UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DESIGUALDADE DE INGHAM APLICADO À OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Belém-PA

2015

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA
CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

DESIGUALDADE DE INGHAM APLICADO À OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Ronald Cardoso Barbosa
Orientador: Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Belém-PA

2015

DESIGUALDADE DE INGHAM APLICADO À OBSERVABILIDADE PARA SISTEMAS DE TIMOSHENKO

Ronald Cardoso Barbosa

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Pará.
Orientador: Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior

Banca Examinadora

____
Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior (Orientador)

____
Prof. Dr. Mauro de Lima Santos (UFPA)

____
Prof. Ms. Renato Fabrício Costa Lobato (UFPA)

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ____________________________

Belém-PA

2015

"Dedico a Deus, à minha mãe Ivone e à Bianca que sempre esteve comigo em todos os momentos."

"A questão primordial não é o que sabemos, mas como o sabemos".

(Aristóteles)

Agradecimentos

- Agradeço em primeiro lugar a Deus pelo dom da vida, saúde e pela oportunidade de estar conseguindo, hoje, mais uma vitória, merecidamente e a todos que contribuíram e ainda contribuem para que a cada dia amadureça e aprenda mais.

- Em especial, destaco minha mãe Ivone Cardoso Barbosa, mulher batalhadora que sozinha assumiu a responsabilidde de criar a mim e aos meus irmãos Rodrigo Cardoso e Gabriel Cardoso, que nunca me deixou perder o foco nas horas mais difíceis e a outra grande mulher, colega e namorada Bianca Passos, com quem passei longos momentos de estudo e reflexão e que esteve presente nas minhas alegrias e tristezas, a todos os meus amigos que fizeram parte do curso ao longo desses 4 anos.

- A todos os professores e professoras da FACMAT que tive a oportuidade de conhecer e principalmente ao meu Orientador professor Dilberto, pessoa simples e gentil que desenvolveu com paciência e sabedoria e conseguiu me passar todo o conhecimento necessário para desenvolver este trabalho, e quando, na sua ausência, pela contribuição do professor Anderson Ramos. A todos vocês, meu imenso obrigado.

Sumário

Introdução

Tecnologias modernas e aplicações à ciência requerem modelos matemáticos de sólidos que facilitem o cálculo das deformações e tensões com suficiente precisão e sem excessiva análise matemática. O modelo que analizaremos, típico e fundamental na área de estrutura mecânica, torna possivel atingir este objetivo. Por essa razão, é bastante utilizado na área de engenharia. Definimos uma viga como um membro de estrutura delgada, carregada transversalmente cujo comprimento é grande em relação à largura e seção transversal plana. Iremos assumir que a área da seção transversal da viga é simétrica com respeito ao eixo z e que todas as cargas transversais agindo sobre a viga possuem uma simetria semelhante. O modelo que analizaremos foi deduzido por S. P. Timoshenko e consiste em uma aproximação da Teoria da Elasticidade Tridimensional. Quando levamos em consideração a variável z da teoria espacial, resulta o modelo de Kirchhoff e pode ser visto em Lagnese-Lions [3] que a solução única desse problema aproximado converge, em uma adequada topologia, para a solução do modelo tridimensional de Kirchhoff sujeito a apropriadas condições de fronteira.

Nesse sentido, as pequenas vibrações transversais de uma viga são dadas por um sistema unidimensional acoplado de duas equações diferenciais

$$\rho A\varphi_{tt}(x,t) = Q_x(x,t), \tag{1}$$

$$\rho I\psi_{tt}(x,t) = M_x(x,t) - Q(x,t), \tag{2}$$

em que t é o tempo, x é a distância ao longo da linha central da viga, φ é o deslocamento transversal, ψ a rotação nas seções transversais, ρ é a densidade da massa do material do qual a viga é composta, M é o momento de curvatura, Q é o esforço do cortante, A a área de seção transversal e I é o momento de inércia da seção.

As relações de flexão-esforço para o comportamento elástico são dadas por:

$$M(x,t) = EI\psi_x(x,t), \tag{3}$$

$$Q(x,t) = kAG(\varphi_x(x,t)+\psi(x,t)), \tag{4}$$

em que E é o módulo de elasticidade de Young, G é o módulo de rigidez do cortante e k é o fator de correção do cortante.

Assim, usando essas relações, Timoshenko chegou as seguintes equações diferenciais parciais hiperbólicas

$$\rho A\varphi_{tt} - (\kappa AG(\varphi_x+\psi))_x = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,T), \tag{5}$$

$$\rho I\psi_{tt} - (EI\psi_x)_x + \kappa AG(\varphi_x+\psi) = 0 \quad \text{em} \quad (0,L)\times(0,T). \tag{6}$$

Observabilidade da fronteira para equação de ondas

A fim de motivar nossos estudos, analisaremos primeiramente as propriedades de observabilidade da equação de propagação de ondas unidimensional dada por:

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad em \quad (0,L)\times(0,T), \tag{7}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 = 0 \quad 0<t<T, \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ u_t(x,0) = u_1(x), \quad 0<x<L. \tag{9}$$

Em $(7)-(9)$, $u=u(x,t)$ descreve o deslocamento de uma corda vibrante atuando no intervalo $(0,L)$.

Matematicamente o problema $(7)-(2.3)$ é bem posto no espaço de energia $H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)$. Mais precisamente, para quaisquer $(u_0,u_1)\in H_0^1(0,L)\times L^2(0,L)$ existe uma única solução

$$u\in C([0,T];H_0^1(0,L))\cap C^1([0,T];L^2(0,L)).$$

A energia das soluções é dada por,

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \Big[|u_t|^2+|u_x|^2\Big]dx, \quad \forall t\geq 0, \tag{10}$$

e ela é conservada ao longo do tempo, isto é,

$$E(t) = E(0),\ \forall t\geq 0. \tag{11}$$

O problema de observabilidade da fronteira de $(7)-(9)$ pode ser formulado da seguinte maneira: Dado um $T>0$, existe $C(T)>0$ tal que a seguinte desigualdade

$$E(0) \leq C(T) \int_0^T |u_x(L,t)|^2 dt, \tag{12}$$

conhecida como desigualdade de observabilidade é valida para todas as soluções de $(7)-(9)$.

A desigualdade (12), quando existe, garante que a energia total das soluções de $(7)-(9)$ pode ser "observada"ou estimada a partir da energia concentrada na fronteira $x=L$ durante um determinado espaço de tempo. Isto de fato ocorre, pois usando o fato de que a energia é conservada, resulta que

$$E(t) = E(0) \leq C(T) \int_0^T |u_x(L,t)|^2 dt. \tag{13}$$

Já a constante $C(T)$ na desigualdade (12) será referida como a constante de observabilidade.

Estrutura do TCC

Neste trabalho, construiremos uma desigualdade de observabilidade para o sistema de Timoshenko $(5)-(6)$. Tal desigualdade envolve um termo global e um termo pontual, mas precisamente, provamos que

$$E(0) \leq C(T) \left(\frac{\rho_2 L}{2} \int_0^T \psi_t^2(L,t) dt + \rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt \right), \tag{14}$$

onde $C(T)>0$.

Por meio da Desigualdade de Ingham, que desenvolvemos no capítulo 1, mostramos que esta desigualdade pode ser otimizada. Ou seja, provamos que

$$E(0) \leq \widehat{C}(T) \left(\frac{\rho_2 L}{2} \int_0^T \psi_t^2(L,t) dt \right). \tag{15}$$

Ressaltamos que todos os resultados aqui apresentados são novos na literatura matemática concernente a observabilidade de E.D.P's.

Capítulo 1

Desigualdade de Ingham

Este capítulo descrevemos sobre a desigualdade de Ingham. Tal desigualdade por exemplo é usada para fazermos boas estimativas quando analizamos as soluções de um sistema na fronteira, ou seja, buscamos melhorar o máximo possível o nosso resultado.

1.1 Prova da Desigualdade de Ingham

Enunciaremos a desigualdade no teorema e em seguida demonstraremos tal como foi desenvolvido por Ingham [6].

Teorema 1.1 *Seja $\{\lambda_k\}$ $k \in \mathbb{Z}$, uma sequência de números reais tais que*

$$\lambda_{k+1} - \lambda_k \geq \gamma > 0 \quad \forall \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Então para qualquer $T > \frac{2\pi}{\gamma}$ existem constantes positivas $C_j(T, \gamma) > 0$, $j = 1, 2$ tal que

$$C_1(T, \gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2 \leq \int_{-T}^{T} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma) \sum_{k \in \mathbb{Z}} |a_k|^2, \tag{1.1}$$

para toda sequência de números complexos $\{a_k\} \in l^2$.

Demonstração: Primeiramente vamos estudar o caso em que $T = 2\pi$ e $\gamma > 1$. Com efeito, se $T > \frac{2\pi}{\gamma}$, ou $\gamma T > 2\pi$, multiplicando esse intervalo por $\frac{2\pi}{T}$ e definindo por $s := \dfrac{2\pi t}{T}$ e por $\mu_n = \dfrac{T\lambda_n}{2\pi}$ obtemos

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{T}{2\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds.$$

Segue que $\mu_{n+1} - \mu_n = \dfrac{T}{2\pi}(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$, por hipótese temos $\lambda_{n+1} - \lambda_n > \gamma > 0$, então

$$\lambda_{n+1} - \lambda_n > \frac{T\gamma}{2\pi} := \gamma_1 > 1.$$

Agora vamos mostrar que existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \geq C_1(T,\gamma) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2. \tag{1.2}$$

A desigualdade (1.2) é chamada de desigualdade indireta e é a chave principal para chegarmos a desigualdade de observabilidade.

Para tal finalidade, definimos o funcional $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ tal que

$$h(s) = \begin{cases} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \text{se} & |s| \leq \pi \\ 0 \qquad\quad , \text{se} & |s| > \pi. \end{cases} \tag{1.3}$$

A transformada de Fourier é definida como

$$H(\xi) = \mathcal{F}(h(s)) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{i\xi s} ds, \tag{1.4}$$

aplicando a transformada de Fourier em (1.3) temos:

$$\begin{aligned} H(\xi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(s) e^{i\xi s} ds = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds, \end{aligned}$$

integrando por partes obtemos:

$$\begin{aligned} H(\xi) &= 2\sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s}\Big|_{-\pi}^{\pi} - 2\xi i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds \\ &= 2\left(e^{i\xi\pi} + e^{-i\xi\pi}\right) - 2\xi i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds. \end{aligned}$$

Usando a identidade de Euler $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$, temos assim que

$$H(\xi) = 4\cos(\pi\xi) - 2\xi i \int_{-\pi}^{\pi} \sin\left(\frac{s}{2}\right) e^{i\xi s} ds,$$

integrando por partes, novamente, resulta

$$\begin{aligned}
H(\xi) &= 4\cos(\pi\xi) - 2i\xi\left(-2\cos\left(\frac{s}{2}\right)e^{i\xi s}\Big|_{-\pi}^{\pi} + 2\xi i\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{s}{2}\right)e^{i\xi s}ds\right) \\
&= 4\cos(\pi\xi) + 4\xi^2\underbrace{\int_{-\pi}^{\pi}\cos\left(\frac{s}{2}\right)e^{i\xi s}ds}_{H(\xi)} \\
H(\xi) - 4\xi^2 H(\xi) &= 4\cos(\pi\xi).
\end{aligned}$$

Deste modo obtemos

$$H(\xi) = \frac{4\cos(\pi\xi)}{1-4\xi^2} \tag{1.5}$$

Sabendo que $0 \leq h(s) < 1$, para qualquer $s \in [-\pi, \pi]$ decorre que

$$\int_{-T}^{T}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s}\right|^2 ds \geq \frac{T}{2\pi}\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s)\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s}\right|^2 ds, \tag{1.6}$$

e ainda

$$\begin{aligned}
\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s)\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s}\right|^2 ds &= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s)\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s}\overline{a_m e^{i\mu_m s}}ds \\
&= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s)\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s}\overline{a_m}e^{-i\mu_m s}ds \\
&= \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s)\sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n\overline{a_m}e^{i(\mu_n-\mu_m)s}ds \\
&= \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n\overline{a_m}\int_{-\pi}^{\pi} h(s)e^{i(\mu_n-\mu_m)s}ds.
\end{aligned}$$

Observando a definição (1.4) da transformada de Fourier, então podemos reescrever a igualdade acima como

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s)\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s}\right|^2 ds = \sum_{n,m\in\mathbb{Z}} a_n\overline{a_m}H(\mu_n-\mu_m) = H(0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2 + \sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}} a_n\overline{a_m}H(\mu_n-\mu_m)$$

Tomando o valor absoluto na ultima igualdade acima e usando a desigualdade

$$|x+y| \geq |x| - |y|$$

temos:

$$\left|H(0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2+\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}a_n\overline{a_m}H(\mu_n-\mu_m)\right|\geq\left|H(0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\right|-\left|\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}a_n\overline{a_m}H(\mu_n-\mu_m)\right|$$
$$\geq H(0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2-\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|a_n\overline{a_m}H(\mu_n-\mu_m)|.$$

Aplicando a versão discreta da desigualdade de Hölder no produto $\sum|a_n\overline{a_m}H(\mu_n-\mu_m)|$ resulta

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}h(s)\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{i\mu_ns}\right|^2ds\geq H(0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2-\left(\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|a_n\overline{a_m}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|H(\mu_n-\mu_m)|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

e como consequência

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}h(s)\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{i\mu_ns}\right|^2ds\geq H(0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2-\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|a_n\overline{a_m}|\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|H(\mu_n-\mu_m)|.$$

Pela desigualdade de Young

$$\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|a_n\overline{a_m}|\leq\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2+\frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}}|\overline{a_m}|^2$$
$$\leq\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2+\frac{1}{2}\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2,$$

decorre assim que

$$\int_{-2\pi}^{2\pi}h(s)\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_ne^{i\mu_ns}\right|^2ds\geq H(0)\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2-\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|H(\mu_n-\mu_m)|. \tag{1.7}$$

Agora vamos fazer uma estimativa para $\sum\limits_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|H(\mu_n-\mu_m)|$. Com efeito, usando (1.5)

$$\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|H(\mu_n-\mu_m)|=\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}\left|\frac{4\cos((\mu_n-\mu_m)\pi)}{1-4(\mu_n-\mu_m)^2}\right|$$
$$\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}|H(\mu_n-\mu_m|\leq\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}\frac{4}{|1-4(\mu_n-\mu_m)^2|}$$
$$\leq\sum_{n\neq m\in\mathbb{Z}}\frac{4}{4|(\mu_n-\mu_m)^2-1|}.$$

Por outro lado, $\mu_{n+1}-\mu_n>\gamma_1>0$, então $\mu_{n+1}>\mu_n+\gamma_1$. Se para $n=1$ temos $\mu_2>\mu_1+\gamma_1$, para $n=2$, $\mu_3>\mu_2+\gamma_1=\mu_1+\gamma_1+\gamma_1=\mu_1+2\gamma_1$, procedendo nesse raciocício, então após as n iterações vamos ter

$$\mu_n>\mu_1+(n-1)\gamma_1.$$

Consequentemente, para $n > m$ temos $\mu_n > \mu_m$ e daí vem que

$$\mu_n - \mu_m \geq (n-m)\gamma_1 \Rightarrow \frac{1}{\mu_n - \mu_m} \leq \frac{1}{(n-m)\gamma_1}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| &\leq \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{4}{4\gamma_1^2 |n-m|^2 - 1} \\ &\leq \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4|n-m|^2 - \frac{1}{\gamma_1^2}} \\ &\leq \frac{8}{\gamma_1^2} \sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} \frac{1}{4|n-m|^2 - 1}. \end{aligned}$$

Fazendo $r := |n-m|$, $r \in \mathbb{Z}$ temos

$$\sum_{n \neq m \in \mathbb{Z}} |H(\mu_n - \mu_m)| \leq \frac{8}{\gamma_1^2} \sum_{r \geq 1} \frac{1}{4r^2 - 1} = \frac{8}{\gamma_1^2} \frac{1}{2} \sum_{r \geq 1} \left(\frac{1}{2r-1} - \frac{1}{2r+1} \right) = \frac{4}{\gamma_1^2}. \tag{1.8}$$

Agora, substituindo a estimativa (1.8) em (1.7) resulta

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \geq H(0) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 - \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 = \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \tag{1.9}$$

Substituindo a desigualdade (1.9) em (1.6) segue que

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq \frac{T}{2\pi} \left(4 - \frac{4}{\gamma_1^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Como $\gamma_1 = \dfrac{T\gamma}{2\pi}$, resulta assim que:

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq \frac{T}{2\pi} \left(4 - \frac{4}{\frac{T^2\gamma^2}{4\pi^2}} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2 \geq \frac{2}{T\pi} \left(T^2 - \frac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2$$

Desde que $T > \frac{2\pi}{\gamma}$ então existe uma constante $C_1(T,\gamma) := \dfrac{2}{T\pi} \left(T^2 - \dfrac{4\pi^2}{\gamma^2} \right) > 0$, do qual vale a desigualdade indireta

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n s} \right|^2 ds \geq C_1(T,\gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2. \tag{1.10}$$

Agora, o próximo passo é mostrar que existe uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T,\gamma) \sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^2.$$

Para este caso consideremos o funcional $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ definido por

$$h(s) = \begin{cases} \cos\left(\frac{s}{2}\right), \text{se} & |s| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \qquad , \text{se} & |s| > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{1.11}$$

De forma análoga ao que foi feito na primeira parte dessa demonstração temos

$$H(\xi) = \frac{4}{1 - 4\xi^2} \cos(\pi\xi). \tag{1.12}$$

Sendo $h(s) \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ vem que

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq \frac{T}{\pi} \int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds \tag{1.13}$$

e seguindo os mesmos passos da demonstração anterior obtemos

$$\int_{-2\pi}^{2\pi} h(s) \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds = H(0) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{m\neq n\in\mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m)|. \tag{1.14}$$

Então, pela desigualdade $|x + y| \leq |x| + |y|$

$$\begin{aligned} H(0) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 + \sum_{m\neq n\in\mathbb{Z}} |a_n \overline{a_m} H(\mu_n - \mu_m) &\leq 4 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 + \frac{4}{\gamma_1^2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \\ &\leq \left(4 + \frac{4}{\gamma_1^2}\right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \\ &\leq \frac{4}{\pi} \left(T^2 + \frac{4\pi^2}{\gamma^2}\right) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2. \end{aligned}$$

Assim, para todo $T > 0$ existe a constante $C_2(T, \gamma) := \dfrac{4}{T\pi} \left(T^2 + \dfrac{4\pi^2}{\gamma^2}\right) > 0$ tal que

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq C_2(T, \gamma)) \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \tag{1.15}$$

e assim concluímos a prova do Teorema. ■

Capítulo 2

Série de Fourier do Sistema de Timoshenko

Neste capítulo vamos determinar a solução em série de fourier para o problema abordado na introdução. O objetivo é determinar o autovalor λ a partir das autofunções que devidamente satisfazem as condições de fronteira do respectivo sistema.

Agora reescrevemos (5)-(6), onde denotamos por $\rho_1 = \rho A, \kappa = kGA, \rho_2 = \rho I$ e $b = EI$. Aqui usamos ρ para densidade, E para o módulo de elasticidade, G para o módulo de cisalhamento, k para o fator de cisalhamento, A para a área da secção transversal e I para o momento de inércia da secção transversal, onde todas essas quantidades são positivas.

Consideremos o seguinte sistema:

$$\begin{aligned} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x &= 0, \text{ em } (0,L)\times(0,T), && (2.1)\\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) &= 0, \text{ em } (0,L)\times(0,T), && (2.2)\\ \varphi(0,t) = \psi_x(L,t) = 0, \psi(0,t) = \varphi_x(L,t) + \psi(L,t) &= 0, \quad 0 < t < T, && (2.3)\\ \varphi(\cdot,0) = \varphi_0(\cdot),\ \varphi_t(\cdot,0) = \varphi_1(\cdot),\ \psi(\cdot,0) = \psi_0(\cdot),\ \psi_t(\cdot,0) &= \psi_1(\cdot),\ \forall x \in (0,L). && (2.4) \end{aligned}$$

Vamos dar início ao cálculo da solução em série de Fourier do problema (2.1) - (2.4). Vamos supor que as funcões φ e ψ podem ser escritas da seguinte forma:

$$\varphi(x,t) = S(t)u(x) \tag{2.5}$$

$$\psi(x,t) = S(t)v(x). \tag{2.6}$$

Usando as condições de contorno (2.3) temos que

$$\varphi(0,t) = S(t)u(0) \Rightarrow 0 = S(t)u(0),$$

e assumindo $S(t) \neq 0$, segue que $u(0) = 0$. Prosseguindo de forma análoga chegamos ao seguinte resultado:

$$v(0) = v_x(L) = u_x(L) + v(L) = 0.$$

Agora, levando (2.5) e (2.6) em (2.1) - (2.2) temos o seguinte,

$$\begin{aligned}
\rho_1 S^{''}(t)u(x) - \kappa(u_{xx}(x) + v_x(x))S(t) &= 0,\\
\rho_2 S^{''}(t)v(x) - (bv_{xx}(x) + \kappa(u_x(x) + v(x))S(t) &= 0.
\end{aligned}$$

Fazendo a separação de variáveis obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{S^{''}(t)}{S(t)} = \frac{\kappa(u_{xx}(x) + v_x(x)}{\rho_1 u(x)} &= -\lambda,\\
\frac{S^{''}(t)}{S(t)} = \frac{bv_{xx}(x) - \kappa(u_x(x) + v(x))}{\rho_2 v(x)} &= -\lambda.
\end{aligned}$$

Dessa igualdade tiramos o seguinte sistema de E.D.O's com as condições de contorno,

$$\kappa(u_{xx}(x) + v_x(x)) + \lambda\rho_1 u(x) = 0, \tag{2.7}$$

$$bv_{xx}(x) - \kappa(u_x(x) + v(x)) + \lambda\rho_2 v(x) = 0, \tag{2.8}$$

$$u(0) = v(0) = v_x(L) = 0, u_x(L) + v(L) = 0. \tag{2.9}$$

A partir de agora vamos determinar os autovalores λ para os quais o sistema (2.1) - (2.4) tenha solução não trivial.

2.1 Análise Espectral

Nesta seção, determinaremos uma solução particular do sistema (2.7) – (2.9).

Proposição 2.1 *O problema possui solução não trivial dada por*

$$u(x) = A\sin(\theta_n x) \quad e \quad v(x) = B\,(1 - \cos(\theta_n x)) \tag{2.10}$$

com $\frac{A}{B} = \frac{2}{\theta_n}$ *se ,e somente se* $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$*, sendo* $\theta_n = \frac{(2n+1)\pi}{L}$*,* $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Vemos claramente que as autofunções (2.10) satisfazem as condições (2.9) assim, segue de (2.7) que

$$\sin(\theta_n x)(-\kappa A\theta_n^2 + \kappa B\theta_n + \rho_1 A\lambda) = 0.$$

Como não queremos a solução nula então assumimos que $\sin(\theta_n x) \neq 0$, logo só podemos ter,

$$-\kappa A\theta_n^2 + B\kappa\theta_n + \rho_1\lambda A = 0. \tag{2.11}$$

Da mesma forma fazemos com a equação (2.8),

$$\rho_2 B(1-\cos(\theta_n x)) + bB\theta_n^2\cos(\theta_n x) - \kappa(A\theta_n\cos(\theta_n x) + B(1-\cos(\theta_n x)) = 0,$$

daí

$$\cos(\theta_n x)(bB\theta_n^2 - \kappa A\theta_n) + (1-\cos(\theta_n x))(\lambda\rho_2 B - \kappa B) = 0.$$

Assumindo que $\cos(\theta_n x) \neq 0$ e $1-\cos(\theta_n x) \neq 0$ então temos

$$\lambda\rho_2 B - \kappa B = 0 \tag{2.12}$$

$$bB\theta_n^2 - \kappa A\theta_n = 0. \tag{2.13}$$

A partir de (2.12) tiramos o valor de λ, dado por:

$$\lambda = \frac{\kappa}{\rho_2}. \tag{2.14}$$

De (2.11) e (2.13) tiramos, respectivamente, os seguintes quocientes ;

$$\frac{A}{B} = \frac{b\theta_n}{\kappa} \quad \text{e} \quad \frac{A}{B} = \frac{\kappa}{\kappa\theta_n^2 - \rho_1\lambda}. \tag{2.15}$$

Comparando eles temos:

$$\frac{b\theta_n}{\kappa} = \frac{\kappa}{\kappa\theta_2 - \rho_1\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{\kappa}{\rho_1}\theta_n^2 - \frac{\kappa^2}{b\rho_1}.$$

Reescrevemos da seguinte forma:

$$\lambda = \frac{\kappa}{\rho_1}\theta_n^2 - \frac{\kappa^2}{b\rho_1}\frac{\rho_2}{\rho_2} \Rightarrow \lambda = \frac{\kappa}{\rho_1}\theta_n^2 - \frac{\kappa}{\rho_2}\frac{\kappa\rho_2}{b\rho_1}.$$

Agora usando o valor de λ que é dado em (2.14) temos:

$$\frac{\rho_1}{\kappa}\lambda = \theta_n^2 - \lambda\frac{\rho_2}{b}.$$

Logo obtemos o autovalor indexado λ_n que é dado por

$$\lambda_n = \theta_n^2 \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}. \tag{2.16}$$

De umas das condições de (2.9) tem-se que $u_x(L) + v(L) = 0$, usando as autofunções (2.10) na mesma vemos que ela é satisfeita se $\dfrac{A}{B} = \dfrac{2}{\theta_n}$, comparando com o primeiro quociente dado por (2.15) resulta:

$$\frac{b\theta_n}{\kappa} = \frac{2}{\theta_n} \Rightarrow \theta_n^2 = \frac{2\kappa}{b}. \tag{2.17}$$

Agora, como os autovalores devem ser iguais, assumimos que $\lambda_n = \lambda$, usando (2.17) em (2.16) chegamos a seguinte igualdade:

$$\begin{aligned} \theta_n^2 \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1} &= \frac{\kappa}{\rho_2} \\ \theta_n^2 &= \frac{\kappa}{\rho_2} \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right) \\ \frac{2\kappa}{b} &= \frac{\rho_1}{\rho_2} + \frac{\kappa}{b} \end{aligned}$$

e assim concluímos que

$$\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}. \tag{2.18}$$

■

Com base na Proposição 2.1, $\lambda_n = \theta_n^2 \left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b} \right)^{-1}$ temos a solução do sistema $(2.1) - (2.4)$ via Série de Fourier.

Proposição 2.2 *A série de Fourier do sistema (2.1) - (2.4) é dado por*

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left(a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \right) \sin(\theta_n x) \tag{2.19}$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(a_n \cos(\sqrt{\lambda_n} t) + b_n \sin(\sqrt{\lambda_n} t) \right) (1 - \cos(\theta_n x)) \tag{2.20}$$

com λ_n dado por (2.16) e $\theta_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{L}$.

Demonstração: Da teoria das E.D.O's sabemos que a solução de $S''(t) + \lambda S(t) = 0$ é

$$S(t) = a\cos(\sqrt{\lambda} t) + b\sin(\sqrt{\lambda} t)$$

donde, pela Proposição 2.1 segue o resultado. ■

Capítulo 3

Desigualdade de Observabilidade

Este capítulo é dedicado a estudar as propriedades da energia e a desigualdade de observabilidade que determinaremos usando técnicas multiplicativas.

3.1 Energia do sistema

Vamos mostrar nesta seção que a energia do sistema $(2.1) - (2.4)$ é conservativa, isto é, que ela se mantém constante ao logo do tempo. Nesse sentido, dizemos que o sistema $(2.1) - (2.4)$ é conservativo.

Proposição 3.1 *(Conservação de Energia) Para todo $t \geq 0$, a energia de (2.1) - (2.4) será:*

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0$$

onde

$$E(t) = \int_0^L \frac{\rho_1}{2}\varphi_t^2 dx + \int_0^L \frac{\rho_2}{2}\psi_t^2 dx + \int_0^L \frac{b}{2}\psi_x^2 dx + \kappa \int_0^L \frac{1}{2}(\varphi_x + \psi)^2 dx. \tag{3.1}$$

Demonstração: De fato, sendo φ e ψ soluções de (2.1) - (2.4) multipliquemos a equação (2.1) por φ_t e (2.2) por ψ_t e integremos em $(0, L)$. Assim, resulta que

$$\begin{aligned} \int_0^L (\rho_1 \varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x)\, \varphi_t dx &= 0, \\ \int_0^L (\rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi))\, \psi_t dx &= 0. \end{aligned}$$

Usando as seguintes identidades: $\varphi_{tt}\varphi_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_t|^2$, $\psi_{tt}\psi_t = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi_t|^2$ e $\psi_{xt}\psi_x = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\psi_x|^2$, de onde obtemos

$$\begin{aligned}\int_0^L \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\varphi_t^2 dx - \kappa\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\varphi_t dx &= 0\\ \int_0^L \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\psi_t^2 dx - b\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\psi_x^2 dx + \kappa\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi_t dx &= 0.\end{aligned}$$

Somando as duas equações acima temos:

$$\int_0^L \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\varphi_t^2 dx + \int_0^L \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\psi_t^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2}\frac{bd}{dt}\psi_x^2 dx = \kappa\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\varphi_t dx - \kappa\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi_t dx. \tag{3.2}$$

Integramos por partes a primeira integral do lado direito de (3.2), deste modo

$$\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\varphi_t dx = \kappa\left[(\varphi_x(L,t)+\psi(L,t))\varphi_t(L,t) - (\varphi_x(0,t)+\psi(0,t))\varphi_t(0,t) - \int_0^L (\varphi_x+\psi)\varphi_{xt} dx\right].$$

E, pelas condições (2.3), resulta

$$\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x\varphi_t dx = -\kappa\int_0^L (\varphi_x+\psi)\varphi_{xt} dx. \tag{3.3}$$

Levando (3.3) em (3.2) temos

$$\int_0^L \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\varphi_t^2 dx + \int_0^L \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\psi_t^2 dx - \int_0^L \frac{1}{2}\frac{bd}{dt}\psi_x^2 dx + \kappa\int_0^L (\varphi_x+\psi)\left(\varphi_{xt}+\psi_t\right) dx = 0,$$

mais precisamente

$$\int_0^L \frac{\rho_1}{2}\frac{d}{dt}\varphi_t^2 dx + \int_0^L \frac{\rho_2}{2}\frac{d}{dt}\psi_t^2 dx + \int_0^L \frac{b}{2}\frac{d}{dt}\psi_x^2 dx + \kappa\int_0^L \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|\varphi_x+\psi|^2 dx = 0,$$

e por $\frac{d}{dt}$ ser linear podemos reescrever a equação acima como

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^L \frac{\rho_1}{2}\varphi_t^2 dx + \int_0^L \frac{\rho_2}{2}\psi_t^2 dx + \int_0^L \frac{b}{2}\psi_x^2 dx + \kappa\int_0^L \frac{1}{2}(\varphi_x+\psi)^2 dx\right) = 0,$$

fazendo

$$E(t) = \int_0^L \frac{\rho_1}{2}\varphi_t^2 dx + \int_0^L \frac{\rho_2}{2}\psi_t^2 dx + \int_0^L \frac{b}{2}\psi_x^2 dx + \kappa\int_0^L \frac{1}{2}(\varphi_x+\psi)^2 dx, \tag{3.4}$$

temos assim que

$$\frac{d}{dt}E(t) = 0.$$

Donde finalmente obtemos

$$E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0. \tag{3.5}$$

o que prova que a energia do sistema é conservada. ■

Teorema 3.1 *Para todo $T > 2C$ vale*

$$E(\varphi,\psi,0) \leq \frac{1}{T-2C}\left(\frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T \psi_t^2(L,t)dt + \rho_2\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dxdt\right) \tag{3.6}$$

qualquer que seja a solução do sistema (2.1)-(2.4), onde $\frac{1}{T-2C}$ é a constante de observabilidade.

Demontração: De fato, multiplicando a equação (2.1) por $x\varphi_x$ e integrando em $(0,L)\times(0,T)$ temos:

$$\begin{aligned}
\rho_1\int_0^T\int_0^L \varphi_{tt}x\varphi_x dxdt &= \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt\\
\rho_1\int_0^L\left(\varphi_t x\varphi_x\Big|_0^T - \int_0^T \frac{1}{2}x\frac{d}{dx}|\varphi_t|^2 dt\right)dx &= \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt\\
\rho_1\int_0^L \varphi_t x\varphi_x dx - \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L x\frac{d}{dx}|\varphi_t|^2 dxdt &= \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt.
\end{aligned}$$

Denotando por $X_\varphi(t) := \rho_1\int_0^L \varphi_t x\varphi_x dx$ obtemos

$$\begin{aligned}
X_\varphi(t)\Big|_0^T - \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\left(\int_0^L x\frac{d}{dx}|\varphi_t|^2 dx\right)dt &= \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt\\
X_\varphi(t)\Big|_0^T - \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\left(x\varphi_t\Big|_0^L - \int_0^L |\varphi_t|^2 dx\right)dt &= \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt.
\end{aligned}$$

Usando as condições dadas por (2.3) temos:

$$X_\varphi(t)\Big|_0^T - \frac{\rho_1 L}{2}\int_0^T \varphi_t^2(L,t)dt + \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L |\varphi_t|^2 dxdt = \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt. \tag{3.7}$$

Agora vamos multiplicar a equação (2.2) por $x\psi_x$ e integrar em $(0,L)\times(0,T)$, assim resulta

$$\underbrace{\rho_2\int_0^T\int_0^L \psi_{tt}x\psi_x dxdt}_{I_1}-\underbrace{b\int_0^T\int_0^L \psi_{xx}x\psi_x dxdt}_{I_2} = \underbrace{-\kappa\int_0^T\int_0^L(\varphi_x+\psi)x\psi_x dxdt}_{I_3}. \tag{3.8}$$

Agora calculamos separadamente cada integral acima, ou seja, I_1, I_2 e I_3 nessa ordem, assim

$$\begin{aligned} I_1 &= \rho_2\int_0^T\int_0^L \psi_{tt}x\psi_x dxdt = \rho_2\int_0^L\left(\psi_t x\psi_x\Big|_0^T-\int_0^T\frac{1}{2}x\frac{d}{dx}|\psi_t|^2dt\right)dx \\ &= \rho_2\int_0^L \psi_t x\psi_x dx\Big|_0^T-\rho_2\int_0^T\int_0^L\frac{1}{2}x\frac{d}{dx}|\psi_t|^2dxdt \\ &= \rho_2\int_0^L \psi_t x\psi_x dx\Big|_0^T-\frac{\rho_2}{2}\int_0^T\left(x|\psi_t|^2\Big|_0^L-\int_0^L|\psi_t|^2dx\right)dt. \end{aligned}$$

Usando as condições (2.3) e fazendo $Y_\psi(t) := \rho_2\int_0^L \psi_t x\psi_x dx$ conclui-se que:

$$I_1 = Y_\psi(t)\Big|_0^T-\frac{\rho_2 L}{2}\int_0^L\psi_t^2(L,t)dt+\frac{\rho_2}{2}\int_0^T\int_0^L|\psi_t|^2dxdt. \tag{3.9}$$

Para I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= b\int_0^T\int_0^L \psi_{xx}x\psi_x dxdt = b\int_0^T\left(\psi_x x\psi_x\Big|_0^L-\int_0^L\psi_x(x\psi_{xx}+\psi_x)dx\right)dt \\ I_2 &= bL\int_0^T\psi_x^2(L,t)dt-b\int_0^T\int_0^L(\psi_x+x\psi_{xx})\psi_x dxdt \\ I_2 &= bL\int_0^T\psi_x^2(L,t)dt-b\int_0^T\int_0^L|\psi_x|^2dxdt-\underbrace{b\int_0^T\int_0^L\psi_{xx}x\psi_x dxdt}_{I_2} \\ 2I_2 &= bL\int_0^T\psi_x^2(L,t)dt-b\int_0^T\int_0^L|\psi_x|^2dxdt. \end{aligned}$$

Assim, pelas condições (2.3) obtemos:

$$I_2 = -\frac{b}{2}\int_0^T\int_0^L|\psi_x|^2dxdt. \tag{3.10}$$

Finalmente, para I_3 temos

$$I_3 = -\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) x \psi_x dx dt = -\kappa \int_0^T \left((\varphi_x + \psi) x \psi \Big|_0^L - \int_0^L ((\varphi_x + \psi)_x x + (\varphi_x + \psi)) \psi dx \right) dt,$$

e das condições (2.3) resulta

$$I_3 = \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x x \psi dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt. \tag{3.11}$$

Agora, substituindo (3.9), (3.10) e (3.11) em (3.8) vem que:

$$\begin{aligned} Y_\psi(t)\Big|_0^T - \frac{\rho_2 L}{2} \int_0^L \psi_t^2(L,t) dt + \frac{\rho_2}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + \frac{b}{2} \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt = \\ \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi)_x \psi dx dt + \kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Por último, multiplicamos a equação (2.2) por ψ e integramos em $(0, L) \times (0, T)$ temos

$$\rho_2 \int_0^T \int_0^L \psi_{tt} \psi dx dt - b \int_0^T \int_0^L \psi_{xx} \psi dx dt = -\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt.$$

Integrando por partes os dois membros do lado esquerdo da equação acima

$$\begin{aligned} \rho_2 \int_0^L \left(\psi_t \psi \Big|_0^T - \int_0^T |\psi_t|^2 dt \right) dx - b \int_0^T \left(\psi_x \psi \Big|_0^L - \int_0^L |\psi_x|^2 dx \right) dt &= -\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt \\ \rho_2 \int_0^L \psi_t \psi dx \Big|_0^T - \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt - b \int_0^T \left(\psi_x \psi \Big|_0^L - \int_0^L |\psi_x|^2 dx \right) dt &= -\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt. \end{aligned}$$

Fazendo $Z_\psi(t) = \int_0^L \psi_t \psi dt$ e das condições (2.3) resulta

$$Z_\psi(t)\Big|_0^L - \rho_2 \int_0^T \int_0^L |\psi_t|^2 dx dt + b \int_0^T \int_0^L |\psi_x|^2 dx dt = -\kappa \int_0^T \int_0^L (\varphi_x + \psi) \psi dx dt. \tag{3.13}$$

Agora, somando (3.7), (3.12) e (3.13) membro a membro e fazendo $W(t) = X_\varphi(t) + Y_\psi(t) + Z_\psi(t)$ obtemos

$$W(t)\Big|_0^T - \frac{\rho_1 L}{2}\int_0^T \varphi_t^2(L,t)dt + \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L |\varphi_t|^2 dtdx - \frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T \psi_t^2(L,t)dt + \frac{\rho_2}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dtdx$$
$$+\frac{b}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_x|^2 dxdt - \rho_2\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dxdt + b\int_0^T\int_0^L |\psi_x|^2 dxdt = \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt +$$
$$\kappa\int_0^T\int_0^L ((\varphi_x+\psi)_x x + (\varphi_x+\psi))\psi dxdt - \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)\psi dxdt,$$

organizando e simplificando onde for possível resulta:

$$W(t)\Big|_0^T + \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L |\varphi_t|^2 dxdt + \frac{\rho_2}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dxdt + \frac{b}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_x|^2 dxdt + b\int_0^T\int_0^L |\psi_x|^2 dxdt = \frac{\rho_1 L}{2}\int_0^T \varphi_t^2(L,t)dt$$
$$+\frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T \psi_t^2(L,t)dt + \rho_2\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dxdt + \kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt + \kappa\int_0^T\int_0^L ((\varphi_x+\psi)_x x\psi dxdt \quad (3.14)$$

Observando que:

$$\kappa\int_0^T\int_0^L (\varphi_x+\psi)_x x\varphi_x dxdt + \kappa\int_0^T\int_0^L ((\varphi_x+\psi)_x x\psi dxdt = \frac{\kappa}{2}\int_0^T\int_0^L x\frac{d}{dx}|\varphi_x+\psi|^2 dxdt,$$

integrando por partes e usando as condições de contorno (2.3) obtemos

$$\frac{\kappa}{2}\int_0^T\int_0^L x\frac{d}{dx}|\varphi_x+\psi|^2 dxdt = -\frac{\kappa}{2}\int_0^T\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dxdt. \quad (3.15)$$

Usando a desigualdade de Young e em seguida a de Poincaré, $W(t)\Big|_0^T \leq -CE(0)$ e da observação acima (3.14) fica da seguinte maneira:

$$-2CE(0) + \frac{\rho_1}{2}\int_0^T\int_0^L |\varphi_t|^2 dtdx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dtdx + \frac{b}{2}\int_0^T\int_0^L |\psi_x|^2 dxdt + b\int_0^T\int_0^L |\psi_x|^2 dxdt + \frac{\kappa}{2}\int_0^T\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dxdt$$
$$\leq \frac{\rho_1 L}{2}\int_0^T \varphi_t^2(L,t)dt + \frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T \psi_t^2(L,t)dt + \rho_2\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dxdt,$$

assim

$$-2CE(0) + \int_0^T\left(\frac{\rho_1}{2}\int_0^L |\varphi_t|^2 dx + \frac{\rho_2}{2}\int_0^L |\psi_t|^2 dx + \frac{b}{2}\int_0^L |\psi_x|^2 dx + \frac{\kappa}{2}\int_0^L |\varphi_x+\psi|^2 dx\right)dt$$
$$\leq \frac{\rho_1 L}{2}\int_0^T \varphi_t^2(L,t)dt + \frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T \psi_t^2(L,t)dt + \rho_2\int_0^T\int_0^L |\psi_t|^2 dxdt.$$

Agora, usando (3.4) e o fato de que $E(t) = E(0), \quad \forall t \geq 0$, temos que $\int\limits_0^T E(t)dt = TE(0)$ e assim resulta que

$$E(0) \leq \frac{1}{T-2C}\left(\frac{\rho_1 L}{2}\int\limits_0^T \varphi_t^2(L,t)dt + \frac{\rho_2 L}{2}\int\limits_0^T \psi_t^2(L,t)dt + \rho_2 \int\limits_0^T\int\limits_0^L |\psi_t|^2 dxdt\right). \qquad (3.16)$$

Pelas soluções dadas em (2.19), observamos que $\varphi_t(L,t) = 0, \forall t \geq 0$. Portanto, resulta que

$$E(0) \leq \frac{1}{T-2C}\left(\frac{\rho_2 L}{2}\int\limits_0^T \psi_t^2(L,t)dt + \rho_2 \int\limits_0^T\int\limits_0^L |\psi_t|^2 dxdt\right), \qquad (3.17)$$

o que prova o Teorema.

3.2 Desigualdade de Ingham

Nesta seção usaremos a desigualdade de Ingham (ver capítulo 1) para reescrevermos a desigualdade (3.6) com somente um termo e sendo este termo o pontual. Antes, sabemos que a solução em série de Fourier do sistema (2.1) - (2.4) é dado por (2.19) e (2.20).

Lema 3.1 *Sendo as soluções do sistema (2.1) - (2.4) dadas na forma complexa por*

$$\varphi(x,t) = \sum_{n\geq 1} a_n e^{i\beta_n t} u, \qquad (3.18)$$

$$\psi(x,t) = \sum_{n\geq 1} b_n e^{i\beta_n t} v, \qquad (3.19)$$

onde $\beta_n = \sqrt{\lambda_n}$, $u(x) = A\sin(\theta_n x)$ *e* $v(x) = B\left(1-\cos(\theta_n x)\right)$ *são as autofunções associadas ao autovalor* $\lambda_n = \theta_n^2\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)^{-1}$ *com* $\theta_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{L}$. *Então, temos que*

$$\beta_{n+1} - \beta_n \geq \gamma > 0. \qquad (3.20)$$

Demonstração: Com efeito, basta calcular explicitamente o valor dado por β_n, ou seja

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} - \beta_n &= (\theta_{n+1} - \theta_n)\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)^{-1}} \\ &= \frac{2\pi}{L}\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)^{-1}}. \end{aligned}$$

Definimos $\gamma := \dfrac{2\pi}{L}\sqrt{\left(\frac{\rho_1}{\kappa} + \frac{\rho_2}{b}\right)^{-1}} > 0$, provando assim o Lema. ■

Proposição 3.2 *Para todo* $n, i \in \mathbb{N}$ *com* $\theta_n = (2n+1)\dfrac{\pi}{L}$ *valem as seguintes relações de ortogonalidade*

$$\int_0^L \sin(\theta_n x)\sin(\theta_i x)dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & , se \quad n = i \\ 0 & , se \quad n \neq i \end{cases} \tag{3.21}$$

e

$$\int_0^L \cos(\theta_n x)\cos(\theta_i x)dx = \begin{cases} \frac{L}{2} & , se \quad n = i \\ 0 & , se \quad n \neq i. \end{cases} \tag{3.22}$$

Demonstração: É imediato, basta ultilizar as seguintes transformações trigonométrica

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right) \quad \cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left(\cos(a+b) + \cos(a-b)\right),$$

se $n \neq i$ e, para $n = i$ usa-se

$$\sin^2(a) = \frac{1}{2}\left(1 - \cos(2a)\right), \quad \cos^2(a) = \frac{1}{2}\left(1 + \cos(2a)\right).$$

Vamos mostrar para (3.21) sendo a prova de (3.22) inteiramente análoga. Assim, para $n \neq i$ temos

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin(\theta_n x)\sin(\theta_i x)dx &= \int_0^L \frac{1}{2}\left(\cos((\theta_n - \theta_i)x) - \cos((\theta_n + \theta_i)x)\right) \\ &= \frac{1}{2(\theta_n - \theta_i)}\sin((\theta_n - \theta_i)x)\Big|_0^L - \frac{1}{2(\theta_n + \theta_i)}\sin((\theta_n + \theta_i)x)\Big|_0^L \\ &= \frac{1}{2(\theta_n - \theta_i)}\sin(2(n-i)\pi) - \frac{1}{2(\theta_n - \theta_i)}\sin(2((n+i)+1)\pi), \end{aligned}$$

logo

$$\int_0^L \sin(\theta_n x)\sin(\theta_i x)dx = 0.$$

Por outro lado, se $n = i$, temos

$$\int_0^L \sin(\theta_n x)\sin(\theta_n x)dx = \int_0^L \sin^2(\theta_n x)dx = \int_0^L \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\theta_n x)}{2}\right)dx,$$

e, portanto

$$\int_0^L \sin^2(\theta_n x)dx = \frac{L}{2}. \tag{3.23}$$

■

Agora estamos em condições de provar o principal resultado desse trabalho

Teorema 3.2 *Seja* $T > \dfrac{2\pi}{\gamma}$ *com* $\gamma = \dfrac{2\pi}{L}\sqrt{\left(\dfrac{\rho_1}{\kappa} + \dfrac{\rho_2}{b}\right)^{-1}}$ *e* $\beta_{n+1} - \beta_n \geq \gamma > 0$*. Logo existe uma constante positiva* $\widehat{C} > 0$ *tal que*

$$E(0) \leq \widehat{C} \int_0^T |\psi_t(L,t)|^2 dt \tag{3.24}$$

para toda solução φ *e* ψ *de (2.1) - (2.4).*

Prova: Consideremos φ e ψ solução de $(2.1) - (2.4)$ com dados iniciais $\varphi_0, \varphi_1, \psi_0, \psi_1$ e tomando $a_n = b_n = A_n = 1$. Assim, considerando (3.19) temos que

$$\frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T |\psi_t(L,t)|^2 dt = \frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T \left| 2i \sum_{n\geq 1} B_n \beta_n e^{i\beta_n t}\right|^2 dt = \frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T \left| \sum_{n\geq 1} 2B_n \beta_n e^{i\beta_n t}\right|^2 dt. \tag{3.25}$$

Seja $T > \dfrac{2\pi}{\gamma}$. Aplicando o Teorema 1.1 em (3.25) obtemos

$$\frac{1}{2}\rho_2 L C_1(T,\gamma) \sum_{n\geq 1} |2B_n\beta_n|^2 \leq \frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T |\psi_t(L,t)|^2 dt \leq \frac{1}{2}\rho_2 L C_2(T,\gamma)\sum_{n\geq 1} |2B_n\beta_n|^2. \tag{3.26}$$

Agora, sabemos que

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\rho_1|\varphi_1|^2 + \rho_2|\psi_1|^2 + b|\psi_{0x}|^2 + \kappa|\varphi_{0x} + \psi_0|^2\right) dx,$$

e tendo em vista as condições iniciais obtidas a partir das soluções $(3.18) - (3.19)$ temos assim que

$$\begin{aligned} 2E(0) = {} & \underbrace{\int_0^L \rho_1 \Big| \sum_{n\geq 1} \beta_n \sin(\theta_n x)\Big|^2 dx}_{S_1} + \underbrace{\int_0^L \rho_2 \Big| \sum_{n\geq 1} B_n\beta_n (1-\cos(\theta_n x))\Big|^2 dx}_{S_2} + \underbrace{\int_0^L b \Big| \sum_{n\geq 1} B_n\theta_n \sin(\theta_n x)\Big|^2 dx}_{S_3} + \\ & \underbrace{\int_0^L \kappa \Big| \sum_{n\geq 1} \theta_n \cos(\theta_n x) + \sum_{n\geq 1} B_n(1-\cos(\theta_n x))\Big|^2 dx}_{S_4}. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Agora faremos os cálculos para cada uma das parcelas acima, deste modo

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^L \rho_1 \Big| \sum_{n\geq 1} \beta_n \sin(\theta_n x) \Big|^2 dx \\ &= \int_0^L \rho_1 \sum_{n\geq 1} |\beta_n|^2 \sin^2(\theta_n x) dx + \int_0^L \rho_1 \sum_{n\neq i} \beta_n \beta_i \sin(\theta_n x)\sin(\theta_i x) dx \\ &= \rho_1 \sum_{n\geq 1} |\beta_n|^2 \int_0^L \sin^2(\theta_n x) dx + \rho_1 \sum_{n\neq i} \beta_n \beta_i \int_0^L \sin(\theta_n x)\sin(\theta_i x) dx, \end{aligned}$$

e usando a Proposição 3.2 temos

$$S_1 = \rho_1 \sum_{n\geq 1} |\beta_n|^2 \int_0^L \sin^2(\theta_n x) dx = \frac{\rho_1 L}{2} \sum_{n\geq 1} |\beta_n|^2.$$

Para S_2 obtemos

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_0^L \rho_2 \Big| \sum_{n\geq 1} B_n \beta_n (1-\cos(\theta_n x)) \Big|^2 dx \\ &= \rho_2 \sum_{n\geq 1} |B_n \beta_n|^2 \int_0^L (1-\cos(\theta_n x))^2 dx + \rho_2 \sum_{n\geq 1} B_n \beta_n B_i \beta_i \int_0^L (1-\cos(\theta_n x))(1-\cos(\theta_i x)) dx, \end{aligned}$$

donde temos como resultado

$$S_2 = \frac{3\rho_2 L}{2} \sum_{n\geq 1} |B_n \beta_n|^2 + \rho_2 L \sum_{n\neq i} B_n \beta_n B_i \beta_i. \tag{3.28}$$

Observamos que, para S_3 faz-se um cálculo análogo ao que foi feito em S_1, deste modo o resultado será

$$S_3 = \frac{bL}{2} \sum_{n\geq 1} |B_n \theta_n|^2. \tag{3.29}$$

Finalmente para S_4, assim

$$\begin{aligned} S_4 &= \int_0^L \kappa \Big| \sum_{n\geq 1} \theta_n \cos(\theta_n x) + \sum_{n\geq 1} B_n (1-\cos(\theta_n x)) \Big|^2 dx \\ &= \underbrace{\int_0^L \kappa \Big| \sum_{n\geq 1} \theta_n \cos(\theta_n x) \Big|^2 dx}_{H_1} + \underbrace{\int_0^L \kappa \Big| \sum_{n\geq 1} B_n (1-\cos(\theta_n x)) \Big|^2 dx}_{H_2} + 2\kappa \underbrace{\int_0^L \kappa \sum_{n\geq 1} \theta_n \cos(\theta_n x) \sum_{n\geq 1} B_n (1-\cos(\theta_n x)) dx}_{H_3}, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} H_1 &= \int_0^L \kappa\Big|\sum_{n\geq 1}\theta_n\cos(\theta_n x)\Big|^2 dx \\ &= \kappa\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^2\int_0^L \cos^2(\theta_n x)dx + \kappa\sum_{n\geq 1}\theta_n\theta_i\int_0^L \cos(\theta_n x)\cos(\theta_i x)dx, \end{aligned}$$

e usando a proposição 3.2 temos que

$$H_1 = \frac{\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^2. \tag{3.30}$$

Para H_2 é um cálculo análogo ao que foi feito para S_2, logo

$$H_2 = \frac{3\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n|^2 + \kappa L\sum_{n\neq i}B_nB_i, \tag{3.31}$$

e por fim, para H_3 temos

$$\begin{aligned} H_3 &= \int_0^L \kappa\sum_{n\geq 1}\theta_n\cos(\theta_n x)\sum_{n\geq 1}B_n(1-\cos(\theta_n x))dx \\ &= \sum_{n\geq 1}\theta_n\int_0^L \cos(\theta_n x)dx\sum_{n\geq 1}B_n - \sum_{n\geq 1}B_n\theta_n\int_0^L \cos^2(\theta_n x)dx + \sum_{n\neq i}\theta_n\int_0^L \cos(\theta_n x)\cos(\theta_i x)dx, \end{aligned}$$

ou seja,

$$H_3 = -\frac{L}{2}\sum_{n\geq 1}B_n\theta_n. \tag{3.32}$$

Agora, substituindo H_1, H_2 e H_3 em S_4 temos

$$S_4 = \frac{\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^2 + \frac{3\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n|^2 + \kappa L\sum_{n\neq i}B_nB_i - \kappa L\sum_{n\geq 1}\theta_n. \tag{3.33}$$

Agora, substituindo os valores de S_1, S_2, S_3 e S_4 em (3.27) chegamos em

$$\begin{aligned} 2E(0) = \frac{\rho_1 L}{2}\sum_{n\geq 1}|\beta_n|^2 + \frac{3\rho_2 L}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n\beta_n|^2 + \rho_2 L\sum_{n\neq i}B_n\beta_nB_i\beta_i + \frac{bL}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n\theta_n|^2 + \\ \frac{\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^2 + \frac{3\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n|^2 + \kappa L\sum_{n\neq i}B_nB_i - \kappa L\sum_{n\geq 1}\theta_n. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Observe que, usando a desigualdade de Young na seguinte série

$$\begin{aligned} \rho_2 L\sum_{n\neq i}B_n\beta_nB_i\beta_i &\leq \frac{\rho_2 L}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n\beta_n|^2 + \frac{\rho_2 L}{2}\sum_{n\neq i}|B_i\beta_i|^2 \\ &\leq \rho_2 L\sum_{n\geq 1}|B_n\beta_n|^2. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Analogamente, para a série

$$\kappa L\sum_{n\neq i}B_nB_i\leq \kappa L\sum_{n\geq 1}|B_n|^2. \tag{3.36}$$

Agora usando (3.35) e (3.36) em (3.34) temos

$$2E(0)\leq \frac{\rho_1 L}{2}\sum_{n\geq 1}|\beta_n|^2+\frac{5\rho_2 L}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n\beta_n|^2+\frac{bL}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n\theta_n|^2+\frac{5\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|B_n|^2+\frac{\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^2-\kappa L\sum_{n\geq 1}B_n\theta_n,$$

e sabendo que $\beta_n=\theta_n\sqrt{C}$, $B_n=\dfrac{\theta_n}{2}$ com $\theta_n=(2n+1)\dfrac{\pi}{L}$ e $C=\left(\dfrac{\rho_1}{\kappa}+\dfrac{\rho_2}{b}\right)^{-1}$ e substituindo na última desigualdade acima e simplificando temos como resultado

$$2E(0)\leq \frac{\rho_1 LC}{2}\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^2+\left(\frac{5C\rho_2 L}{2}+\frac{bL}{2}\right)\frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}|\theta_n^2|^2+\frac{5\kappa L}{2}\sum_{n\geq 1}\frac{1}{4}|\theta_n|^2. \tag{3.37}$$

Sabendo que $\theta_n^2\leq\theta_n^4$, consequentemente $\sum\limits_{n\geq 1}|\theta_n|^2\leq\sum\limits_{n\geq 1}|\theta_n|^4$ e, usando esta estimativa em (3.37) chegamos em

$$2E(0)\leq \frac{L}{2}\left(\rho_1 C+\frac{5C\rho_2+b+5\kappa}{4}\right)\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^4,$$

e definindo $J:=\dfrac{L}{2}\left(\rho_1 C+\dfrac{5C\rho_2+b+5\kappa}{4}\right)$ temos por fim que

$$2E(0)\leq J\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^4. \tag{3.38}$$

Agora, usando na relação (3.26) e sendo $B_n=\dfrac{\theta_n}{2}$ e $\beta_n=\theta_n\sqrt{C}$ temos

$$\frac{1}{2}\rho_2 CLC_1(T,\gamma)\sum_{n\geq 1}|\theta_n|^4\leq\frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T|\psi_t(L,t)|^2dt, \tag{3.39}$$

de (3.38) temos

$$\frac{1}{2}\rho_2 CLC_1(T,\gamma)\frac{2E(0)}{J}\leq\frac{\rho_2 L}{2}\int_0^T|\psi_t(L,t)|^2dt,$$

e fazendo $\widehat{C}=\dfrac{J}{CC_1(T,\gamma)}$ chegamos em (3.24) provando assim o Teorema. ■

Considerações finais

No início desse trabalho descrevemos desigualdade de Ingham e fizemos uma pequena aplicação no sistema de Timoshenko no que diz respeito a desigualdade de observabilidade. Tal trabalho foi desenvolvido ao longo do período de 2014 até metade de 2015 no qual fui aluno de Iniciação Científica no Projeto Integrando Amazônia (CNPq) e com isso pude estudar muitos outros assuntos pertinentes para poder ter um bom entendimento. Foi muito bom poder trabalhar nessa área da matemática. Existem muitos tópicos a serem desenvolvido, este trabalho foi só um pouco do que se tem a descobrir e com certeza haverá muitas oportunidades para que isso se concretize.

Referências Bibliográficas

[1] Djairo Guedes de Figueiredo, **Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais**. 4º Edição. Rio de Janeiro, IMPA (2005).

[2] Rafael Iório e Valéria Iório, **Equações Diferenciais Parciais, uma introdução**. Projeto Euclides, (2010).

[3] J. E. Lagnese and J. L. Lions. **Modelling Analysis and Control of Thin Plates**. Masson. 1988.

[4] J.A. Infante and E. Zuazua, **Boundary Observability for the Space-discretizations of the One-dimensional Wave Equation**. Mathematical Modelling and Numerical Analysis, 33. 407 – 438. (1999).

[5] F.D. Araruna and E. Zuazua, **Controllability of the Kirchhoff system for beams as limit of the Mindlin-Tmimoshenko one**. Mathematical Modelling and Numerical Analysis.

[6] A.E. Ingham., **Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series**.Mathematische Zeitschrift, 41:367-379, 1936.