Lira.*

AGRADECIMENTOS

Aos meus pais, pelo apoio e incentivo durante esses anos, que foram de extrema relevância para a conclusão do Curso. Faltam-me palavras para dizer o quanto vocês são importantes na minha vida. Amo vocês!

À meu amor e futura esposa Valdilene Silva, pelo seu apoio nos momentos difíceis, por seu carinho, amor, dedicados a mim e principalmente pelo seu incentivo na conquista desse objetivo. Meus sinceros agradecimentos.

À minha irmã, Maria Lira que depositou toda sua confiança em mim, acreditando na minha formação, muito obrigada!

Ao meu orientador José Augusto Nunes Fernandes por ter aceitado me orientar. Pela sua dedicação, paciência e compreensão durante a pesquisa, mostrando que além de um excelente professor e orientador, é um amigo. Muito obrigado por sua contribuição nesse trabalho.

À banca examinadora pela contribuição no trabalho, muito obrigado.

Aos meus amigos que conheci durante esses anos de Curso, em especial: Adailson Leitão Corrêa, Carlos Edilon Ferreira da Silva, Filipe Alves Nobre, Gedeão do Nascimento Corpes, e Jocimar Gomes Duarte Júnior, por estarem comigo nos momentos difíceis do curso e por contribuírem na minha formação. A todos vocês muito obrigado. Desejo a todos muito sucesso!

À meu amigo Libni Brito, que esteve presente em grande parte dessa jornada, que muito me ajudou em momentos difíceis.

À todos os professores do Projeto Aluno Vencedor que sacrificaram muitos de seus finais de semana com o objetivo de poder realizar o sonho de muitos estudantes Salinópolis de ingressar em uma Universidade, meus sinceros agradecimentos, em especial ao prof.^o Rocha Netto.

À todos os professores do Curso pela contribuição na minha formação acadêmica.

À todos meus colegas de Curso, meus sinceros agradecimentos.

À toda equipe do Curso de Letras – Modalidade a Distância, em especial: Maria de Fatima do Nascimento, pelo incentivo ao estudo, e por sua compreensão nos momentos difíceis do curso. Marcelly Andrade, faltam-me palavras para descrever essa pessoa, ela foi muito importante durante esses últimos anos de curso, além ser uma excelente secretária, demonstrou ser uma excelente amiga que sempre preocupou-se com seus bolsistas, só tenho a agradecer sua compreensão, sua amizade, muito obrigada! Ana Lygia Cunha, pelo auxílio e compreensão. Malu Barroso, por sua amizade e que me ajudou muito nessa fase final. A todos vocês meus sinceros agradecimentos.

À todos aqueles que contribuíram de maneira direta ou indiretamente na minha formação.

E para finalizar, ao nosso Deus que me abençoou durante esses anos, iluminando meus caminhos, e principalmente dando-me forças para continuar nos momentos de fraqueza.

RESUMO

Esta pesquisa investiga como um professor do 9º ano do ensino fundamental constrói as Organizações Matemáticas e suas correspondentes Organizações Didáticas que são colocadas em jogo em sala de aula, especificamente as que se referem ao nosso objeto de estudo, as Equações de 2º grau. A pesquisa fundamentou-se na Teoria da Transposição Didática, de Yves Chevallard (1997), que analisa a trajetória do saber desde sua produção científica até sua inserção na sala de aula e na Teoria Antropológica do Didático, de Yves Chevallard (1999), cujos pilares foram as noções de Organização Matemática e Didática. Para isso, utilizou-se a abordagem qualitativa, que envolveu um professor e seus respectivos alunos de uma turma do 9º ano do ensino fundamental, de uma escola da rede pública de ensino do Estado do Pará. A pesquisa consistiu em três etapas: na primeira foi feita a construção e fundamentação teórica, na segunda ocorreu a intervenção na sala de aula, com a utilização de duas ferramentas para a coleta de dados, o uso da gravação de voz e o uso de relatórios das aulas e a terceira foi dedicada à análise dos dados. Na análise dos dados também utilizamos o livro didático adotado pela escola, com o intuito de mostrar como este aborda as Organizações Matemáticas e Didáticas, para compararmos com as do professor.

Palavras-chave: Transposição Didática. Organização Matemática e Organização Didática. Equações de 2º grau.

ABSTRACT

This research investigates how a teacher of the 9th year of Brazilian elementary education, builds the mathematical organizations and their corresponding didactics organizations that are put into play in the classroom, specifically those relating to our case study, the equations of second degree. The research based was on the Theory of Didactic Transposition, Yves Chevallard (1997), which analyzes the trajectory of knowledge from their scientific production to its insertion in the classroom and in Anthropological Theory of the Didactic, Yves Chevallard (1999), whose pillars were the notions of mathematics and didactics organization. For this, we used a qualitative approach, which involved a teacher and their students in a class of the 9th year of Brazilian elementary education, a public school in the State of Pará education. The research consisted of three steps: first, we described the construction and theoretical foundation, the second was the intervention in the classroom, with the use of two tools for data collection, use of voice recording and usage reports classes and the third was devoted to data analysis. In the data analysis also used the textbook adopted by the school, in order to show how this addresses the Mathematics Organizations and Didactics, to compare with of the teacher.

Keywords: Didactic Transposition. Organization Mathematics and Organization Didactics. Equations of second degree.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Esboço da Transposição Didática.....	19
Figura 2: Esquema dos dois estágios da transposição didática interna.....	20
Figura 3: Triângulo das Situações Didáticas.....	22
Figura 4: Institucionalização com o grau de definição de equação.....	36
Figura 5: Primeiro encontro com a tarefa t_1	38
Figura 6: Primeiro encontro com a tarefa t_2	40
Figura 7: Momento do trabalho com a técnica τ_1	41
Figura 8: Demonstração da fórmula do produto de raízes.....	47

LISTA DE QUADROS

Quadro 1: Momento da institucionalização com a forma geral de uma equação do 2º grau.....	41
Quadro 2: Quadro 2: relato da aula sobre equação do 2º grau completa.....	42
Quadro 3: Momento do trabalho com a técnica τ_4	42-43
Quadro 4: Relato da aula sobre relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau.....	45
Quadro 5: Relato sobre a demonstração da relação da soma de raízes.....	46
Quadro 6: Relato da aula sobre composição de equações do 2º grau a partir de suas raízes.....	47-48
Quadro 7: Relação dos tipos de tarefas usadas pelo professor.....	49
Quadro 8: Relação dos tipos de técnicas usadas pelo professor.....	50
Quadro 9: Bloco teórico e tecnológico relativo as técnicas utilizadas pelo professor	50

LISTA DE SIGLAS

TAD	Teoria Antropológica do Didático
TD	Transposição Didática
TDI	Transposição Didática Interna
TDE	Transposição Didática Externa
TSD	Teoria das Situações Didáticas
OD	Organização Didática
OM	Organização Matemática

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	12
1. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA	15
1.1 TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA.....	19
2. NOÇÃO DE SITUAÇÃO DIDÁTICA	22
2.1 NOÇÃO DE CONTRATO DIDÁTICO.....	24
2.2 RUPTURA DO CONTRATO DIDÁTICO.....	26
2.3 EFEITOS DIDÁTICOS.....	27
2.3.1 Efeito Topázio.....	28
2.3.2 Efeito Jourdain	29
2.3.3 Efeito da Analogia.....	29
2.3.4 Deslize Metacognitivo.....	30
2.3.5 Efeito Dienes	30
3. MOMENTOS DIDÁTICOS	31
4. OBTENÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS	35
4.1 OBTENÇÃO DOS DADOS.....	35
4.2 ANÁLISE DOS DADOS.....	35
CONSIDERAÇÕES FINAIS	51
REFERÊNCIAS	53

INTRODUÇÃO

A sala de aula tem sido cada vez mais um campo de pesquisa que desperta interesse em diversos pesquisadores, como as questões do processo de ensino e aprendizagem de matemática, por exemplo. As relações que se estabelecem nesse contexto, podem ser analisadas sob vários aspectos e com aportes teóricos diferentes. Em tal contexto, o professor ainda é visto como o personagem principal do *sistema didático*¹, uma vez que é ele quem organiza as aulas, as atividades que serão trabalhadas na sala de aula, assim promovendo situações de ensino que são favoráveis ao aprendizado dos alunos. Então, fizemos a opção pela Didática da Matemática de influência francesa, que nos auxiliará a identificar os fenômenos didáticos que emergem na relação didática.

A Didática da Matemática, como um campo de investigação no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos matemáticos, surgiu na França a partir da década de 1960, buscando, de uma forma ampla, compreender o *sistema didático*. Em 1969 foram fundados na França os Institutos de Pesquisa no Ensino de Matemática (IREM), como centros de ensino superior e pesquisa, congregando professores de Matemática de todos os níveis de ensino, dedicando-se, principalmente em auxiliar na formação destes professores, tanto aqueles que se encontram em atividade, quanto os em preparação.

Em nossa pesquisa abordaremos as seguintes teorias da Didática da Matemática: Transposição Didática e Antropológica do Didático, especificamente as noções de Organização Matemática e Didática, ambas de Yves Chevallard² e a Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau³, ressaltando aspectos do Contrato Didático.

¹O Sistema Didático comporta três elementos que se configuram como partes constitutivas de uma relação dinâmica e complexa. Dois elementos 'humanos' da relação: o professor e o aluno; e um elemento que não é 'não humano', o saber (BRITO MENEZES, 2011, p. 29).

²Yves Chevallard é professor no IUFM d' Aix-Marseille. Publicou resultados de vários estudos sobre os fenômenos de ensino-aprendizagem da matemática e é particularmente conhecido por seu trabalho sobre a noção de Transposição Didática e a abordagem Antropológica do Didático (ALMOULOU, 2007, p. 18)

³Guy Brousseau, um dos pioneiros da Didática da Matemática, foi professor no IUFM (Instituto Universitário de Formação de Professores) de Aquitaine e Diretor do Laboratório Aquitaine de didática das ciências e técnicas da Universidade de Bordeaux I, situados na França. Ele ganhou A 'Felix Klein Medal' da Educação Matemática em 2003, da Comissão Internacional de Instrução Matemática (ICMI), em reconhecimento a contribuição que tem tido sobre o desenvolvimento da educação matemática como um campo de investigação científica, no campo teórico, implementando esta

A Matemática, como disciplina escolar, é vista por uma grande parte de alunos como aquela que causa temores, e em consequência aparecem os altos níveis de repetência, evasão, baixos índices de aproveitamento, fazendo com que ela se torne uma barreira para muitos alunos, resultando muitas vezes na interrupção da vida escolar. Nesse contexto, existem alguns fenômenos didáticos que se fazem presente na sala de aula, cuja investigação é fundamental para a análise que envolve a tríade professor, aluno e o saber a ensinar. Sendo a Transposição Didática Interna (TDI) e o Contrato Didático os fenômenos mais investigados nesse ambiente (BRITO MENEZES, 2006).

Diante desse contexto, na tentativa de melhor compreendermos o processo da TDI, realizamos essa pesquisa com o objetivo de investigar como o professor constrói as Organizações Matemáticas (OMs) e suas apropriadas Organizações Didáticas (ODs) que são colocadas em jogo em sala de aula, especificamente as que dizem respeito ao nosso objeto de estudo, Equações de 2º Grau, e para isso, fez-se o uso da Teoria Antropológica do Didático (TAD)⁴, que nos deu suporte para fazer a investigação da praxeologia do professor.

Um conteúdo a ser ensinado por um professor, em uma dada instituição de ensino, passa primeiramente por processos de transformações e adaptações, para tornar-se apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino. Esse conjunto de transformações e adaptações nas quais passam um saber sábio para tornar-se um saber ensinado é conhecido como Transposição Didática (TD)⁵ (CHEVALLARD, 1997). Ainda segundo esse autor, o processo de transposição do saber sábio para o saber ensinado, ocorre em duas etapas, uma externa ao sistema de ensino e a outra interna, que foi denominada de Transposição Didática Interna (TDI).

O caso de estudo apresentado aqui trata-se do processo de TDI, fenômeno este que está inserido na esfera do sistema didático, envolvendo as relações entre aluno, professor e o saber a ensinar (saber escolar). Nessa etapa é revelado o papel

investigação a estudantes e professores. Sua tese de doutorado trata dos fundamentos da didática (Teoria das Situações Didáticas, Contrato Didático e Noção de Obstáculos).

⁴A Teoria Antropológica do Didático (TAD), segundo Chevallard, estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações matemáticas. Uma razão para a utilização do termo “antropológico” é que a TAD situa a atividade matemática e, em consequência, o estudo da matemática dentro do conjunto de atividades e de instituições sociais. (ALMOULOU, 2007, p. 111)

⁵Definiremos a TD com mais detalhes no capítulo I, e suas etapas do processo de transposição.

da relação pessoal do professor com o objeto matemático em estudo, e ele tem a finalidade de dar continuidade ao fenômeno na sala de aula.

A pesquisa foi desenvolvida na cidade de Belém, no Estado do Pará, em uma escola da rede pública de ensino, turma do 9º ano do Ensino Fundamental II, constando em três etapas: na primeira etapa recorreremos a literatura acadêmica para a construção e fundamentação teórica, enquanto que na segunda, ocorreu a intervenção em sala de aula, com a utilização de duas ferramentas: a gravação em áudio e relatórios das aulas, e na terceira a análise dos dados colhidos.

Nossa pesquisa apresenta-se como de natureza qualitativa⁶, uma vez que os dados são construídos indutivamente, ou seja, não estão prontos para serem coletados.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos. No primeiro, apresentamos a Transposição Didática (TD), dando ênfase à Transposição Didática Interna (TDI), uma vez que a pesquisa trata-se do processo da TDI. O segundo aborda a Teoria das Situações Didáticas, ressaltando um de seus principais elementos, o Contrato Didático, que diz respeito às cláusulas, em sua maioria postada de maneira implícita e em minoria explicitadas, que regulam a divisão de responsabilidades entre o professor e aluno, na gestão de um saber. O terceiro relata sobre os *momentos didáticos*, ou *momentos de estudos*, assim denominado por Chevallard (1999), e o quarto e último capítulo descreve a abordagem metodológica da pesquisa. Como fecho do estudo apresentamos as considerações finais.

⁶A pesquisa qualitativa em educação tem o ambiente natural como sua fonte direta de dados e o pesquisador como seu principal instrumento. Os dados coletados são predominantemente descritivos. A preocupação com o processo é muito maior do que com o produto. O "significado" que as pessoas dão às coisas e à sua vida são focos de atenção especial pelo pesquisador. A análise dos dados tende a seguir um processo indutivo. (Lüdke e André 1986 apud SILVA, 2013, p. 81-82)

1. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA

Todo projeto social de ensino e de aprendizagem se constitui dialeticamente com a identificação e a designação dos conteúdos de saberes como conteúdo a ensinar. (CHEVALLARD, 1997, p. 45)

O termo Transposição Didática (TD) foi empregado inicialmente pelo sociólogo francês Michel Verret na sua tese de doutorado *Le temps de études*, em 1975, e enfatizado por Yves Chevallard através de notas de um curso de verão ministrado em 1980. Yves Chevallard é um didata francês do campo da Didática da Matemática e docente no *Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l'Académie d'Aix-Marseille*. Para Chevallard (1997), Transposição Didática (TD), em um sentido resumido, pode ser entendida como a passagem do saber sábio ao saber ensinado. A partir de então, apresenta-se como definição mais usada por estudiosos acerca da Transposição didática, a descrita por Chevallard:

Um conteúdo do saber que tem sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto para ocupar um lugar entre os objetos de ensino. O trabalho que transforma um objeto de saber a ensinar num objeto de ensino, é denominado transposição didática⁷. (CHEVALLARD, 1997, p.45, tradução nossa)

Um exemplo de Transposição Didática descrito por Chevallard (1997), é o conceito de distância. Desde o período do matemático Euclides a noção de distância entre dois pontos foi estudada de maneira instintiva. No entanto, só em 1906, tal noção foi generalizada pelo matemático francês Maurice Fréchet, com o intuito de trabalhar com os espaços de funções. Após sofrer várias modificações, em 1971, foi incorporado ao sistema de ensino francês. Para Pais,

Quando a evolução das ideias é analisada em relação a um determinado conceito, como no caso da noção de distância, trata-se de uma transposição didática stricto sensu. Por outro lado, se a análise é desenvolvida no contexto mais amplo, não se atendo a uma noção particular, trata-se de uma transposição didática lato sensu. (PAIS, 2011, p. 20).

⁷ Traduzido do espanhol: Un contenido de saber que ha sido designado como saber a enseñar, sufre a partir de entonces un conjunto de transformaciones adaptativas que van a hacerlo apto para ocupar un lugar entre los objetos de enseñanza. El "trabajo" que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica.

No processo de TD, são identificados pelo menos três níveis de saber: o saber sábio, o saber a ensinar e o saber ensinado. O saber sábio está presente em publicações científicas que são associados à produção acadêmica. Para PAIS (2011, p. 21) “trata-se de um saber criado nas Universidades e nos Institutos de pesquisas, mas que não está necessariamente vinculado ao ensino básico”. É um saber que apresenta uma linguagem codificada para textos e relatórios técnicos, enquanto que o saber a ser ensinado, não deve ser exposto dessa forma.

Ao passo que, o saber a ensinar, também conhecido como saber escolar, é aquele instituído pelos instrumentos normatizadores (Parâmetros e Diretrizes Curriculares, Projetos Pedagógicos, Planos de Curso), além dos livros didáticos e planejamentos de ensino. Para Pais,

O saber escolar representa o conjunto dos conteúdos previstos na estrutura curricular das várias disciplinas escolares valorizadas no contexto da história da educação. Por exemplo, no ensino da matemática, uma parte dos conteúdos tem suas raízes na matemática grega, de onde provém boa parte de sua caracterização. (PAIS, 2011, p.22).

O saber ensinado é aquele produzido pelo professor na sala de aula, a partir de sua prática pedagógica. Ressalta-se que o saber a ensinar é aquele presente nos livros didáticos e em outros materiais didáticos utilizados pelo professor com o intuito de produzir na sala de aula um saber ensinado. PAIS (2011, p. 22) cita que “não há garantia de que, no plano individual, o conteúdo aprendido pelo aluno corresponda exatamente ao conteúdo ensinado pelo professor”. Muitas vezes, em casos extremos, permanecem apenas vestígios da intenção objetivada pelo professor. Há uma preocupação para que esses saberes não percam a essência, ou seja, não se distancie de sua origem conceitual, aparecendo o que Chevallard denomina de *vigilância epistemológica*⁸. Como é explicitado por Brito Menezes,

[...] é necessário que se realize uma vigilância epistemológica, para que tal distância, tais deformações e adaptações não culminem por ‘desfigurar’ de maneira tal o saber original, que o saber a ensinar deixe de ser fiel a ele, podendo criar certos obstáculos à aprendizagem. (BRITO MENEZES, 2006, p.80).

⁸ Epistemologia pode ser definida, artificialmente, como o estudo da evolução das ideias essenciais de uma determinada ciência, considerando os grandes problemas concernentes à metodologia, aos valores e ao objeto desse saber, sem vincular necessariamente ao contexto histórico desse desenvolvimento (PAIS, 2011, p.33).

O saber produzido na comunidade científica (saber sábio) sofre transformações a ponto de ser passível de ser ensinado, passando pelo saber a ensinar que é 'didatizado' pelos professores até tornar-se um saber ensinado, que é aquele que está presente na sala de aula. Na passagem do saber científico ao saber a ensinar, ocorre a Transposição Didática Externa (TDE). Tal etapa foi nomeada por Chevallard (1997) de noosfera, o espaço onde se pensa o funcionamento didático, tendo pouca interferência do professor e esse espaço é constituído por professores, alunos, pais dos alunos, especialistas, enfim todos aqueles que estão envolvidos no processo educativo. No que diz respeito a noosfera, Brito Menezes avança,

O longo processo de transformação dos saberes científicos em saberes a ensinar é realizado numa instituição 'escondida', 'não-visível', segundo Chevallard (1991), intitulada de NOOSFERA, que envolve a comunidade responsável por estabelecer o que deve ser ensinado na escola (BRITO MENEZES, 2006, p.75).

A noosfera determina o que ensinar a partir dos programas, livros didáticos e propostas curriculares. Mas apesar da preexistência de tais fontes, alguns conteúdos são criados e incorporados aos programas para facilitarem a aprendizagem. Tais criações são chamadas de criações didáticas, como é explicitado por Pais,

A princípio, tais criações tem uma finalidade eminentemente didática, entretanto, o problema surge quando sua utilização acontece de forma desvinculada de sua finalidade principal. Este é o caso dos produtos notáveis que, quando ensinados sem um contexto significativo, passam a figurar apenas como o objeto de ensino em si mesmo. Para estar atento a essas distorções, se faz necessário cultivar um permanente espírito de vigilância que deve prevalecer ao longo de toda a análise da transposição didática, pois é o conjunto das criações didáticas que evidencia a diferença entre o saber científico e o saber ensinado. (PAIS, 2011, p. 20)

O saber científico passa por transformações desde sua produção acadêmica até a escola e ao aluno. A partir do momento em que o saber se transforma em texto científico e torna-se público, ele passa por processos de despersonalização, descontextualização e desincretização. A despersonalização torna o saber impessoal, anônimo, os problemas, os erros cometidos, enfim, os acidentes de percursos são ocultos quando o saber produzido é descrito para a comunidade científica. A descontextualização ocorre a partir do momento em que o saber isola-

se de seu contexto histórico de origem, e então, desincretiza-se o saber sendo publicado em partes isoladas, tido como independente, autossuficiente.

Quando o saber ensinado afasta-se do saber sábio, ele sofre um envelhecimento biológico e quando ele fica muito próximo do que os pais dos alunos já sabem, ocorre um envelhecimento moral, e esses fatores resultam em uma incompatibilidade do sistema de ensino com o ambiente, é o que Chevallard denomina de obsolescência didática. Para que não exista tal incompatibilidade, o saber ensinado tem que estar muito próximo do saber sábio e também que esteja afastado do saber dos pais. Agranionih avança,

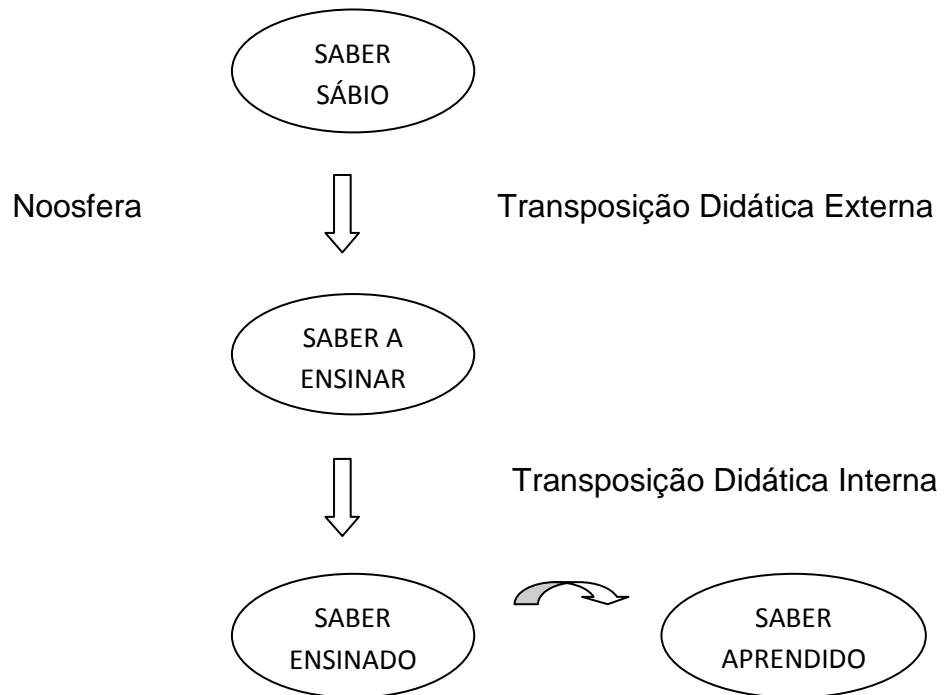
Quando os saberes escolares ficam ultrapassados em relação ao saber sábio ou muito próximos daquilo que os pais já sabem, o papel da escola passa a ser questionado, uma vez que os objetos de ensino encontra-se distantes das descobertas da academia ou não atendem às necessidades da sociedade. Segundo Chevallard, a origem da transposição didática está nessa crise. A noosfera age no sentido de buscar alternativas para superá-la. É assim que novas propostas curriculares surgem e conteúdos de ensinos são excluídos ou incorporados aos programas. (AGRANIONI, 2001, p. 7)

Como explicitado na citação, a noosfera age no sentido de solucionar as crises que foram provocadas pelo desgaste biológico ou moral dos saberes a ensinar. Por outro lado, a noosfera provoca crises no ambiente de ensino ao entregar propostas prontas que foram 'construídas' fora do ambiente escolar, mas tais crises são benéficas e produtivas ao próprio sistema de ensino, uma vez que, ao surgirem tais crises estas geram conflitos, negociações, enfim, podendo resultar em acordos que se aproximem das necessidades e expectativas do ambiente social (AGRANIONI, 2001).

E em relação ao processo que visa à passagem do saber a ensinar para o saber ensinado e definitivamente para o saber aprendido, ocorre a Transposição Didática Interna (TDI), que se situa na sala de aula, onde a participação do professor é de suma importância, momento no qual os professores e alunos discutem os papéis que cada um assumirá, tal processo é conhecido como Contrato Didático, sendo um contrato explícito ou não.

Bessa, 2004 (apud BARBOSA, 2006, p. 35) menciona que, no saber ensinado, o saber apreendido estaria a cargo dos alunos, como mostra o esboço do processo de Transposição Didática abaixo:

Figura 1: Adaptação do esquema apresentado por Barbosa (2006)



Fonte: BARBOSA (2006)

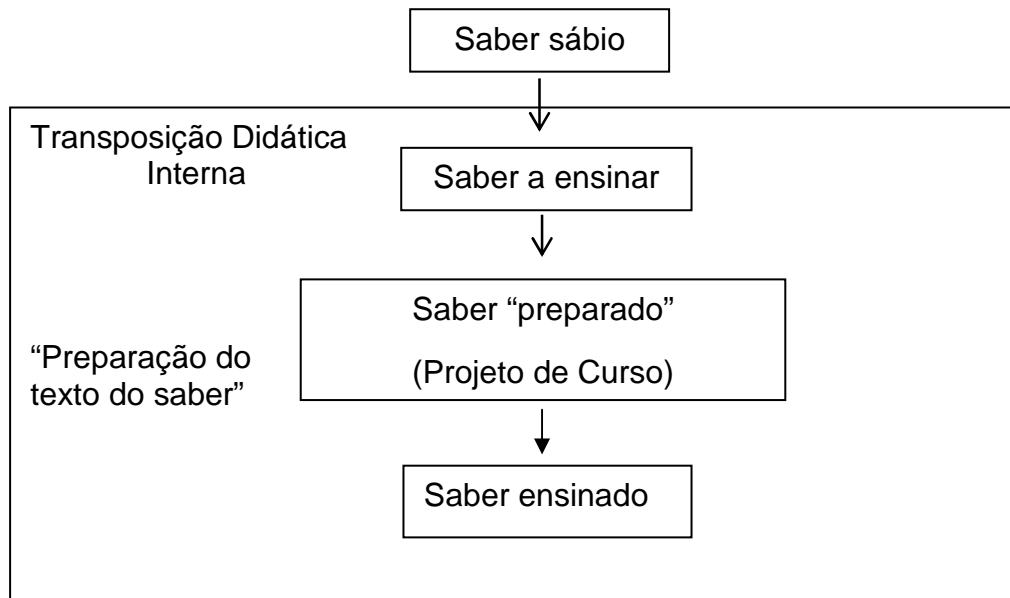
1.1. TRANSPOSIÇÃO DIDÁTICA INTERNA

Nessa etapa o professor tem a responsabilidade de transformar o saber a ser ensinado em saber ensinado, e para isso ele cria um texto didático usando seus conhecimentos particulares e subjetivos. Brito Menezes (2006, p.85) acrescenta, “o que o professor faz na sala de aula não é traduzir fielmente o texto do livro didático para os alunos, mas, sim transformá-lo, ‘reescrevê-lo’, criando, conforme admite Chevallard (1991), um metatexto”. E lembrando que é no nível de saber a ser ensinado que ocorre a seleção de saberes, processo em que é definido pela noosfera quais os conteúdos a serem trabalhados obedecendo aos níveis de ensino, e também os livros que serão utilizados durante o período letivo.

Por outro lado, segundo Chevallard, 2009 (apud, SILVA, 2013) a etapa da Transposição Didática Interna subdivide-se em dois momentos: sendo o primeiro caracterizado pela preparação do texto do saber (projeto de curso) para ensinar o que deve ser ensinado, e o segundo, por colocar as praxeologias desse “texto do saber” em jogo na sala de aula. Em Ravel (2003) (apud SILVA, 2013, p. 72)

podemos expor uma esquematização desses momentos da TDI, como mostra a figura abaixo.

Figura 2: Esquema dos dois estágios da transposição didática interna



Fonte: SILVA (2013)

No que diz respeito a TDI, Bessa Menezes acrescenta,

Começamos a entender a Transposição Didática Interna devido à identificação do professor como um ser, sujeito não só às condições institucionais, mas, também à sua própria subjetividade. Porém, ele não é o único elemento humano e sujeito às suas subjetividades dentro do sistema didático, temos também, o aluno. O sistema didático é caracterizado pela relação ternária que envolve dois polos humanos – o professor e o aluno – e não humano: o saber. (BESSA MENEZES, 2006, p.3)

Quando nos referimos a TDI, não devemos esquecer-nos da instituição⁹ que é o livro didático, sendo este o fruto da tentativa de colocar em um texto do saber os conteúdos escolares contidos nos referenciais que são o produto final do trabalho da noosfera. Segundo PAIS (2011, p. 19) “o trabalho seletivo resulta não só na escolha de conteúdos, como também na definição de valores, objetivos e métodos, que conduzem o sistema de ensino”.

⁹ Para Chevallard, uma instituição pode ser um órgão governamental, uma escola, uma classe, um curso, a família, a sociedade ou os programas de ensino.

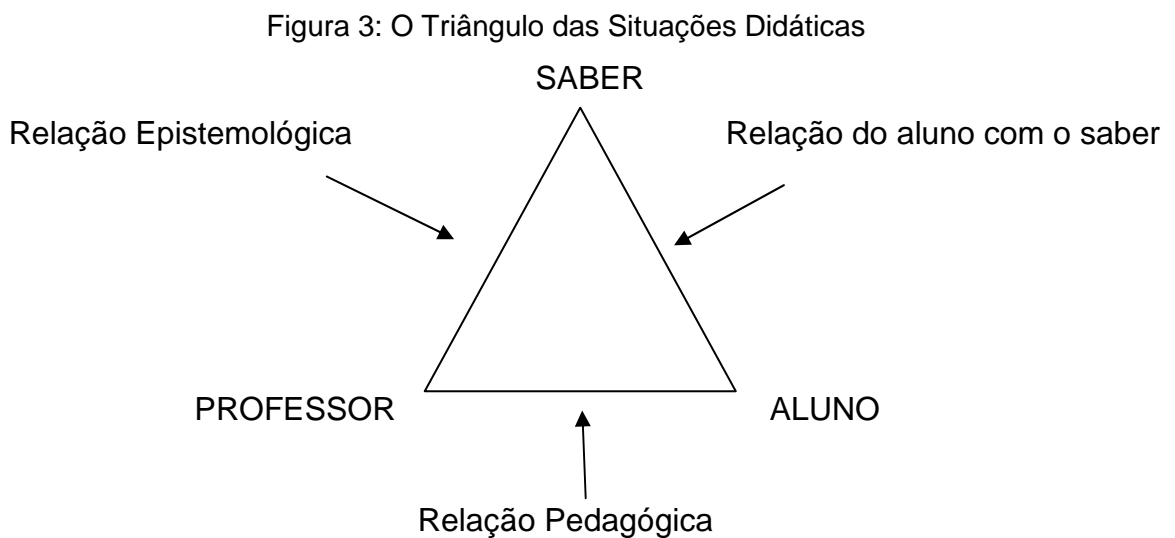
A Transposição Didática Interna (TDI) se faz presente na sala de aula, mas isso não significa que ela dependa unicamente do professor, esta envolve questões amplas que exigem certo grau de complexidade consideráveis a tal etapa. Na sala de aula, por exemplo, para PAIS (2011), ocorre uma inversão do saber escolar em relação ao científico. Enquanto o matemático procura níveis mais amplos de abstração e generalidade, o professor de matemática faz o inverso, recontextualiza o conteúdo com o intuito de poder relacionar a situações que sejam mais compreensíveis para o aluno.

Para melhor compreendermos as relações que se estabelecem na sala de aula entre professor, aluno e o saber a ensinar, tomaremos a Teoria das Situações Didáticas como aporte teórico. Como veremos no capítulo a seguir.

2. NOÇÃO DE SITUAÇÃO DIDÁTICA

A teoria das situações didáticas de Guy Brousseau pretende dar forma e contrastar, empiricamente, os fenômenos didáticos que surgem no âmbito de um sistema didático a partir da problematização e do questionamento de um “conhecimento matemático ensinado”. [...] (Chevallard, Bosch & Gascón, 2001, p. 213)

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) foi desenvolvida por Brousseau, visando o processo de ensino e aprendizagem da matemática na sala de aula e as relações que envolvem a tríade professor-aluno-saber. A essa relação triangular formada pelo professor, o aluno e o saber que se espera que seja ensinado e aprendido, Brousseau (apud Brito Menezes, 2011) denominou de triângulo das situações didáticas. Tal triângulo pode ser representado da seguinte forma:



Fonte: Brito Menezes (2006)

Para Almouloud, a Teoria das Situações Didáticas (TSD) tem como objetivo,

caracterizar um processo de aprendizagem por uma série de situações reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos dos alunos. Essa modificação é característica da aquisição de um determinado conjunto de comportamentos, da ocorrência de uma aprendizagem significativa. (ALMOULOUD, 2007, p. 31-32)

Nesse sentido é necessário que se considere um ensino de matemática mais significativo, que satisfaça a relação triangular aqui exposta, dando aos alunos um papel ativo na busca do conhecimento matemático, e, para isso, o professor deve criar situações de ensino que sejam significativas para o aluno. Caso isso não ocorra poderá perde-se a dimensão dos valores educativos do conteúdo em questão, necessita-se que ele seja abordado dentro de um contexto próximo da realidade do aluno, caso contrário, torna-se uma tarefa que dificilmente alcançará as transformações formativas do saber científico (PAIS, 2011).

Mas afinal o que é uma situação didática? Para Brousseau, 1978 (apud Almouloud, 2007, p. 33), ela é definida como

O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu¹⁰ (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

Esse conjunto de relações estabelecidas por meio de negociações entre alunos e professor explicitados na citação, resulta no que se conhece como *contrato didático*, um dos elementos mais importantes na TSD, cuja noção veremos mais adiante.

Além de situações didáticas temos as que denominam-se de adidáticas que se caracterizam pela existência de aspectos relacionados ao processo de aprendizagem que não têm uma intenção pedagógica direta ou um controle pedagógico do professor (PAIS, 2011). Ainda segundo este autor, o espaço e o tempo estipulado para cada aula representam uma parcela dos possíveis momentos de aprendizagem. A partir daí somos levados a ver que a educação escolar não se restringe apenas às situações em que o professor pode controlar.

Para Brousseau, 1986 (apud PAIS, 2011, p. 68) uma situação adidática pode ocorrer

Quando o aluno torna-se capaz de colocar em funcionamento e utilizar por ele mesmo o conhecimento que ele está construindo, em situação não prevista de qualquer contexto de ensino e também na ausência de qualquer professor, está ocorrendo então o que se pode ser chamado de situação adidática.

¹⁰ O termo milieu ou milieux são termos francês, e sua tradução para português significa “meio”. Na teoria das situações didáticas é um sistema autônomo, antagônico ao sujeito.

Apesar de ocorrer tais impossibilidades do controle pedagógico, a situação adidática é de suma importância à aprendizagem. Nos momentos em que o aluno está procurando solução para um problema que lhe fora proposto, ocorrem diversas formas de raciocínio por parte dele, em que o professor comumente não tem o controle. Então, assumindo a importância de tal situação, a Didática da Matemática reforça as condições de trabalhar com situações-problema que são ricas em situações adidáticas.

A seguir, abordaremos a noção de Contrato Didático, um dos importantes elementos da TSD, que desempenha um papel central na construção e análise de situações para ensino e aprendizagem de Matemática.

2.1 NOÇÃO DE CONTRATO DIDÁTICO

A noção de Contrato Didático foi estudada e teorizada, inicialmente, por Guy Brousseau e retomada por vários pesquisadores como ALMOULOU (2007), BRITO MENEZES (2006), PAIS (2011) dentre outros, que perceberam e compreenderam a sua importância. Não se tem uma única definição para contrato didático, sua construção vem sendo desenvolvida gradativamente. Para PAIS (2011) a noção de contrato didático proposta por Brousseau, foi influenciada pela noção de Contrato Social de Jean-Jacques Rousseau e pelo conceito de Contrato Pedagógico analisado por Filloux. E ressalta que as ideias de Rousseau o levaram a distinguir três diferentes estados no decorrer do desenvolvimento intelectual humano: o natural, o social e o contratual. A liberdade e a igualdade do ser, prevaleceriam no estado natural, enquanto que no social, ele terá que obedecer regras sociais. E quanto ao contratual, neste prevaleceria a vontade da coletividade, esta entendida como uma expressão da maioria dos membros de uma sociedade. BRITO MENEZES (2011, p. 47) cita que,

Na abordagem de Filloux é destacada uma certa superioridade hierárquica do professor, que, via de regra, é acatada em sala de aula, e que gera uma assimetria entre professor e alunos: o professor ocupa uma posição de superioridade e de poder, enquanto que o aluno é colocado numa posição de inferioridade. Nesse sentido, no ambiente escolar, o contrato pedagógico reproduziria as relações de poder, de dominantes e dominados.

Após apresentadas as prováveis 'inspirações' para a origem do contrato didático, teorizado por Brousseau, apresenta-se uma definição, Brousseau, 1886 (apud BRITO MENEZES, 2006, p. 48),

Uma relação que determina - explicitamente por uma pequena parte, mas sobretudo implicitamente - aquilo que cada parceiro, o professor e o aluno, tem a responsabilidade de gerir, e então ele se tornará responsável, e então, ele será de uma maneira ou de outra, responsável diante do outro [...]

No ambiente da sala de aula, o Contrato Didático refere-se às obrigações mais imediatas e recíprocas na relação que se estabelece entre professor e aluno. Ressalta-se que, essas obrigações ramificam-se e se dispersam para fora do espaço físico da sala de aula. Para Pais (2011) as regras do Contrato Didático nem sempre estão explicitadas de maneira clara e isso aumenta a atenção para que não ocorram interpretações de formas inadequadas. Ressalta ainda que, tais regras não são iguais às regras de um Contrato Jurídico, apresenta diferenças e uma delas é que no meio escolar são exibidas condições de forma implícita, fazendo com que a complexidade do sistema aumente.

Na relação, o contrato determina que o professor deve promover condições para o aprendizado do aluno e para isso necessário que sejam criadas situações de ensino que envolvam os três polos fundamentais da relação ternária: o professor, o aluno e o saber. O professor cria situações com o objetivo de torná-las significativas e necessárias para a apropriação do conhecimento pelo aluno, e a este cabe a predisposição de aprendê-las, dessa forma o contrato didático determina confiança e responsabilidade mútua. No contrato, o aluno deve buscar as soluções dos problemas que lhe foram propostos, ciente de que o professor lhe propôs algo, e que ele deve apresentar pelo menos uma parte da solução, e estas podem ser obtidas com o auxílio dos colegas, com a supervisão do professor, e em casos que o aluno não seja capaz de encontrar as soluções, qualquer que seja a justificativa, o professor deve ajudá-lo e, ainda, dizer ao aluno o porquê da escolha de um problema difícil. Neste contexto, podemos lidar também com o problema da irresponsabilidade matemática dos alunos, que segundo Chevallard, Bosch e Gáscon (2001), o professor não deve manter a exclusividade em assumir toda a

responsabilidade matemática, deve-se repassar, aos poucos, parte dessa responsabilidade ao aluno.

Chevallard, Bosch e Gascón (2001) abordam a existência de outras modalidades de contratos no contexto escolar, e que muitas vezes, são confundidas com a noção de Contrato Didático. Dessa forma, são apontadas a existência de dois outros tipos de contrato, o Pedagógico e o Escolar. O contrato pedagógico regula as interações entre professores e alunos, sem levar em conta um conteúdo escolar. O contrato escolar é aquele que governa as instituições sociais, conhecidas como escolas. Tais autores citam que,

a passagem do contrato pedagógico para o contrato didático acontece quando a relação entre dois (professor e aluno) se transforma realmente em uma relação entre três: o aluno, a obra a ser estudada e o professor como coordenador de estudo (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN (2001, p. 205)

Nesse sentido os autores concluem que o Contrato Didático só pode existir quando existe um Contrato Pedagógico, e mais do que isso, tem que existir um Contrato Escolar.

O Contrato Didático está presente nas relações, mesmo que de forma implícita, independente da conscientização do professor. Se mal administrado pode ser rompido e resultar em dificuldades para a aprendizagem de novos conhecimentos, essa má administração pode surgir a partir do professor ou do aluno. A seguir abordaremos casos em que podem ocorrer rupturas no Contrato Didático.

2.2 RUPTURA DO CONTRATO DIDÁTICO

O Contrato Didático, se tratando de um jogo de interações entre professor-aluno-saber, envolve interpretações subjetivas que geralmente não são previsíveis e que também apresenta regras em pequena parte de maneira explícita e em grande parte implícita. Brousseau 1986 (apud Pais, 2011, p. 80) "observa que o mais importante não é tentar explicitar a totalidade das regras que constituem o Contrato Didático e, sim delinear alguns de seus possíveis pontos rupturas". Quando

quebradas as regras do contrato e renegociadas, estas podem resultar na inserção de fatores positivos ou negativos para o processo de ensino e aprendizagem.

Um primeiro exemplo de uma situação em que ocorre ruptura do Contrato Didático, pode ser mostrado quando o professor durante sua prática pedagógica propõe um problema cuja solução não está ao alcance do aluno, ou seja, não está ao nível intelectual e cognitivo. PAIS (2011, p. 81) relata que "em uma prática pedagógica normal, espera-se que os problemas propostos tenham uma lógica de solução próxima ao conteúdo estudado". Brousseau e muitos de seus colaboradores propuseram problemas cujas soluções eram impossíveis, as vezes por falta de dados ou por não apresentarem uma relação lógica entre si. Um dos mais conhecidos é o problema denominado de A Idade do Capitão, que apresenta o seguinte enunciado: "Em um barco, há 7 cabras e 5 ovelhas. Qual a idade do capitão?" Tal problema foi proposto para classes de alunos de 7 a 10 anos. (CHEVALLARD, BOSCH e GÁSCON, 2001, p. 61).

Apesar de tal problema não apresentar uma solução correta, a maioria dos alunos davam uma resposta a essa pergunta absurda. O Contrato Didático traz a ideia de que em Matemática na resolução de problemas aritméticos, aplicando as operações fundamentais nos números presentes no enunciado do problema, o aluno pode sempre encontrar a solução.

Um segundo exemplo de ruptura de Contrato Didático pode ser dado quando o professor deixa a sua função de orientador diante das situações de aprendizagem, ou seja, ele apresenta uma postura inesperada. Isso pode ocorrer no momento em que o professor perde a paciência e passa a aplicar retaliações aos alunos que se comportaram de maneira inadequada, e isso caracteriza um rompimento do Contrato Didático, pois o professor está rompendo com a ética profissional no momento em que apresenta tal descontrole.

2.3 EFEITOS DIDÁTICOS

Este item tem por objetivo descrever os efeitos didáticos, que são situações que ocorrem na sala de aula, e se caracterizam como momentos decisivos para a continuidade da aprendizagem. A partir de tais efeitos, surgem situações que muitas vezes podem dificultar processo de ensino e aprendizagem, mas isso não significa

que tais situações não possam ser revertidas. Mesmo que tenham ocorrido tais efeitos, não há garantia de que aluno não aprenda um determinado conteúdo, quando ocorridas situações de tal natureza. Para PAIS (2011, p. 89), "esses efeitos resultam de vários aspectos: metodologia de ensino, obstáculos, formação do professor, nível dos alunos, dos conceitos, entre outros". A partir de então apresentaremos os efeitos do contrato didático, estudados por Brousseau e posteriormente por muitos estudiosos, propondo-nos a tentarmos identifica-los, especificamente, os *efeitos perversos*, durante nossa pesquisa.

O *Efeito Pigmeleão* caracteriza-se pelas expectativas criadas pelo professor em relação aos seus alunos, ele faz uma espécie de 'profecia' daqueles que terão sucesso durante o ano letivo e dos que estarão muito próximos do fracasso, em função das suas próprias expectativas. Esse efeito também é conhecido como *Fenômeno das Expectativas*, não é considerado um efeito perverso, ao contrário, é um efeito inerente a uma relação didática. Para BRITO MENEZES (2011, p. 62) "diz respeito a um fenômeno que não se pode evitar, quando da instituição de um contrato didático, uma vez que a questão da expectativa de um parceiro em relação ao outro é um dos elementos centrais à ideia de contrato didático".

A seguir abordaremos alguns efeitos do contrato didático, considerados como perversos, para tal tomamos como referência a obra de PAIS (2011).

2.3.1 Efeito Topázio

Em certos momentos da prática de ensino em Matemática, identificam-se situações em que o aluno sente-se bloqueado diante de um problema que lhe foi proposto. Na tentativa de ajudá-lo, o professor acaba precipitando-se e antecipa o resultado, o que deveria ser méritos do aluno. A esta situação Brousseau denomina de *Efeito Topázio*, em analogia ao romance Topázio, do escritor francês Marcel Pagnol, que descreve uma cena em que o professor Topázio esforça-se para que um de seus alunos não cometa erros em um ditado. Ao decorrer da atividade o aluno comete um erro de concordância, em vez de escrever 'os carneiros' ele acaba escrevendo 'os carneiro', e o professor na tentativa de ajudá-lo acaba soletrando a expressão, dando ênfase na existência da letra 's'. E o aluno ao perceber a insistência de seu professor, acrescenta a letra 's' na palavra, não por ele ter

compreendido a compreensão ortográfica, e sim para satisfazer à vontade do professor.

2.3.2 Efeito Jourdain

Esse efeito é denominado *Jourdain* em analogia a uma cena de um romance francês (*Bourgeois Gentilhomme*) que envolve um professor de filosofia e Jourdain. O professor percebe o fracasso iminente do ensino e da não aprendizagem por parte do aluno, e então o conhecimento cotidiano do aluno, aplicado a uma certa situação de ensino, é tomado como um conhecimento científico. O *Efeito Jourdain* pode ser entendido como uma variação do *Efeito Topázio*, não se tratando somente da antecipação da resposta por parte do professor ao aluno, e sim em um problema mais grave, a aceitação de forma indevida da explicação dada pelo aluno, sendo tomada como se fosse uma manifestação de um saber científico. Na verdade quando ocorridas tais situações, o professor por não ter uma estratégia didática eficiente evita debates de conhecimentos com o aluno temendo a aparição de um fracasso. Para Brito Menezes (2006) esse efeito, seria o equivalente ao professor de Matemática dizer ao aluno que, se ele tem um certo número de roupas e quando ele faz as combinações das peças para produzir formas de vestir, esse aluno sabe o que é Análise Combinatória. Pais (2011) apresenta uma outra situação desse efeito, em uma atividade envolvendo o Teorema de Pitágoras, quando o aluno desenha um quadrado sob os lados de um triângulo retângulo, o professor pressenti que seus argumentos didáticos não serão capazes de trabalhar a validação do teorema, então diz ao aluno que ele acabara de “descobrir” a demonstração do teorema, usando o conceito de congruência.

2.3.3 Efeito da Analogia

O uso da analogia pode ser um recurso didático eficiente, desde que seja usado de maneira adequada. Nesse efeito o professor substitui a noção de um estudo complexo por meio de uma analogia, esta é feita com algum conhecimento já estudado pelo aluno. O uso abusivo desse recurso, no entanto, podem resultar na redução de significados dos conceitos estudados, e além disso poderá surgir situações em que sejam levadas ao *Efeito Topázio*, que pode se degenerar no *Efeito Jourdain*. Pais (2011) exemplifica um uso abusivo de analogia retirado de um livro de

5ª série do ensino fundamental, o autor compara a densidade populacional com conceito matemático de densidade dos números reais. Ao fazer isso o autor não se preocupa em comparar os conjuntos finitos e infinitos, e também os conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

2.3.4 Deslize Metacognitivo

A expressão *glissement métacognitif*, traduzida para a língua portuguesa significa deslizamento metacognitivo, Pais (2011) faz opção por deslize metacognitivo, justificando que a palavra *deslize* fica mais próxima do sentido original usado por Brousseau. Nesse efeito o professor usa suas próprias concepções para tentar explicar situações em que se deveriam usar argumentos didáticos, isso decorre de situações de ensino que não resultam em resultados satisfatórios e o aluno demonstra dificuldades. Na tentativa de dar continuidade na prática pedagógica, o professor usa as suas próprias explicações como objeto de estudo no lugar do verdadeiro conhecimento matemático, pois os argumentos didáticos estão quase esgotados e isso pode levar o aluno a confundir o saber científico com o saber cotidiano. Para Almouloud (2007) um exemplo desse efeito pode ser dado quando o professor utiliza tabelas de variação para dominar o conceito de função.

2.3.5 Efeito Dienes

Esse efeito ocorre quando o professor, levando em conta sua experiência na ciência em que atua, desvia os objetivos de um dado conhecimento e o substitui por sua visão subjetiva. O que pode levar o currículo escolar a se aproximar do senso comum em vez da ciência. Tal efeito recebe esse nome devido aos trabalhos de Zoltan Paul Dienes, na década de 60, que consistia em fazer uma possível semelhança entre a Teoria dos Jogos com a aprendizagem da Matemática, com o chamado de modelo psicodinâmico. Para (PAIS, 2011, p. 97) tal modelo “tentava sistematizar certos procedimentos de ensino envolvendo a repetição de problemas ou de exemplos semelhantes com o objetivo de induzir respostas padronizadas”. O modelo proposto por Zoltan Paul Dienes teve influência na Matemática da época, momento no qual ocorria o Movimento da Matemática Moderna.

3. MOMENTOS DIDÁTICOS

O conhecimento, capacidade ou competência de uma pessoa, corresponde ao que designamos como seu *equipamento praxeológico*, isto é, uma mistura de praxeologias e de elementos praxeológicos que a pessoa tem à sua disposição e que pode ativar em um dado momento sob certas condições e restrições dadas (BOSCH; GASCÓN, 2009 apud SILVA, 2013, p.31)

Antes de introduzirmos este tópico, é importante que passemos à noção de *Organização Matemática (OM)* e *Organização Didática (OD)*. A *OM*, também denominada por Chevallard (1999) de *organização praxeológica matemática*, é aquela que relaciona os elementos: tarefa (t), técnica (τ), tecnologia (θ) e teoria (Θ), articulados através de um bloco prático, o chamado saber fazer, composto pelas tarefas e técnicas, e um bloco teórico, o bloco do saber, composto pelas tecnologias e teorias.

Uma tarefa t na maioria dos casos é definida por um verbo, mas deve ter um objetivo relativamente preciso, por exemplo: calcular as raízes de uma equação de 2º grau, decompor uma expressão literal dada, simplificar uma fração racional são tarefas, ou melhor, tipos de tarefas. Mas somente calcular, desenvolver, decompor tratam-se de gêneros de tarefas.

Seja um tipo de tarefa t , dada, uma praxeologia em t , precisa de uma maneira para executá-la, e essa maneira de fazer é conhecida como técnica τ . Para Chevallard (1999) uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas $\tau \in t$, ela pode ter êxito para um conjunto de tarefas em $P(\tau)$ e tender a falhar em $t/P(\tau)$, ou seja, em $P(\tau)$ pode haver uma técnica τ_1 superior a outra τ_2 , tendo um maior alcance, por exemplo, a técnica usada para calcular no conjunto dos números naturais (\mathbb{N}) pode falhar em outro conjunto numérico. Dada uma instituição I , à um determinado tipo de tarefa t , em geral existe uma só técnica τ , ou um número de técnicas institucionalmente reconhecidas. Vale frisar que podem existir técnicas alternativas excluídas em uma dada instituição I mas aceitas em outra instituição I' .

A tecnologia θ pode ser entendida como o discurso racional, cuja primeira função é de justificar a técnica, para assegurar que ela permita a execução dos tipos de tarefa t . Uma segunda função da tecnologia consiste em explicar a técnica, tornar inteligível e esclarecer uma técnica τ , por sua vez a primeira função da tecnologia consiste em justificá-la, e a segunda expõe porque a técnica é utilizada de tal forma. Além dessas funções, a tecnologia tem a função produzir novas técnicas mais eficientes adaptando-as para a realização de uma determinada tarefa.

E por fim, a teoria Θ seria um discurso racional amplo que busca justificar e explicar a tecnologia. Nesse plano teórico encontram-se os teoremas, as definições, as noções mais amplas e abstratas. A teoria é a tecnologia da tecnologia.

As OD ou praxeologias didáticas são as respostas às questões de como estudar um determinado conteúdo, e estas aparecem nos documentos oficiais, nos livros didáticos ou em uma sala de aula. Na sala de aula o professor tem a função de fazer funcionar uma determinada OM, e para isso ele precisa construir, ou reconstruir, uma OD que resolva as tarefas propostas aos alunos.

Para (Almouloud, 2007, p. 123),

As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira como se faz essa construção: sendo assim, existe uma relação entre os dois tipos de organização que Chevallard (2002) define como fenômeno de codeterminação entre as organizações matemática e didática.

Após apresentadas as noções OM e de OD, descreveremos os *momentos didáticos* ou *momentos de estudos*, assim descritos por Chevallard (1999). Para esse autor ao colocar em funcionamento uma OM em sala de aula, certas situações estão necessariamente presentes, mesmo que se apresentem de maneiras variadas, tanto no plano qualitativo, como no quantitativo. Este tipo de situação é denominado de *momentos de estudos* ou *momentos didáticos*, pois qualquer que seja o caminho escolhido chegará a um momento em que tal gesto de estudo passará pela fixação, ou institucionalização, onde surgirão os questionamentos acerca do que foi construído até então e o que caracteriza o momento da avaliação, dentre outros. Dessa forma, são propostos seis *momentos de estudos*, colocados

em ordens arbitrárias, uma vez que os momentos didáticos são em primeiro lugar uma realidade funcional, antes de torna-se uma realidade cronológica.

O primeiro momento de estudo é o primeiro encontro com a OM posta em jogo, mais precisamente com as tarefas. Esse momento é caracterizado pela busca da OM, por meio de pelo menos um dos tipos de tarefas que a constitui, uma vez que ela é construída ou modificada no decorrer do processo de estudo.

O segundo momento é aquele da exploração de um tipo de tarefa e da elaboração de uma técnica relativa a este tipo de tarefa. Momento no qual o professor tem a função de orientar os alunos para que seja construída pelo menos uma parte da técnica que possa resolver o problema posto em jogo.

O terceiro momento de estudo é o momento da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica, que começa a se constituir desde o primeiro encontro com o tipo de tarefa.

No quarto momento, verifica-se o trabalho da técnica, quando deve ocorrer um aprimoramento, para torná-la mais eficaz e mais confiável, valorizando os conhecimentos que a técnica possui.

O quinto momento é o da institucionalização, momento no qual a OM será definida. Nesse momento alguns elementos usados anteriormente podem ser inutilizados e outros incorporados de maneira definitiva na OM, tornando-se parte da cultura de uma instituição ou da classe.

O sexto momento é o da avaliação, que se articula com o da institucionalização. Segundo Chevallard (1999) e nesse momento que busca-se verificar se a técnica construída é confiável, manejável e robusta. Para Almouloud (2007, p. 125),

o momento da avaliação é uma fase importante na TAD porque se supõe que é aquele no qual o professor toma por objeto de estudo as soluções produzidas por seus alunos. O aluno, por sua vez, observa na realização de sua solução (em classe ou no livro) determinadas “maneiras de fazer”, analisando-as e avaliando-as para “desenvolver” sua própria solução.

Tomando como base os elementos apresentados neste tópico, buscaremos identificar, por meio da análise das OM e OD, os tipos de tarefas, técnicas, tecnologia, teoria e os momentos didáticos evidenciados pelo professor, assim como

as que se apresentam no livro¹¹ didático adotado pela escola, especificamente as que dizem respeito às equações do 2º grau.

¹¹ Projeto Teláris: Matemática 9º ano – Luiz Roberto Dante, SP: Ed. Ática, 2012.

4. OBTENÇÃO E ANÁLISE DOS DADOS

Neste capítulo apresentaremos o percurso metodológico de nossa pesquisa. Inicialmente descreveremos as ferramentas utilizadas na obtenção dos dados, e por fim, apresentaremos a análise dos dados colhidos.

4.1 OBTENÇÃO DOS DADOS

Nossa pesquisa por ser de natureza qualitativa, entendemos que os dados são construídos indutivamente, estes não encontram-se prontos para serem colhidos, uma vez que o próprio pesquisador pode produzi-lo, pois ele não está livre de sua subjetividade, no que refere-se ao olhar sobre os dados. Estamos cientes de que esses fatores não se tornarão obstáculos para o nosso estudo e então tentaremos apresentar de maneira clara os dados colhidos.

A gravação em áudio foi um dos recursos utilizados para a obtenção dos dados da pesquisa, apesar desse recurso receber muitas críticas, podendo resultar em uma certa artificialidade nas ações dos participantes. O outro recurso na qual optamos, foi em fazer relatórios de cada aula observada para nos auxiliar na produção do texto da pesquisa.

4.2 ANÁLISE DOS DADOS

O objetivo desse item não é de fazer a análise quanto à qualidade, eficácia e eficiência do professor. Em momento algum faremos juízo de valor, nosso objetivo é analisar como se apresentam as organizações matemáticas e didáticas (OM e OD), construídas por ele, do conteúdo equações de 2º grau para compararmos com as que se apresentam no livro didático adotado.

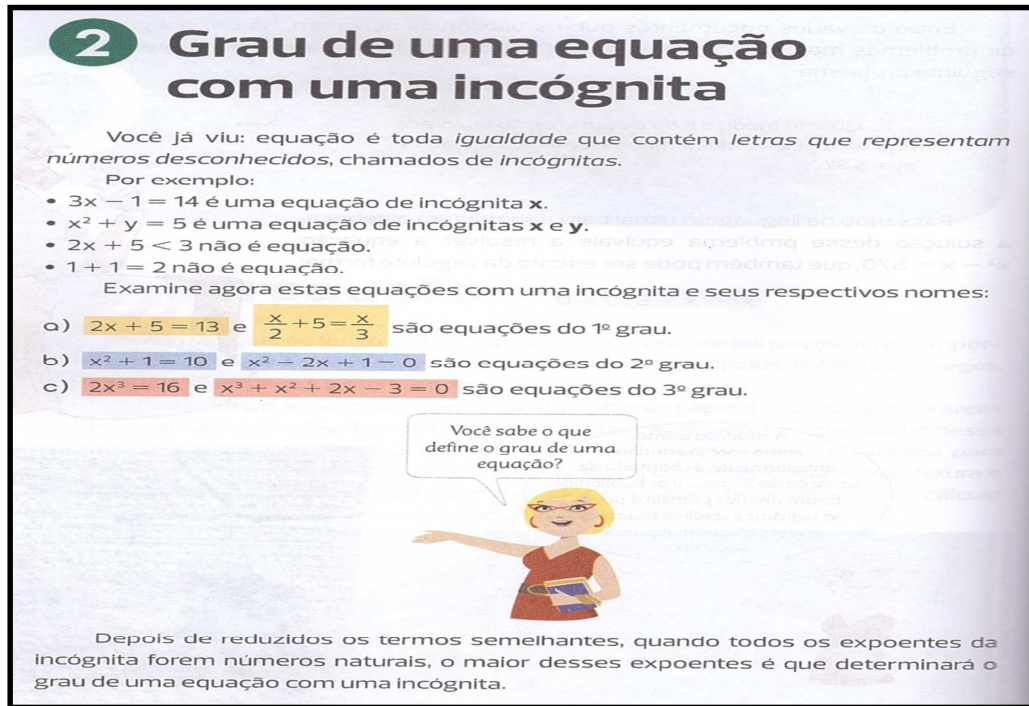
No primeiro encontro com o conteúdo de equações de 2º grau, o professor Damião¹² relembra que até o momento só foram estudadas equações em que o maior expoente da incógnita x é 1, as equações do 1º grau. A partir de então, seriam estudadas as equações em que o maior expoente da incógnita é 2, as equações de 2º grau. Damião Ressalta que existem equações do 3º grau, 4º grau, ..., etc. Esse

¹² Para garantir o anonimato do professor o nomeamos de Damião.

momento é o momento da institucionalização com a definição com o grau de equação.

A figura abaixo mostra como o livro didático apresenta o tópico:

Figura 4: Institucionalização com a definição de grau de equação



Fonte: Dante (2012)

Dando sequência ao conteúdo, Damião após apresentar brevemente a forma geral de uma equação do 2º grau completa $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, mostra aos alunos que existem casos de equações incompletas, apresentando-os em 3 casos:

1º caso: $ax^2 + c = 0$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$

No caso 1, o professor propõe a tarefa aos alunos, do tipo:

Calculem as raízes da equação $4x^2 - 64 = 0$, resolvendo da seguinte forma:

$$4x^2 - 64 = 0$$

$$4x^2 = 64$$

$$x^2 = \frac{64}{4}$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm\sqrt{16}$$

$$x = \pm 4$$

$$S = \{-4, 4\}$$

Verificando:

p/ $x = -4$, temos:

$$4x^2 - 64 = 0$$

$$4(-4)^2 - 64 = 0$$

$$4 \cdot 16 - 64 = 0$$

$$64 - 64 = 0$$

$$0 = 0$$

p/ $x = 4$, temos:

$$4x^2 - 64 = 0$$

$$4 \cdot (4)^2 - 64 = 0$$

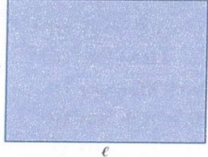
$$4 \cdot 16 - 64 = 0$$

$$64 - 64 = 0$$

$$0 = 0$$

No caso 1, o professor aborda a tarefa que marca o primeiro encontro na sala de aula com o tipo de tarefa que denominaremos de t_1 : resolver equações do 2º grau do tipo $ax^2 + c = 0$. A resolução do exemplo pode ser entendido como o momento de exploração do tipo de tarefa t_1 e elaboração de uma técnica τ_1 , que consiste em extrair a raiz quadrada em ambos os membros da equação, cuja tecnologia permeia entre os conceitos de potenciação e radiciação.

O livro didático enuncia o caso apresentando a seguinte tarefa: Qual é a medida de cada lado de uma região quadrada com área de 144 cm^2 ?

Figura 5: Primeiro encontro com a tarefa t_1


Observe a figura ao lado, na qual ℓ indica a medida do lado.

Podemos escrever $\ell^2 = 144$, que é uma equação do 2º grau incompleta com $b = 0$ e $c \neq 0$, pois corresponde a $\ell^2 - 144 = 0$ ($a = 1, b = 0$ e $c = -144$).

Veja sua resolução:

$$\ell^2 - 144 = 0$$

$$\ell^2 = 144$$

$$\ell = \pm \sqrt{144}$$

$$\ell = \pm 12$$

Esteja atento na utilização do **ou** e do **e** na resposta.
Podemos dizer $\ell = +12$ **ou** $\ell = -12$, e podemos também dizer que as raízes são $\ell' = +12$ e $\ell'' = -12$.

Como ℓ indica medida de comprimento, desprezamos o valor negativo e ficamos apenas com o valor $\ell = 12$.
Então, cada lado da região quadrada mede 12 cm.

Fonte: Dante (2012)

E em seguida faz a exploração dos tipos de tarefas usadas nas equações do caso 1, na qual retiramos uma delas:

$$5x^2 + 45 = 0$$

$$5x^2 = -45$$

$$x^2 = -\frac{45}{5}$$

$$x^2 = -9$$

$$x = \pm\sqrt{-9}$$

O autor, após apresentar a solução do tipo tarefa, ressalta que na equação não existe número real para x , ou seja, ela não apresenta raiz real que a satisfaça.

2º caso: $ax^2 + bx = 0$ com $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Com relação ao caso 2, o professor Damião propôs aos alunos o tarefa abaixo:

Reduzir a equação e calcular o valor de x .

$$(x + 2)^2 = 4$$

Na atividade acima, percebe-se através do enunciado que ela é composta de duas tarefas distintas. Após apresentada, o professor percebe as dificuldades de muitos alunos em resolver o “quadrado da soma”, assim apresentado por ele. Então,

ele expõe a ‘solução’ aos alunos enunciando: “o *quadrado do primeiro mais duas vezes o primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo*”.

Momento este, marcado pelo efeito didático conhecido como *Efeito Topázio*, quando o professor antecipa a solução da tarefa, tirando o mérito que deveria ser do aluno em solucioná-la.

$$\begin{aligned}(x + 2)^2 &= 4 \\ x^2 + 4x + 2^2 &= 4 \\ x^2 + 4x + 4 &= 4 \\ x^2 + 4x + 4 - 4 &= 0 \\ x^2 + 4x &= 0 \\ x(x + 4) &= 0 \\ x = 0 \text{ ou } x + 4 = 0 &\Rightarrow x = -4\end{aligned}$$

$$S = \{0, -4\}$$

No caso 2, o professor aborda a tarefa que marca o primeiro encontro com o tipo de tarefa que denominaremos de t_2 : resolver equações do 2º grau do tipo $ax^2 + bx = 0$. Inicialmente, ele aplica o quadrado da soma, depois reduz os termos semelhantes e em seguida fatora $x^2 + 2x$ colocando x em evidência. Para solucionar o exemplo o professor utiliza a técnica que chamaremos de τ_2 , que consiste em aplicar a lei do anulamento do produto, isto é, dados a e $b \in \mathbb{R}$, se $a \cdot b = 0$ então $a = 0$ ou $b = 0$, momento este que ocorre a exploração do tipo de tarefa e elaboração de uma técnica. É importante ressaltar que nesse exemplo ocorre também o momento da constituição do ambiente teórico e tecnológico relativo a técnica τ_2 . O professor Damião não mostra aos alunos que a técnica τ_1 não realiza a tarefa t_2 de maneira eficiente, pois ela é uma técnica de alcance limitado.

Para enunciar o caso 2, o livro didático começa com uma situação a qual consta na figura abaixo:

Figura 6: Primeiro encontro com a tarefa t_2

Neste caso, temos $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$, $b \neq 0$ e $c = 0$.

Veja a questão proposta no quadro abaixo e analise a resolução por meio de uma equação do 2º grau incompleta com $b \neq 0$ e $c = 0$.

Qual é o número que tem o dobro de seu quadrado igual a seu quádruplo?

- x : número procurado
- x^2 : quadrado do número
- $4x$: quádruplo do número

Agora, montamos a equação e resolvemos:

$$2x^2 = 4x$$

$$2x^2 - 4x = 0$$


$$x \cdot (2x - 4) = 0$$

$x = 0$ ou $2x - 4 = 0$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

Entendi! Em $x \cdot (2x - 4) = 0$, se o produto é zero, pelo menos um dos fatores é zero. Portanto, $x = 0$ ou $2x - 4 = 0$, ou seja, $x = 0$ ou $x = 2$.



Fonte: Dante (2012)

Notamos que o livro, na caixa de diálogo também apresenta justificativa para o ambiente teórico e tecnológico relativo a técnica τ_2 .

3º caso: $ax^2 = 0$, com $a \neq 0$, $b = c = 0$

Dando sequência ao conteúdo, o professor Damião aborda brevemente o caso 3, expondo o exemplo $5x^2 = 0$, marcando o primeiro encontro com a tarefa t_3 . Em seguida aplica a técnica τ_1 para solucionar a equação.


O livro didático apresenta vários momentos de exploração das técnicas usadas e retiramos um que nos chamou a atenção, $(x - 1)^2 = 4$ uma equação do 2º grau completa, que pode ser resolvida usando o 1º ou 3º caso das equações incompletas. Como mostra a figura abaixo:

Figura 7: Momento do trabalho com a técnica τ_1

Para resolver a equação $(x - 1)^2 = 4$, Andreia viu que, se fizesse a eliminação dos parênteses, chegaria a uma equação do 2º grau completa, que ela ainda não havia estudado:

$$x^2 - 2x + 1 = 4 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$$

Veja, então, como ela resolveu a equação:



$(x - 1)^2 = 4$

Como $x - 1$ ao quadrado resulta 4, temos:
 $x - 1 = 2$ ou $x - 1 = -2$
 Aí ficou fácil encontrar as raízes da equação.
 Se $x - 1 = 2$, então, $x = 3$.
 Se $x - 1 = -2$, então, $x = -1$.
 Assim, as duas raízes da equação
 $(x - 1)^2 = 4$ são 3 e -1.

Fonte: Dante (2012)

Após concluir os 3 casos de equações incompletas o professor Damião retoma as equações do 2º grau completas e conclui que estas são resolvidas pela 'fórmula resolutiva', chamada de fórmula de Bháskara.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

E em seguida expõe forma geral da equação do 2º grau completa

$ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$.

Quadro 1: Momento da institucionalização com a forma geral de uma equação do 2º grau

P: Quero saber quem é o a, b e c dessa forma

Als: ...

P: Oi?

Als: O a é o coeficiente de x^2

P: a sim, a é o coeficiente de x^2

P: E o b ?

Als: Coeficiente de x

P: Coeficiente de x

P: E o c ?

P: Termo independente

P: Ok?

De acordo com o recorte acima, acreditamos que esse é o momento da institucionalização da forma geral de uma equação do 2º grau, pois ele ressalta que o coeficiente a que acompanha x^2 e é diferente de zero, caso fosse zero, não seria uma equação do 2º grau.

E em seguida aborda a fórmula de Bháskara, como no recorte abaixo:

Quadro 2: Relato da aula sobre equação do 2º grau completa

P: Essa é a fórmula de Bháskara, nessa mesma fórmula, nós vamos fazer uma adaptação, o radicando, $b^2 - 4ac$ recebe o nome de discriminante, sendo indicado pela letra grega delta (Δ).

P: Esse triângulo equilátero, ele significa delta, uma letra grega, então o discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$

P: A fórmula de Bháskara fica $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$, você pode resolver uma equação do 2º grau usando essa fórmula.

Após apresentar a fórmula de Bháskara, o professor Damião expõe o exemplo, $x^2 + 3x - 28 = 0$. Sendo esse exemplo do tipo de tarefa que denominaremos de t_4 , as equações da forma $ax^2 + bx + c = 0$. Para o professor essa equação deve ser resolvida seguindo três passos, sendo eles: o primeiro passo seria determinar os coeficientes da equação, o segundo calcular o valor do discriminante e o terceiro e último, calcular as raízes da equação. A técnica usada pelo professor Damião para solucionar essa tarefa chamaremos de τ_4 , que consiste em aplicar a fórmula de Bháskara.

Quadro 3: Momento do trabalho com a técnica τ_4

P: 1º passo: $x^2 + 3x - 28 = 0$ – determinar os coeficientes
 $a = 1, b = 3, c = -28$

P: 2º passo: calcular o discriminante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 3^2 - 4.3.(-28)$$

$$\Delta = 9 + 112$$

$$\Delta = 121$$

P: 3º passo: calcular as raízes da equação:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{121}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-3 \pm 11}{2}$$

$$x' = \frac{-3+11}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

$$x'' = \frac{-3-11}{2} = -\frac{14}{2} = -7$$

$$S = \{-7, 4\}$$

Antes de apresentar a fórmula de Bháskara ao leitor, o autor do livro didático aborda as equações completas cujo primeiro membro é um quadrado perfeito e aborda a técnica de completar quadrados, técnica que o professor Damião não utilizou. Segundo ele, os alunos fazem a opção pela fórmula de Bháskara, então não vale a pena perder tempo apresentando essa técnica de completar quadrado.

O autor faz o uso da técnica de completar quadrados e da técnica que denominamos de τ_1 , extrair a raiz quadrada em ambos os membros da equação para obter a fórmula de Bháskara.

Dando continuidade ao estudo de equações do 2º grau, o professor faz o estudo do discriminante (Δ), para conhecer as possíveis soluções da equação através do seu valor. Quando $\Delta > 0$, a equação tem duas raízes reais distintas, e $\Delta = 0$ apresenta duas raízes iguais e se $\Delta < 0$ a equação não terá solução no conjunto dos números reais (\mathbb{R}). E em seguida expõe o momento da exploração dos casos.

$$1) 16x^2 - 8x + 1 = 0$$

Passo 1: Determinar os coeficientes

$$a = 16, b = -8, c = 1$$

Passo 2: Calcular o determinante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 1$$

$$\Delta = 64 - 64$$

$$\Delta = 0$$

Passo 3: Calcular as raízes da equação

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 16}$$

$$x = \frac{8 \pm 0}{32}$$

$$x' = \frac{8+0}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$x'' = \frac{8-0}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$$

$$S = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

$$2) 3x^2 - 4x + 2 = 0$$

Passo 1: Determinar os coeficientes

$$a = 3, b = -4, c = 2$$

Passo 2: Calcular o determinante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2$$

$$\Delta = 16 - 24$$

$$\Delta = -8$$

Como o valor do Δ (delta) é negativo,

$$x' \text{ e } x'' \notin \mathbb{R}$$

$$3) x^2 - 3mx + 2m^2 = 0$$

Passo 1: Determinar os coeficientes

$$a = 1, b = -3m, c = 2m^2$$

Passo 2: Calcular o determinante

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-3m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (2m^2)$$

$$\Delta = 9m^2 - 8m^2$$

$$\Delta = m^2$$

Passo 3: Calcular as raízes

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-3m) \pm \sqrt{m^2}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{3m \pm m}{2}$$

$$x' = \frac{3m+m}{2} = \frac{4m}{2} = 2m$$

$$x'' = \frac{3m-m}{2} = \frac{2m}{2} = m$$

$$S = \{2m, m\}$$

Para solucionar as equações (1) e (3) o professor aplicou a técnica aqui apresentada como τ_4 .

Ao iniciar o novo tópico sobre *relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau*, o professor Damiano relata:

Quadro 4: Relato da aula sobre *relações entre coeficientes e raízes de uma equação do 2º grau*

-
- Essas relações são muito simples entre os coeficientes e as raízes de uma equação do 2º grau.
 - É o seguinte, antes eu dava a equação e você resolvia e dava a resposta, a solução. Agora vamos inverter, encontrar a solução e vocês vão me dar a equação.
 - Entenderam?
 - Fazer o caminho inverso agora. Dou as raízes e vocês vão chegar na equação, ou seja, vocês vão aprender a montar uma equação do 2º grau. Fazer a montagem dela e logicamente aplicar em problemas essas equações.
 - Ok?
 - Então isso são as relações.
-

E as apresenta a seguir:

1ª Relação – Soma das raízes

$$\text{Dada por } x' + x'' = \frac{-b}{a} = S$$

2ª Relação – Produto das raízes

$$\text{Dado por } x' \cdot x'' = \frac{c}{a} = P$$

Após apresentar a primeira relação acima, o professor comenta

Quadro 5: Relato sobre a demonstração da relação da soma de raízes

Não vou fazer a demonstração dessa relação porque leva tempo e os alunos perdem o interesse...

Depois de expor as relações, o professor propõe aos alunos as tarefas.

Calcular a soma e o produto das raízes equações.

1- $3x^2 - 5x + 2 = 0$

Os alunos não conseguiram encontrar a solução do exemplo (1), então o professor antecipa a solução. E depois expõe o exemplo (2) abaixo.

2- $2x^2 - 3x = 0$

Nesse exemplo aconteceu situação análoga ao exemplo (1), os alunos não conseguiram realizar a tarefa com sucesso, e mais uma vez o professor antecipou a solução. A técnica usada pelo professor para solucionar esses exemplos denominamos de τ_5 , que consiste em aplicar a fórmula da soma e/ou do produto das raízes.

Nas tarefas acima, perceber-se, novamente que ocorre o *Efeito Topázio*. No que concerne a este tópico, o livro didático apresenta dois exemplos e em seguida mostra como é feita a demonstração das relações.

Figura 8: Demonstração da fórmula do produto de raízes

Demonstrações

Nos exemplos analisados na página anterior, duas relações entre coeficientes e raízes repetiram-se:

1ª) a soma das raízes foi igual ao quociente do oposto de **b** por **a**, ou seja:

$$S = x' + x'' = \frac{-b}{a}$$

2ª) o produto das raízes foi igual ao quociente de **c** por **a**, ou seja:

$$P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$$


Acompanhe a demonstração da 2ª relação (o produto das raízes é $\frac{c}{a}$, ou seja $P = x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$).

$$P = x' \cdot x'' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b + \sqrt{\Delta})(-b - \sqrt{\Delta})}{4a^2} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Portanto, $x' \cdot x'' = \frac{c}{a}$.

Para **provar** que essas relações **valem para todas** as equações do 2º grau com raízes reais, devemos usar a equação geral $ax^2 + bx + c = 0$, com $a \neq 0$. Seus coeficientes são **a**, **b** e **c**; suas raízes são $x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$, com $\Delta = b^2 - 4ac$.



Fonte: Dante (2012)

Iniciando o novo tópico, *composição de equações do 2º grau a partir de suas raízes*, o professor Damião começa da seguinte forma:

Quadro 6: Relato da aula sobre *composição de equações do 2º grau a partir de suas raízes*

- Antes eu dava a equação, e vocês me davam a solução, ou seja, as raízes da equação. Agora eu vou dar as raízes e vocês vão montar as equações.
- Entenderam?

- É o caminho inverso agora
 - Ok?
 - Então vamos usar exatamente isso aqui, a soma e o produto das raízes para escrevermos as equações.
 - Acompanhem comigo aqui. Eu quero que vocês me escrevam uma equação cujo $x' = 3$ e $x'' = 5$, por exemplo. Ai vocês já sabem qual é a equação porque dei as raízes...
 - É claro que elas sempre vão ser colocadas na forma geral. Então vejam lá, uma demonstraçãozinha.
-

Demonstrando:

Temos a forma geral:

$ax^2 + bx + c = 0$, então dividiremos por a a equação

$$\frac{ax^2}{a} + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = \frac{0}{a}$$

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, (*) onde temos que $S = \frac{-b}{a}$, então multiplicando por (-1),

resulta em $\frac{b}{a} = -S$. E temos que $\frac{c}{a} = P$. Daí, substituindo em (*)

$x^2 - Sx + P = 0$ - relação para compor a equação dada as suas raízes

Nessa demonstração, ocorre o momento da constituição do ambiente tecnológico e teórico relativo a técnica τ_5 .

Após apresentar a relação acima, ele propõe o tipo de tarefa aos alunos.

Compor a equação de 2º grau, cujas raízes são:

a) $x' = 2$ e $x'' = 4$

Solução:

1º Calcular a soma das raízes

$$S = x' + x''$$

$$S = 2 + 4$$

$$S = 6$$

2 Calcular o produto das raízes

$$P = x' \cdot x''$$

$$P = 2 \cdot 4$$

$$P = 8$$

3º Substituir na relação

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0$$

Um outro tópico inserido pelo professor no estudo foi o *cálculo mental das raízes de uma equação do 2º grau*. Foi feita uma breve abordagem, e ressaltou que é mais comum fazer os cálculos mentais quando o valor do a na equação é igual a 1, caso contrário, não é uma tarefa fácil de descobrir as soluções. E para esses casos em que $a \neq 0$ e $a \neq 1$ ele propõe que as equações sejam solucionadas com o uso da técnica que denominamos de τ_4 . Enquanto que no livro didático o autor apresenta apenas as equações do 2º grau em que o valor de $a = 1$.

Os quadros abaixo, mostram os tipos de tarefas, e os tipos de técnicas usadas pelo professor durante a abordagem do objeto de estudo.

Relação dos tipos de tarefas usadas pelo professor

Quadro 7: Relação dos tipos de tarefas usadas pelo professor

t_1 – Resolver equações do 2º grau da forma $ax^2 + c = 0$, ou que se reduzem a esta dadas em linguagem algébrica.

t_2 – Resolver equações do 2º grau da forma $ax^2 + bx = 0$ ou que se reduzem a esta dadas em linguagem algébrica.

t_3 – Resolver equações do 2º grau da forma $ax^2 = 0$ ou que se reduzem a esta dadas em linguagem algébrica.

t_4 – Resolver equações do 2º grau da forma $ax^2 + bx + c = 0$ ou que se reduzem a esta dadas em linguagem algébrica.

Relação dos tipos de técnicas usadas pelo professor

Quadro 8: Relação dos tipos de técnicas usadas pelo professor

τ_1 – extrair a raiz quadrada em ambos os membros da equação
τ_2 – aplicar a lei do anulamento do produto
τ_4 – aplicar a fórmula de Bháskara
τ_5 – aplicar a fórmula da soma e/ou produto das raízes

Bloco teórico e tecnológico relativo as técnicas utilizadas pelo professor

Quadro 9: Bloco teórico e tecnológico relativo as técnicas utilizadas pelo professor

Tipos de tarefas	Tipos de técnicas	Discurso teórico-tecnológico
t_1, t_3	τ_1	Radiciação e potenciação
t_2	τ_2	Se o produto de dois elementos é zero, então pelo um dos fatores é zero.

O professor Damiano faz o uso da técnica τ_4 para solucionar as tarefas do tipo t_4 . Por outro lado, ele não apresenta o discurso teórico e tecnológico relativo a essa técnica, que pode ser mostrada com o uso do método de completar quadrados e com o uso da técnica τ_1 .

A seguir apresentaremos as considerações finais sobre esse estudo, na tentativa de buscar relacioná-los os aportes teóricos tomados com a investigação em sala de aula.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa buscou investigar como um professor do 9º ano do ensino fundamental constrói as Organizações Matemáticas e suas apropriadas Organizações Didáticas que postam em jogo essas Organizações Matemáticas. Nos momentos por nós vivenciados em sala de aula, percebemos que a OD construída pelo professor possui pelo menos 4 tipos de tarefas, sendo o momento de exploração das tarefas distribuídos geralmente de uma forma igual para cada tipo de tarefa. Um fato interessante e que, após a elaboração das OD, além do aluno aprender um conteúdo novo, eles resgatavam alguns conhecimentos já adquiridos anteriormente, como no caso da técnica de resolução das equações incompletas, cuja tecnologia baseia-se em algo já estudado pelos alunos.

As técnicas de resoluções apresentadas pelo professor não diferencia-se muito das que o livro adotado pela escola apresenta, as técnicas são apresentadas de forma sucinta permitindo uma maior compreensão ao aluno no que diz respeito a sua utilização. Percebemos durante a análise dos dados, que o professor objetiva treinar seus alunos em utilizar a técnica que denominamos τ_4 , que consiste em aplicar a fórmula de Bháskara, pois segundo ele é a mais usada pelos alunos para solucionar os tipos de tarefas propostas.

O fenômeno da Transposição Didática Interna ocorre na sala de aula, e nesse ambiente, o professor tem a responsabilidade de transformar o saber a ensinar, aquele presente nos livros didáticos e em outros materiais, em saber ensinado. Na análise dos dados comparamos a forma que o livro didático adotado pela escola aborda o nosso objeto de estudo, Equações de 2º Grau, e verificamos que a OD construída pelo professor diferencia-se com a que encontra-se no livro didático. Sendo que este aborda alguns itens que o professor não fez caso de mencionar na sala de aula, como equações do segundo grau completas em que o primeiro membro é um quadrado perfeito, cuja técnica de resolução é o método de completar quadrados, e as situações-problemas envolvendo os casos de equações evidenciadas por ele, sendo esta em nossa visão, uma estratégia didática de resolução de problemas que são essenciais para o processo do desenvolvimento da aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.

No decorrer da pesquisa, o professor em momento algum fez uso de situações-problemas para o ensinamento de Equação do 2º Grau. Como vimos durante esse trabalho, com aporte teórico da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau, o professor deve criar situações de ensino que sejam significativas para o aprendizado do aluno e essas situações devem ser abordadas em um contexto muito próximo da realidade do aluno.

Brito Menezes (2006) avança no sentido de que, o professor tem que fazer com que o aluno pense algebricamente ao deparar-se com um problema, e certifica que esse pensar algebricamente, está ligado a ideia de que o aluno tendo o contato com um problema dessa natureza, sendo ele colocado em linguagem natural ou não, possa ter condições de compreender como os dados do problema se relacionam e posteriormente possa fazer as escolhas adequadas para tratá-los. Por outro lado, o que vimos durante as aulas foram apenas tarefas em que com o uso de uma determinada técnica, o aluno encontrava a solução, e estas não se aplicavam em um contexto do cotidiano do aluno.

Durante a pesquisa identificamos um efeito didático, o considerado *perverso*. Ocorreram em dois momentos, um ocorreu quando o professor antecipou a solução da tarefa que aborda o “quadrado da soma”, e o outro foi em relação à exploração dos tipos de tarefas sobre calcular a soma e o produto das raízes utilizando a técnica que denominamos de τ_5 . Ao antecipar as soluções, ele tira um mérito que seria do(s) aluno(s), a este efeito foi denominado de Efeito Topázio. Na tentativa de ajudar o(s) aluno(s) o professor facilita a resposta, chegando muitas vezes a antecipar a solução para evitar o erro do aluno. Vale ressaltar que mesmo quando ocorrem tais efeitos, não há garantia que o aluno não aprenda o conteúdo abordado.

Podemos destacar através dessa pesquisa a importância da Teoria Antropológica do Didático, no que refere-se as questões das construções das Organizações Matemáticas e Didáticas, para o desenvolvimento de processos de estudos, como no nosso caso, as Equações de 2º Grau.

REFERÊNCIAS

AGRANIONI, Neila Tonin. **A Teoria da Transposição Didática e o Processo de Didatização dos Conteúdos Matemáticos**. Educere - Revista da Educação, Toledo - PR. vol.1, n. 1, jan./jun., 2011.

ALMOULOUD, Saddo, Ag. **Fundamentos de Didática da Matemática**. Curitiba: Ed. UFPR, 2007.

BARBOSA, Vania de Moura. **Uma etapa da transposição didática interna**: análise das escolhas do saber ensinado feita por professores de matemática da GERE Recife Sul. (Mestrado em Ensino das Ciências) UFRPE. p.32-44. 2006.

BESSA DE MENEZES, Marcus. **Transposição Didática Interna**: Suas características e novos desafios. Anais do SIPEMAT (Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática), 2006.

BRITO MENEZES, Anna Paula de Avelar. **Contrato Didático e Transposição Didática**: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental. Tese. (Doutorado em Educação). Recife - UFPE, 2006.

CHEVALLARD, Y. **La Transposition Didactique – Del saber sabio al saber enseñado**. AIQUE Grupo Editor, 1997. Disponível em <http://www.terras.edu.ar/biblioteca/11/11DID_Chevallard_Unidad_3.pdf>. Acessado em 28 de agosto de 2014.

_____. BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudar Matemáticas**: O Elo Perdido entre o Ensino e Aprendizagem. Porto Alegre: Artes Médicas, 2001.

_____. **El analisis de las practicas docentes en la teoria antropologica de los didactico**. Recherches en Didactique des Mathématiques. v.19. n.2, 1999. p.221-265.

DANTE, Luiz Roberto. **Projeto Teláris**: Matemática. 1ª ed. São Paulo – Ática, 2012. p.30-55.

MAGALHÃES, Luiza Eliana Reis. **O Trabalho Científico**: da pesquisa a monografia. Curitiba: Fesp, 2007.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da Matemática**: Uma análise da influência francesa. 3ª ed. Belo Horizonte - MG: Autêntica, 2011.

SILVA, Edilene da Silva e. **A Transposição Didática no ensino de Física**: o aquecimento global como objeto de estudo. Dissertação (Mestrado). IEMCI/UFPA. Belém. 2013. p.17 – 25.

SILVA, Reginaldo da. **O conhecimento matemático – didático do professor do multisseriado**: análise praxeológica. Tese (Doutorado). IEMCI/UFPA. Belém. 2013. p.13 – 68.