UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Nara Michele Fontes de Oliveira

ESTUDO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE E APLICAÇÕES À RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E INTEGRAIS

Belém - Pa
2013

Nara Michele Fontes de Oliveira

ESTUDO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE E APLICAÇÕES À RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E INTEGRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Rogelio Daniel Benavides Guzman.

Belém - Pa
2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

NARA MICHELE FONTES DE OLVEIRA

ESTUDO DA TRANSFORMADA DE LAPLACE E APLICAÇÕES À RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS E INTEGRAIS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

____

Orientador: Prof. Dr. Rogelio Daniel Benavides Guzman.

____

Prof. Dr. José Antônio Moraes Vilhena

____

Prof. Msc. Adam Oliveira da Silva

DATA DA AVALIAÇÃO: ______/______/______

CONCEITO: __________________

Dedico este trabalho a toda minha família, especialmente aos meus avós Raimundo Oliveira, Raimunda Oliveira e à minha mãe Nair Oliveira, aos quais serei grata por toda minha vida.

Agradecimentos

A Deus, por todas as minhas conquistas, pois sem as suas bênçãos eu não poderia alcançar, por todas as pessoas que me enviou e que me ensinaram muito no decorrer da minha graduação, por me ajudar sempre, por ser meu amigo mais fiel e por todas as alegrias que tive, que tenho e que ainda terei.

Aos meus pais Nair e Miguel pela compreensão, apoio e por terem me proporcionado o ingresso na Universidade.

A todos os meus professores pelos seus ensinamentos, especialmente ao meu orientador, professor Rogelio Guzman, por sua paciência, atenção, e apoio durante o período de orientação.

Aos meus colegas de turma pelos momentos de descontração.

A todas as pessoas que contribuíram direta ou indiretamente para a minha formação durante os quatro anos e meio que passei nesta instituição e por todas as coisas maravilhosas que me foram concedidas durante período.

"...Com abelhas ou sem abelhas, os problemas interessantes da Matemática têm, para o pesquisador, a doçura do mel."

(Ary Quintela)

Resumo

Uma das aplicações da transformada de Laplace é a resolução de equações diferenciais e integrais. Com ela resolvemos desde problemas simples envolvendo Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) lineares de primeira e de segunda ordem a problemas relacionados com modelos matemáticos mais complexos, tais como as equações de onda e de calor unidimensionais, ambas Equações Diferenciais Parciais (EDPs) lineares de segunda ordem. Este método consiste basicamente em transformar estas equações em equações algébricas, que naturalmente são mais fáceis de resolver, com exceção das EDPs que na verdade são transformadas em EDOs simples. Para mostrar a utilidade deste método, neste trabalho resolveremos diversos problemas envolvendo estas equações, para isso veremos algumas definições importantes, bem como demonstrações de diversos teoremas seguidos por conjuntos graduais de exemplos que irão ilustrar e ampliar o estudo desta transformada.

Palavras-chave: Transformada de Laplace. Equações diferenciais. Equações integrais

Sumário

Introdução

Muitos problemas em matemática aplicada recaem na resolução de equações diferenciais lineares de primeira e de segunda ordem. Estas equações descrevem a maneira como certas quantidades variam com o tempo tal como: a corrente de um circuito elétrico, as vibrações de uma membrana elástica ou o fluxo de calor através um condutor isolado e resolve-las muitas vezes pode não ser tarefa fácil, por isso, neste trabalho estudaremos um método que permite resolver tais equações de maneira muito eficiente, trata-se de um operador integral denominado transformada de Laplace. Este método consiste em três passos principais:

1º) Um dado problema "difícil"é transformado em uma equação "simples".

2º) A equação "simples"é resolvida por manipulações algébricas.

3º) A solução da equação "simples"é transformada novamente para obter a solução desejada.

Assim a transformada de Laplace reduz o problema de resolver uma equação diferencial ao de resolver um problema algébrico. Na verdade, além das inúmeras aplicações à resolução de equações diferenciais ela também pode ser aplicada à resolução de equações integrais e integro-diferenciais. Com o objetivo de mostrar estas utilidades, neste trabalho resolveremos diversos problemas de valor inicial e de valor na fronteira para estes tipos de equações, dentre os quais destacaremos:

- Resolução de sistemas de equações diferenciais ordinárias
- Resolução de equações integrais
- Resolução de equações diferenciais parciais

Para resolver todos eles, primeiramente nós iremos estabelecer as bases teóricas desta transformada.

No primeiro capítulo, reunimos alguns conceitos importantes para o desenvolvimento da teoria bem como propriedades básicas da transformada de Laplace com as quais vamos obter um número suficiente de transformadas de funções elementares.

No segundo capítulo, a fim de estender o nosso estudo, demonstraremos dois importantes resultados, o primeiro envolvendo a função gama (Euler) e o segundo as funções periódicas. Neste, também resolveremos alguns problemas de valores iniciais para sistemas de equações diferenciais ordinárias, equações integro-diferenciais e para certos tipos de equações integrais. Para tanto, estudaremos propriedades fundamentais no que diz respeito a cada uma destas aplicações.

O terceiro capítulo é dedicado à aplicação da transformada de Laplace à resolução de equações diferenciais parciais com condições de fronteira. Nosso principal objetivo é a resolução das equação das equações de onda e de calor unidimensionais, por isso, inicialmente faremos uma breve exposição da classificação das EDPs lineares básicas de segunda ordem e em seguida, estudaremos o método da transformada de Laplace para estas equações.

1 A Transformada de Laplace

1.1 Definição da Transformada de Laplace

Definição 1.1. Suponha que f é uma função a valores reais ou complexos da variável (tempo) $t > 0$ e s é um parâmetro real ou complexo. Definimos a *transformada de Laplace* de f como

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\, dt \tag{1.1}$$

sempre que o limite exista e seja finito.

Quando o limite acima existe a integral é dita convergente. Se o limite não existe, a integral é dita divergente e não existe a transformada de Laplace definida para f. Naturalmente, o parâmetro s deve ser escolhido de forma que a integral (1.1) convirja.

O operador $\mathcal{L}$, chama-se *transformação de Laplace* e associa a uma função f de variável t uma função F de variável s. Isto é,

$$\mathcal{L}(f(t)) = F(s),$$

de modo que $F(s)$ denota a transformada de Laplace da função f

Exemplo 1.1. Seja $f(t) = 1$ para $t > 0$, então

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(1) = \int_0^\infty e^{-st} 1\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \bigg|_0^\tau \right) = \lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s} \right),$$

isto é,

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s} \qquad s > 0. \tag{1.2}$$

Este mesmo resultado é obtido quando s é um número complexo, neste caso, para que a integral convirja devemos tomar $\mathcal{R}e(s) > 0$. Para ver isto, utilizaremos a Fómula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\,\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta, \qquad \theta \text{ real.}$$

Primeiramente, vamos verificar que para $s = x + iy \neq 0$ também vale a igualdade

$$\int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \left(\frac{e^{-st}}{-s} \bigg|_0^\tau \right). \tag{1.3}$$

Para simplificar o nosso cálculo, desconsideremos o sinal negativo e os limites de integração. Assim, vamos provar que

$$\int e^{st}\,dt = \frac{e^{st}}{s}. \tag{1.4}$$

Pela Fórmula de Euler,

$$\begin{aligned}
\int e^{st}\,dt &= \int e^{(x+iy)t}\,dt = \int e^{xt}\cos yt\,dt + i\int e^{xt}\mathrm{sen}\,yt\,dt. \\
&= \frac{e^{xt}}{x^2+y^2}\left[(x\cos\ yt + y\mathrm{sen}\,yt) + i(x\mathrm{sen}\,yt - y\cos yt)\right]. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{e^{st}}{s} &= \frac{e^{(x+iy)t}}{x+iy} \\
&= \frac{e^{xt}(\cos\ yt + i\mathrm{sen}\,yt)(x-iy)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{e^{xt}}{x^2+y^2}\left[(x\cos\ yt + y\mathrm{sen}\,yt) + i(x\mathrm{sen}\,yt - y\cos\ yt)\right]. \qquad (1.6)
\end{aligned}$$

Comparando (1.5) e (1.6) obtemos (1.4) portanto, vale a igualdade (1.3).

Observe que pela fórmula de Euler resulta

$$\left|e^{i\theta}\right| = 1.$$

Isto implica que

$$\lim_{\tau\to\infty}\left|e^{-s\tau}\right| = \lim_{\tau\to\infty} e^{-x\tau} = 0$$

para $\mathcal{R}e(s) = x > 0$. Portanto, voltando à fómula (1.3) temos que

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dt = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s} \qquad \mathcal{R}e(s) = x > 0.$$

Exemplo 1.2. Seja $f(t) = e^{iwt}$, $t > 0$ e w uma constante. Então

$$\mathcal{L}(e^{iwt}) = \int_0^\infty e^{-st}e^{iwt}\,dt = \lim_{\tau\to\infty}\left(\left.\frac{e^{(iw-s)t}}{iw-s}\right|_0^\tau\right) = \lim_{\tau\to\infty}\left(\frac{e^{(iw-s)\tau}}{iw-s} - \frac{1}{iw-s}\right),$$

isto é,

$$\mathcal{L}(e^{iwt}) = \frac{1}{s-iw} \qquad (\mathcal{R}e(s) > 0),$$

pois,

$$\lim_{\tau\to\infty}|e^{iw\tau}e^{-s\tau}| = \lim_{\tau\to\infty} e^{-x\tau} = 0, \qquad x = \mathcal{R}e(s) > 0.$$

Analogamente, verificamos que

$$\mathcal{L}\left(e^{-iwt}\right)=\frac{1}{s+iw}\qquad(\mathcal{R}e(s)>0).$$

Devemos continuar desta forma e obter a transformada de uma função após a outra diretamente da definição?. A resposta é não, e a razão é que a transformada de Laplace tem muitas propriedades que são úteis para este propósito. Uma das propriedades mais elementares da transformada de Laplace é a linearidade e será demonstrada na seção 1.6, mas por enquanto, vamos assumi-la como sendo válida.

Exemplo 1.3. Calculemos $\mathcal{L}(\operatorname{sen} wt)$ e $\mathcal{L}(\cos\ wt)$, w real.

Sabemos que

$$\operatorname{sen} wt=\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2i}$$

portanto, usando o fato de que a transformada de Laplace é uma operação linear

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} wt)=\frac{\mathcal{L}(e^{iwt})-\mathcal{L}(e^{-iwt})}{2i}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{s-iw}-\frac{1}{s+iw}\right),$$

isto é,

$$\mathcal{L}(\operatorname{sen} wt)=\frac{w}{s^2+w^2}\qquad(\mathcal{R}e(s)>0).$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}(\cos wt)=\frac{s}{s^2+w^2}\qquad(\mathcal{R}e(s)>0),$$

onde $\cos wt=\left(e^{iwt}+e^{-iwt}\right)/2$.

Embora o operador de Laplace possa ser aplicado a um grande número de funções, há algumas para as quais a integral (1.1) não converge, por exemplo, para a função $f(t)=e^{t^2}$ temos que

$$\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{-st}e^{t^2}dt=\lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau e^{t^2-st}dt=\infty.$$

Por isso, antes de prosseguirmos com o estudo da transformada de Laplace, uma das primeiras questões com que temos que nos preocupar é descobrir para quais funções a transformada de Laplace existe. Apresentaremos então um teorema que estabelece a existência da transformada de Laplace para uma classe de funções bastante ampla. Com este objetivo, inicialmente, definiremos funções contínuas por partes e funções de ordem exponencial.

1.2 Continuidade Por Partes

A primeira consideração da nossa classe de funções que possuem uma transformada de Laplace bem definida, é que estas sejam contínuas por partes. Para definirmos este tipo de continuidade vejamos primeiramente a seguinte definição.

Definição 1.2. Uma função f tem uma descontinuidade de salto em um ponto t_0, se ambos os limites

$$\lim_{t \to t_0^-} f(t) = f(t_0^-) \quad e \quad \lim_{t \to t_0^+} f(t) = f(t_0^+)$$

existem, são finitos e $f(t_0^-) \neq f(t_0^+)$.

O fato de $t \to t_0^-$ e $t \to t_0^+$ quer dizer que $t \to t_0$ tanto pela direita quanto pela esquerda, como mostra a figura abaixo.

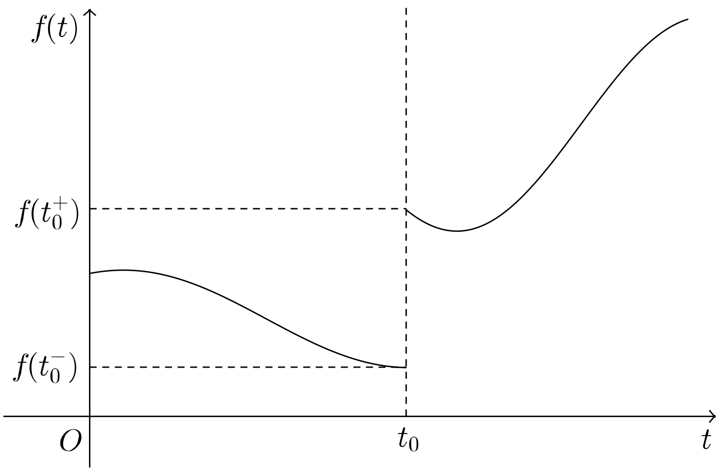

Figura 1.1 –

Exemplo 1.4. A função

$$f(t) = \begin{cases} e^{-\frac{t^2}{2}}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \qquad \text{(Figura 1.2)},$$

tem uma descontinuidade de salto em $t = 0$ pois, $\lim_{t \to 0^-} f(t) = 0$ e $\lim_{t \to 0^+} f(t) = 1$.

Algumas funções, apresentam descontinuidades que não são de salto.

Exemplo 1.5. A função

$$f(t) = \frac{1}{t-5} \qquad \text{(Figura 1.3)},$$

tem uma descontínuidade no ponto $t = 5$ que não é de salto, uma vez que, os limites laterais $\lim_{t \to 5^-} f(t)$ e $\lim_{t \to 5^+} f(t)$ não são finitos.

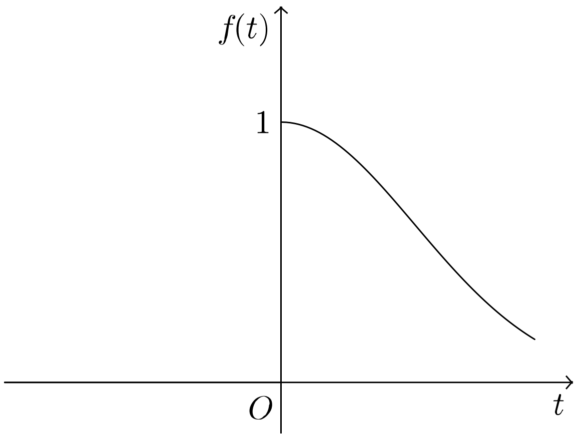

Figura 1.2 –

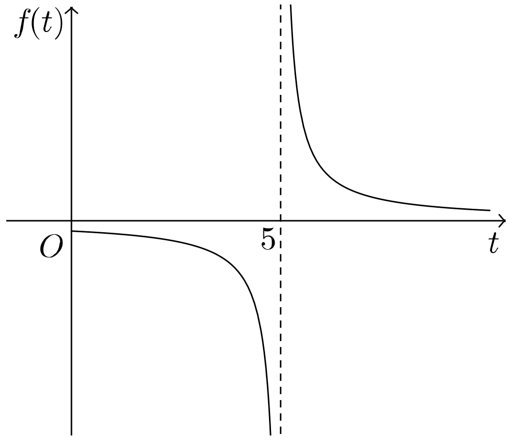

Figura 1.3 –

Definição 1.3. Uma função f é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ se satisfaz as condições

(i) $\lim_{t \to 0^+} f(t) = f(0^+)$ existe

(ii) f é contínua em cada intervalo finito $(0, b)$ exceto possivelmente em um número finito de pontos $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n$ em $(0, b)$ em que f tem uma descontinuidade de salto, como mostra a figura abaixo.

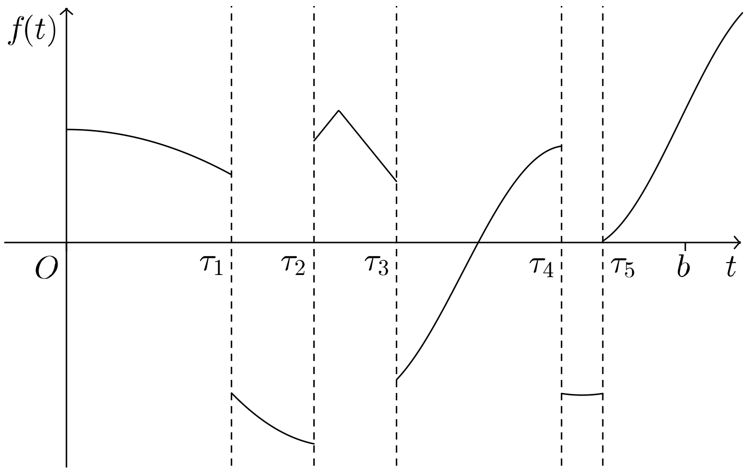

Figura 1.4 –

A função do Exemplo 1.4 é contínua por partes, já a função do Exemplo 1.5 não é contínua por partes pois como vimos, a decontinuidade em $t = 5$ não é de salto.

Uma consequência importante da definição de continuidade por partes, é que além da função f ser contínua em cada sub-intervalo $(\tau_i, \tau_{i+1}), i = 1, 2, ..., n-1$, ela também é limitada sobre cada um deles, ou seja,

$$|f(t)| \leq M_i, \quad \forall t \in (\tau_i, \tau_{i+1}), \qquad i = 1, 2, ..., n-1,$$

$M_i > 0$ uma constante finita.

Para integrar uma função contínua por partes no intervalo de 0 até b integramos em cada sub-intervalo, ou seja,

$$\int_0^b f(t)\,dt = \int_0^{\tau_1} f(t)\,dt + \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\,dt + \cdots + \int_{\tau_n}^{b} f(t)\,dt$$

1.3 Ordem Exponencial

A segunda cosideração da nossa classe de funções que possuem uma transformada de Laplace bem definida tem a ver com a taxa de crescimento das funções.

Definição 1.4. Uma função f tem ordem exponencial α se existem constantes $M > 0$ e α tais que para algum $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0.$$

Normalmente, indicamos esta ordem, pelo menor valor de α que satisfaz a definição, ou seja, aquele a partir do qual a função f não cresce mais rapidamente que a função $Me^{\alpha t}$.

Exemplo 1.6.

(i) Funções do tipo e^{at}, a real, têm ordem exponencial $\alpha = a$, pois,

$$\left|e^{at}\right| \leq Me^{at}$$

para qualquer $M \geq 1$.

(ii) As funções $\operatorname{sen} t$ e $\cos\, t$ têm ordem exponencial $\alpha = 0$, pois,

$$|\operatorname{sen} t| \leq M \quad \text{e} \qquad |\cos\, t| \leq M$$

para qualquer $M \geq 1$.

(iii) A função t^n, $n \in \mathbb{N}$, tem ordem exponencial $\alpha = 1$.

De fato, consideremos a série

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

então

$$\frac{t^n}{n!} < e^t.$$

Isto é,

$$t^n < n!e^t.$$

Assim,

$$|t^n| < Me^t \qquad t \geq t_0 \geq 0.$$

para qualquer $M \geq n!$.

1.4 A Classe $\mathcal{L}$

O resultado que se segue estabelece a existência da transformada de Laplace para uma classe de funções bastante ampla.

Teorema 1.1. *Se f é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e é de ordem exponencial α então, a transformada de Laplace $\mathcal{L}(f(t))$ existe para $\mathcal{R}e(s) > \alpha$ e converge absolutamente.*

Demonstração. Como f tem ordem exponencial

$$|f(t)| \leq M_1 e^{\alpha t}, \qquad t \in [t_0, \infty), \tag{1.7}$$

α real. Além disso, como f é contínua por partes em $[0, t_0]$ f é limitada neste intervalo. Tomando M_2 como sendo a maior das constantes que limitam a função nos sub-intervalos,

$$|f(t)| \leq M_2, \quad t \in (0, t_0). \tag{1.8}$$

$e^{\alpha t}$ admite mínimo no intervalo $[0, t_0]$, seja $m = \min e^{\alpha t}$ neste intervalo, então

$$0 < m < e^{\alpha t}, \qquad t \in (0, t_0).$$

Daí

$$1 < \frac{e^{\alpha t}}{m}, \qquad t \in (0, t_0).$$

Disto e de (1.8) temos

$$|f(t)| \leq \frac{M_2}{m} e^{\alpha t} = M_3 e^{\alpha t}, \qquad t \in (0, t_0). \tag{1.9}$$

Segue de (1.7) e de (1.9) que para $M \geq \text{máx}\{M_1, M_3\}$

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \qquad t \in (0, \infty).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\tau} \left| e^{-st} f(t) \right| dt &= \int_0^{\tau} e^{-xt} \left| f(t) \right| dt, \\
&\leq \int_0^{\tau} e^{-xt} \left(M e^{\alpha t} \right) \\
&= M \int_0^{\tau} e^{-(x-\alpha)t} dt \\
&= \left. \frac{M e^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)} \right|_0^{\tau} \\
&= \frac{M}{x-\alpha} - \frac{M e^{-(x-\alpha)\tau}}{x-\alpha}.
\end{aligned}$$

Quando $\tau \to \infty$,

$$\int_0^{\infty} \left| e^{-st} f(t) \right| dt \leq \frac{M}{x-\alpha} \qquad \mathcal{R}e(s) = x > \alpha. \tag{1.10}$$

Logo, a transformada de Laplace converge absolutamente [1] e portanto converge.

□

Exemplo 1.7. Consideremos $f(t) = e^{at}$, a real. Esta função é contínua sobre $[0, \infty)$ e tem ordem exponencial $\alpha = a$. Então

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \int_0^{\infty} e^{-st} e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left. \frac{e^{-(s-a)t}}{-(s-a)} \right|_0^{\infty},$$

isto é,

$$\mathcal{L}(e^{at}) = \frac{1}{s-a} \qquad (\mathcal{R}e(s) > a).$$

Obtemos este mesmo resultado quando a é um número complexo e $\mathcal{R}e(s) > \mathcal{R}e(a)$.

Exemplo 1.8. Consideremos $f(t) = t$, $t \geq 0$. Esta função é contínua e tem ordem exponencial $\alpha = 1$. Logo

$$\mathcal{L}(t) = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = \left. \frac{-t e^{-st}}{s} \right|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{1}{s} \mathcal{L}(1),$$

[1] Dizemos que a Transformada de Laplace converge absolutamente se

$$\lim_{\tau \to \infty} \int_0^{\tau} \left| e^{-st} f(t) \right| dt$$

existe.

isto é

$$\mathcal{L}(t) = \frac{1}{s^2} \qquad (\mathcal{R}e(s) > 0). \tag{1.11}$$

Integrando por partes duas vezes, verificamos que

$$\mathcal{L}(t^2) = \int_0^\infty e^{-st}t^2 dt = \frac{2}{s^3} \qquad (\mathcal{R}e(s) > 0).$$

De maneira geral,

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}} \qquad (\mathcal{R}e(s) > 0), \tag{1.12}$$

para $n = 1, 2, 3, ...$ Para ver isto, utilizaremos indução sobre n.

Se $n = 1$ temos (1.11). Supondo que vale para todo inteiro positivo n, então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(t^{n+1}) &= \int_0^\infty e^{-st}t^{n+1}dt \\
&= \left.\frac{-t^{n+1}e^{-st}}{s}\right|_0^\infty + \frac{(n+1)}{s}\int_0^\infty e^{-st}t^n dt \\
&= \frac{(n+1)}{s}\mathcal{L}(t^n) \\
&= \frac{(n+1)}{s}\frac{n!}{s^{n+1}} \\
&= \frac{(n+1)!}{s^{n+2}}.
\end{aligned}$$

Na verdade, a fórmula (1.12) também vale para $n = 0$, pois, $0! = 1$, o resultado é mesmo que aquele obtido no Exemplo1.1. No contexto da função gama (capítulo 2), veremos que esta fórmula pode ser estendida para valores não inteiros de n.

As condições estabelecidas pelo teorema anterior, são suficientes para a existência da transformada de Laplace de uma certa classe de funções, contudo devemos notar que há funções que não satisfazem essas condições e ainda assim possuem transformada de Laplace.

Exemplo 1.9. Consideremos

$$f(t) = 2te^{t^2}\cos(e^{t^2}).$$

Esta função é contínua (produto entre funções contínuas) sobre $[0, \infty)$, mas não tem ordem exponencial, pois, não existem constantes $M > 0$ e α tais que para algum $t_0 \geq 0$ $|e^{t^2}| \leq Me^{\alpha t}$, $t \geq t_0$. Porém

$$\mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}2te^{t^2}\cos(e^{t^2})dt$$

existe, pois, utilizando integração por partes, encontramos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)) &= e^{-st}\text{sen}(e^{t^2})\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty e^{-st}\text{sen}(e^{t^2})dt \\ &= -\text{sen}(1) + s\mathcal{L}(\text{sen}(e^{t^2})) \qquad (\mathcal{R}e(s) > 0)\end{aligned}$$

e $\mathcal{L}(\text{sen}(e^{t^2}))$ existe, pois, $\text{sen}(e^{t^2})$ satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1.

Como podemos observar, há uma grande classe de funções que possuem transformada de Laplace. A classe L, como à denotamos, é definida como:

$$L = \{f : (0, \infty) \to \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C} : \exists\, \mathcal{L}(f)\}\,.$$

Isto é, L é a classe das funções reais ou complexas definidas no intervalo $(0, \infty)$ para as quais a transformada de Laplace existe. Seguramente, nesta classe existem não só funções que satisfazem as hipóteses do teorema mas também aquelas que não satisfazem uma ou ambas as hipóteses.

1.5 Convergência Uniforme

Para as funções que satisfazem as condições do Teorema 1.1 a transformada de Laplace converge absolutamente, isto é, $\int_0^\infty |e^{-st}f(t)|\,dt$ converge. Vamos provar que para tais funções vale também a convergência uniforme da integral $\int_0^\infty e^{-st}f(t)\,dt$.

Para f de ordem exponencial, existem constantes $M > 0$ e α tais que para algum $t_0 \geq 0$,

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}, \qquad t \geq t_0.$$

Então

$$\begin{aligned}\left|\int_{t_0}^\infty e^{-st}f(t)dt\right| &\leq \int_{t_0}^\infty \left|e^{-st}f(t)\right|dt \\ &= \int_{t_0}^\infty e^{-xt}\,|f(t)|\,dt \\ &\leq M\int_{t_0}^\infty e^{-(x-\alpha)t}dt \\ &= \left.\frac{Me^{-(x-\alpha)t}}{-(x-\alpha)}\right|_{t_0}^\infty \\ &= \frac{Me^{-(x-\alpha)t_0}}{x-\alpha},\end{aligned}$$

para $x = \mathcal{R}e(s) > \alpha$. Tomando $x \geq x_0 > \alpha$ obtemos uma cota para a última expressão:

$$\frac{Me^{-(x-\alpha)t_0}}{x-\alpha} \leq \frac{Me^{-(x_0-\alpha)t_0}}{x_0-\alpha}.$$

Note que quanto maior o valor de t_0, o termo do lado direito desta desigualdade vai ficando arbitrariamente pequeno. Isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que

$$\left|\int_{t_0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| < \epsilon, \qquad t_0 \geq T$$

para todos os valores de s com $\mathcal{R}e(s) \geq x_0 > \alpha$. Portanto, a transformada de Laplace converge uniformemente.[1]

A seguir, conheceremos uma propriedade geral da transformada de Laplace.

Teorema 1.2. *Se f é contínua por partes sobre $[0, \infty)$ e tem ordem exponencial α, então*

$$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) \to 0$$

quando $\mathcal{R}e(s) \to \infty$.

Demonstração. Por (1.10)

$$\left|\int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| \leq \frac{M}{x-\alpha}, \qquad (\mathcal{R}e(s) = x > \alpha).$$

Portanto, quando $x \to \infty$

$$F(s) \to 0$$

□

Qualquer função sem este comportamento não pode ser a transformada de Laplace de alguma função f. Por exemplo

$$\frac{s-1}{s+1}, \quad \frac{e^s}{s} \quad \text{e} \quad s^2,$$

pois,

$$\lim_{\mathcal{R}e(s)\to\infty} \frac{s-1}{s+1} = 1, \quad \lim_{\mathcal{R}e(s)\to\infty} \frac{e^s}{s} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\mathcal{R}e(s)\to\infty} s^2 = +\infty$$

1.6 Propriedades Básicas

A transformada de Laplace, possui propriedades gerais que facilitam o cálculo da transformada de muitas funções. Começamos enunciando uma de suas propriedades mais elementares.

[1] A transformada de Laplace é dita uniformemente convergente para s em algum domínio Ω no plano complexo, se para qualquer $\epsilon > 0$, existe um número τ_0 de tal modo que se $\tau \geq \tau_0$, então

$$\left|\int_{\tau}^{\infty} e^{-st} f(t)dt\right| < \epsilon$$

para valores de τ_0 suficientemente grandes e para todo s em Ω.

1.6.1 Linearidade

Teorema 1.3 (Linearidade)**.** *Se* $f_1 \in L$ *para* $\mathcal{R}e(s) > \alpha$*,* $f_2 \in L$ *para* $\mathcal{R}e(s) > \beta$*, então* $f_1 + f_2 \in L$ *para* $\mathcal{R}e(s) > max\,\{\alpha, \beta\}$*, e*

$$\mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2) \tag{1.13}$$

para constantes arbitrárias c_1*,* c_2*.*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(c_1 f_1 + c_2 f_2) &= \int_0^\infty e^{-st}(c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t))dt \\ &= c_1 \int_0^\infty e^{-st} f_1(t)dt \; + \; c_2 \int_0^\infty e^{-st} f_2(t)dt \\ &= c_1 \mathcal{L}(f_1) + c_2 \mathcal{L}(f_2) \qquad (f_1, f_2 \in L). \end{aligned}$$

□

Este resultado, permite que calculemos a transformada de algumas funções a partir de outras transformadas já conhecidas.

Exemplo 1.10. Calculemos $\mathcal{L}(\text{senh}\, wt)$ e $\mathcal{L}(\cosh\ wt)$.

Sabemos que

$$\text{senh}\, wt = \frac{e^{wt} - e^{-wt}}{2}.$$

Então

$$\mathcal{L}(\text{senh}\, wt) = \frac{1}{2}\left[\mathcal{L}(e^{wt}) - \mathcal{L}(e^{-wt})\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-w} - \frac{1}{s+w}\right),$$

isto é,

$$\mathcal{L}(\text{senh}\, wt) = \frac{w}{s^2 - w^2}.$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}(\cosh\ wt) = \frac{s}{s^2 - w^2},$$

onde $\cosh\ wt = (e^{wt} + e^{-wt})/2$.

Podemos calcular a transformada de Laplace de um polinômio de grau n

Exemplo 1.11. Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n$ um polinômio de grau n, temos que

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k$$

onde os coeficientes a_k são constantes. Tomando a transformada de Laplace termo a termo, obtemos

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{k=0}^{n} a_k \mathcal{L}(t^k) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k k!}{s^{k+1}}$$

por (1.12) e (1.13).

Para uma série infinita nem sempre podemos tomar a transformada de Laplace termo a termo.

Exemplo 1.12. Considere

$$f(t) = e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \quad -\infty < t < \infty. \tag{1.14}$$

Tomando a transformada de Laplace termo a termo desta série, obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \mathcal{L}(t^{2n}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{(2n)!}{s^{2n+1}} = \frac{1}{s} \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(-1)^n (2n)...(n+2)(n+1)}{s^{2n}}}_{u_n}.$$

Pelo teste da razão,

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{-2(2n+1)}{s^2} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2(2n+1)}{|s|^2} = \infty.$$

Isto é, a série diverge para todos os valores de s. Sabe-se porém, que $\mathcal{L}(e^{-t^2})$ existe, pois, a função e^{-t^2} satisfaz as hipóteses do Teorema 1.1, uma vez que, é contínua e limitada sobre $[0, \infty)$.

As condições para que possamos calcular a transformada de Laplace de uma série infinita tomando a transformada termo a termo, são estabelecidas pelo seguinte teorema.

Teorema 1.4. *Se*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

converge para $t \geq 0$, *com*

$$|a_n| \leq \frac{K\alpha^n}{n!},$$

para todo n *suficientemente grande e* $\alpha > 0$, $K > 0$, *então*

$$\mathcal{L}(f(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathcal{L}(t^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n n!}{s^{n+1}} \qquad (\mathcal{R}e(s) > \alpha).$$

Demonstração. Como $f(t)$ é dada por uma série de potências convergente, então f é contínua no intervalo $[0, \infty)$.

Vamos mostrar que

$$\left|\mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{L}(t^n)\right| \to 0$$

quando $N \to \infty$.

Observe que

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{L}(f(t)) - \sum_{n=0}^{N} a_n \mathcal{L}(t^n)\right| &= \left|\mathcal{L}\left(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right)\right| \\
&= \left|\int_0^\infty e^{-st}\left(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right) dt\right| \\
&\leq \int_0^\infty \left|e^{-st}\left(f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right)\right| dt \\
&= \int_0^\infty e^{-xt}\left|f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right| dt \\
&= \mathcal{L}_x\left(\left|f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right|\right) \qquad (x = \mathcal{R}e(s))\,,
\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
\left|f(t) - \sum_{n=0}^{N} a_n t^n\right| &= \left|\sum_{n=N+1}^{\infty} a_n t^n\right| \\
&\leq K \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} \\
&= K\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha t)^n}{n!}\right) \\
&= K\left(e^{\alpha t} - \sum_{n=0}^{N} \frac{(\alpha t)^n}{n!}\right),
\end{aligned}$$

para $t \geq 0$, $\alpha > 0$, e $K > 0$. Então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_x\left(\left|f(t)-\sum_{n=0}^{N}a_nt^n\right|\right) &\leq K\mathcal{L}_x\left(e^{\alpha t}-\sum_{n=0}^{N}\frac{(\alpha t)^n}{n!}\right)\\
&= K\left(\mathcal{L}_x(e^{\alpha t})-\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha^n}{n!}\,\mathcal{L}_x(t^n)\right)\\
&= K\left(\frac{1}{x-\alpha}-\sum_{n=0}^{N}\frac{\alpha^n}{x^{n+1}}\right)\\
&= K\left(\frac{1}{x-\alpha}-\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^n\right)\to 0 \qquad (\mathcal{R}e(s)=x>\alpha),
\end{aligned}
$$

quando $N\to\infty$, pois,

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{x}\right)^n=\frac{x}{x-\alpha}, \qquad \left|\frac{\alpha}{x}\right|<1 \quad \text{para} \quad x=\mathcal{R}e(s)>\alpha.
$$

Na verdade, estamos usando o fato de que a série geométrica tem a forma

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{z}^n=\frac{1}{1-\mathrm{z}}, \qquad |\mathrm{z}|<1. \tag{1.15}
$$

Portanto

$$
\mathcal{L}\left(f(t)\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=0}^{N}a_n\mathcal{L}(t^n)
$$

□

Note que os coeficientes da série (1.14) não satisfazem a hipótese do teorema.

Exemplo 1.13. Seja

$$
f(t)=\frac{\operatorname{sen} t}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nt^{2n}}{(2n+1)!}.
$$

Então

$$
|a_{2n}|=\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|=\frac{1}{(2n+1)!}<\frac{1}{(2n)!}, \quad n=0,1,2,\cdots.
$$

Logo, pelo teorema 1.4

$$
\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\mathcal{L}(t^{2n})}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{2n+1}}.
$$

Observe que por (1.15) temos

$$
\tan^{-1}x=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nt^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1} \qquad |x|<1.
$$

Assim, para $x = 1/s$

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)s^{2n+1}}, \qquad |s| > 1.$$

Portanto

$$\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \qquad |s| > 1.$$

Veja também o Exemplo 1.26.

1.6.2 Inversa da Transformada de Laplace

Definição 1.5. Se $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$, então a inversa da transformada de Laplace é denotada por

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t), \qquad t \geq 0.$$

Exemplo 1.14.

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{w}{s^2+w^2}\right) = \operatorname{sen} wt, \qquad t \geq 0.$$

Existe outra função $f(t) \neq \operatorname{sen} wt$ tal que $\mathcal{L}^{-1}(w/(s^2+w^2)) = f(t)$.

Exemplo 1.15. Consideremos

$$g(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} wt, & t > 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}.$$

Esta função, difere da função $\operatorname{sen} wt, t \geq 0$, por uma descontinuidade no ponto $t = 0$, contudo sabemos que quando alteramos uma função em um ponto o valor da integral de Riemann não se modifica. Assim,

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{w}{s^2+w^2}.$$

Portanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{w}{s^2+w^2}\right) = g(t), \quad t \geq 0.$$

O teorema a seguir nos diz quando a transformada de Laplace de uma função será única.

Teorema 1.5 (*Lerch*)(Unicidade da Transformada Inversa de Laplace)**.** *Suponha $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas sobre $[0, \infty)$ e de ordem exponencial α, se $\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(g(t))$ para todo $\mathcal{R}e(s) > \alpha$, então*

$$f(t) = g(t), \qquad \forall t \geq 0.$$

Neste caso a transformada inversa

$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$$

é única e podemos falar da inversa $\mathcal{L}^{-1}(F(s))$.

A demonstração do teorema acima pode ser encontrada na p. 183 da Referência [4]. Este diz que se nos restringirmos a funções que são contínuas em $[0,\infty)$ a transformada inversa será única. Isto é exatamente o que devemos fazer na seqüência e, portanto, nós escrevemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{w}{s^2+w^2}\right) = \operatorname{sen} wt \qquad t \geq 0.$$

Uma função descontínua de grande importância quando se trata da resolução de algumas equações diferenciais, e que por isso, deve ser levada em consideração é dada no exemplo a seguir.

Exemplo 1.16. Consideremos a função degrau unitário

$$u_a(t) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a. \end{cases}, \quad a \geq 0.$$

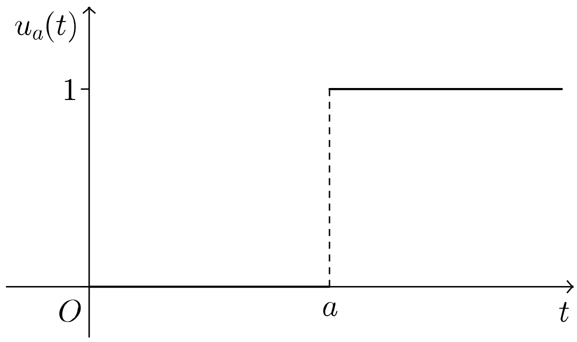

Figura 1.5 –

Temos que

$$\mathcal{L}(u_a(t)) = \int_0^\infty e^{-st}u_a(t)dt = \int_a^\infty e^{-st}dt = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_a^\infty,$$

isto é,

$$\mathcal{L}(u_a(t)) = \frac{e^{-as}}{s} \qquad (\mathcal{R}e(s) > 0).$$

Portanto

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right) = u_a(t). \tag{1.16}$$

A função degrau unitário também é comumente definida como

$$u_a(t) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}, \qquad a \geq 0$$

e é conhecida como função (degrau) de *Heaviside*. As duas definições de $u_a(t)$ têm a mesma transformada e por isso a partir desse ponto de vista são indistinguíveis.

A função

$$v_a(t) = \begin{cases} 1, & t > a \\ 0, & t \leq a \end{cases}$$

é uma outra variante da função degrau unitário. Assim, para esta função, poderiamos também ter escrito

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-as}}{s}\right) = v_a(t).$$

No entanto, o resultado (1.16) é mais apropriado.

Para denotar a função degrau unitário $u_a(t)$ também usaremos $u(t-a)$, para $a = 0$ escreveremos apenas $u(t)$.

Exemplo 1.17. Para $0 \leq a < b$, seja

$$u_{ab}(t) = \frac{1}{b-a}\ (u_a(t) - u_b(t)) = \begin{cases} 0, & t < a \\ \frac{1}{b-a}, & a \leq t < b \\ 0, & t \geq b \end{cases}.$$

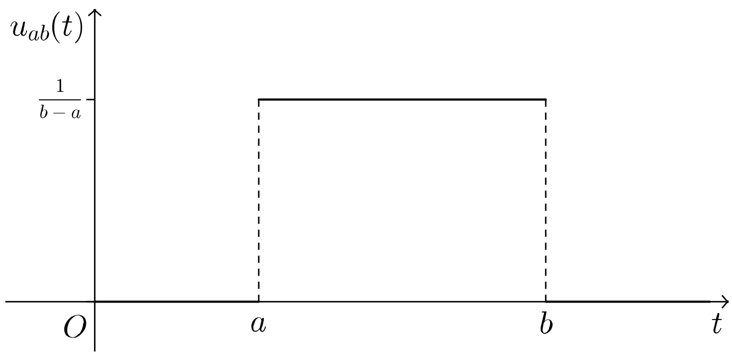

Figura 1.6 –

Temos que

$$\mathcal{L}(u_{ab}(t)) = \int_0^\infty e^{-st} u_{ab}(t) dt = \int_a^b e^{-st} \frac{1}{b-a}\, dt = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s(b-a)}.$$

Observação. Uma consequência da linearidade da transformada de Laplace é que $\mathcal{L}^{-1}$ também é uma operador linear.

De fato,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}(aF(s)+bG(s)) &= \mathcal{L}^{-1}(a\mathcal{L}(f(t))+b\mathcal{L}(g(t)))\\
&= \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(af(t)+bg(t)))\\
&= af(t)+bg(t)\\
&= a\mathcal{L}^{-1}(F(s))+b\mathcal{L}^{-1}(G(s))
\end{aligned}$$

Exemplo 1.18.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2(s-1)}+\frac{1}{2(s+1)}\right) &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+\frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}e^{t}+\frac{1}{2}e^{-t}=\cosh t, \quad t\geq 0.
\end{aligned}$$

1.6.3 Teorema da Translação

Os dois teoremas que apresentaremos agora, são de grande utilidade para a determinação da transformada de Laplace de algumas funções e também para o cálculo de suas inversas. No primeiro, a translação ocorre no domínio s já no segundo, a translação ocorre no domínio t.

Teorema 1.6 (Primeiro Teorema da Translação). *Se $F(s)=\mathcal{L}(f(t))$ para $\mathcal{R}e(s)>0$, então*

$$F(s-a)=\mathcal{L}(e^{at}f(t)) \qquad (a \textit{ real}, \mathcal{R}e(s)>a)$$

Demonstração. Para $\mathcal{R}e(s)>a$,

$$F(s-a)=\int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt=\mathcal{L}(e^{at}f(t))$$

□

Exemplo 1.19. Visto que

$$F(s)=\mathcal{L}(t)=\frac{1}{s^2} \qquad (\mathcal{R}e(s)>0).$$

Então

$$\mathcal{L}(e^{at}t)=F(s-a)=\frac{1}{(s-a)^2} \qquad (\mathcal{R}e(s)>a).$$

De maneira geral, como

$$F(s) = \mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}},$$

então

$$\mathcal{L}(t^n e^{at}) = F(s-a) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}, \qquad n = 0, 1, 2, ... \qquad (\mathcal{R}e(s) > a).$$

Disto, segue que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\right) = t^n e^{at}.$$

Assim, pela linearidade da inversa, obtemos a expressão

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)^{n+1}}\right) = \frac{1}{n!}\, t^n e^{at}, \quad t \geq 0.$$

Exemplo 1.20. Calculemos $\mathcal{L}(e^{2t}\cos 3t)$.

Visto que

$$F(s) = \mathcal{L}(\cos wt) = \frac{s}{s^2 + w^2}.$$

Então

$$\mathcal{L}(e^{at}\cos wt) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2} \qquad (\mathcal{R}e(s) > a).$$

Assim,

$$\mathcal{L}(e^{2t}\cos 3t) = \frac{s-2}{(s-2)^2 + 9}.$$

Visto também que

$$F(s) = \mathcal{L}(\text{sen}\, wt) = \frac{w}{s^2 + w^2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}(\cosh wt) = \frac{s}{s^2 - w^2}$$

$$F(s) = \mathcal{L}(\text{senh}\, wt) = \frac{w}{s^2 - w^2}.$$

Então, de maneira geral

$$\mathcal{L}(e^{at}\cos wt) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2 + w^2} \qquad (\mathcal{R}e(s) > a)$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\,\text{sen}\, wt) = F(s-a) = \frac{w}{(s-a)^2 + w^2} \qquad (\mathcal{R}e(s) > a)$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\cosh wt) = F(s-a) = \frac{s-a}{(s-a)^2-w^2} \qquad (\mathcal{R}e(s) > a)$$

$$\mathcal{L}(e^{at}\sinh wt) = F(s-a) = \frac{w}{(s-a)^2-w^2} \qquad (\mathcal{R}e(s) > a).$$

Exemplo 1.21. Calculemos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+4s+1}\right)$.

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+4s+1}\right) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s+2)^2-3}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2-3} - \frac{2}{(s+2)^2-3}\right) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s+2}{(s+2)^2-(\sqrt{3})^2}\right) - \frac{2}{\sqrt{3}}\,\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{(s+2)^2-(\sqrt{3})^2}\right) \\
&= e^{-2t}\cosh\sqrt{3}\,t - \frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{-2t}\,\mathrm{senh}\,\sqrt{3}\,t.
\end{aligned}$$

Teorema 1.7 (Segundo Teorema da Translação)**.** *Se* $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$*, então*

$$\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) = e^{-as}F(s) \qquad (a \geq 0).$$

Demonstração. Como

$$u_a(t) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a \end{cases} \qquad a \geq 0,$$

então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(u_a(t)f(t-a)) &= \int_0^\infty e^{-st}[u_a(t)f(t-a)]\,dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\,dt \\
&= \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)\,d\tau \qquad (\tau = t-a) \\
&= e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\,d\tau \\
&= e^{-as}F(s).
\end{aligned}$$

□

Exemplo 1.22. Calculemos $\mathcal{L}(g(t))$ para

$$g(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ (t-1)^2, & t \geq 1 \end{cases}.$$

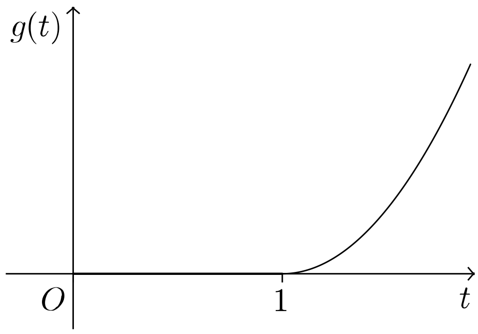

Figura 1.7 –

Pelo gráfico, percebemos que $g(t)$ é na verdade, a função $f(t) = t^2$, $t \geq 0$ transladada uma unidade para a direita. Portanto

$$\mathcal{L}(g(t)) = \mathcal{L}(u_1(t)(t-1)^2) = e^{-s}\mathcal{L}(t^2) = \frac{2\,e^{-s}}{s^3} \qquad (\mathcal{R}e(s) > 0).$$

O segundo teorema da translação também pode ser considerado na forma inversa

$$\mathcal{L}^{-1}(e^{-as}F(s)) = u_a(t)f(t-a),$$

para $F(s) = \mathcal{L}(f(t)), a \geq 0$.

Exemplo 1.23. Calculemos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-2s}}{s^2+1}\right)$.

Como

$$\frac{e^{-2s}}{s^2+1} = e^{-2s}\mathcal{L}(\text{sen}\, t).$$

Então

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-2s}}{s^2+1}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-2s}\mathcal{L}(\text{sen}\, t)\right) = u_2(t)\text{sen}(t-2), \qquad (t \geq 0).$$

1.6.4 Diferenciação e Integração da Transformada de Laplace

A principal aplicação da transformada de Laplace é a resolução de equações diferencias ordinárias lineares com coeficientes constantes. No entanto, ela também pode ser usada para resolver certas EDOs com coeficientes variáveis. Neste caso podemos contar com seguinte teorema:

Teorema 1.8. *Seja f contínua por partes sobre $[0, \infty)$, de ordem exponencial α e $\mathcal{L}(f(t)) = F(s)$. Então*

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = \mathcal{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right), \qquad n = 1, 2, 3, ...\,(s > \alpha). \tag{1.17}$$

Demonstração. Em virtude das hipótese, para $s \geq x_0 > \alpha$, justifica-se a mudança na ordem dos processos de integração e de derivação (cf. Ref.[2], p. 312) o seguinte cálculo.

$$\frac{d}{ds}F(s) = \frac{d}{ds}\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s}e^{-st}f(t)dt = \int_0^\infty -te^{-st}f(t) = \mathcal{L}\left(-tf(t)\right).$$

□

Como para qualquer $s > \alpha$, podemos encontrar algum x_0 satisfazendo $s \geq x_0 > \alpha$, o resultado anterior é válido para qualquer $s > \alpha$.

Observação. Utilizando indução sobre n provamos o caso geral d^n/ds^n, em virtude de $\mathcal{L}\left((-1)^n t^n f(t)\right)$ ser uniformemente convergente para $s \geq x_0 > \alpha$.

Exemplo 1.24. Calculemos $\mathcal{L}(t \operatorname{sen} wt)$ e $\mathcal{L}(t \cos\, wt)$.

Temos que

$$\mathcal{L}(t \operatorname{sen} wt) = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(\operatorname{sen} wt) = -\frac{d}{ds}\frac{w}{s^2+w^2},$$

isto é,

$$\mathcal{L}(t \operatorname{sen} wt) = \frac{2ws}{(s^2+w^2)^2}.$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}(t \cos\, wt) = \frac{s^2-w^2}{(s^2+w^2)^2}$$

Tomando a inversa em (1.17)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}F(s)\right) = (-1)^n t^n f(t).$$

Daí

$$f(t) = \frac{1}{(-1)^n t^n}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}F(s)\right).$$

Assim, para $n = 1$ obtemos

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}F(s)\right) \qquad (t > 0). \tag{1.18}$$

para $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s))$. Esta forma é útil para encontrar uma transformada inversa quando é mais fácil trabalhar com a derivada da transformada do que com a própria transformada.

Exemplo 1.25. Encontremos

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\log\frac{s+a}{s+b}\right).$$

Por (1.18) temos

$$f(t) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}\log\frac{s+a}{s+b}\right) = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b}\right) = \frac{1}{t}(e^{-bt} - e^{-at}).$$

No seguinte resultado veremos que a integral da transformada de Laplace é outra transformada de Laplace.

Teorema 1.9. *Se f é contínua por partes sobre $[0,\infty)$ e tem ordem exponencial α, com $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e tal que $\lim\limits_{t\to 0^+} f(t)/t$ existe, então*

$$\int_s^\infty F(x)dx = \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right) \qquad (s > \alpha).$$

Demonstração. Por definição,

$$F(x) = \int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt \qquad (x \text{ real}).$$

Integrando ambos os lados desta equação, obtemos

$$\int_s^\infty F(x)dx = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt\right)dx = \lim_{w\to\infty}\int_s^w \left(\int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt\right)dx.$$

Como $\int_0^\infty e^{-xt} f(t)dt$ converge uniformemente para $\alpha < s \leq x \leq w$, podemos inverter a ordem de integração (cf. Ref.[2], p. 310), isto é,

$$\begin{aligned}
\int_s^\infty F(x)dx &= \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty \left(\int_s^w e^{-xt} f(t)dx\right)dt \\
&= \lim_{w\to\infty}\int_0^\infty \left[\frac{e^{-xt}}{-t} f(t)\right]_s^w dt \\
&= \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt - \lim_{w\to\infty}\underbrace{\int_0^\infty e^{-wt}\frac{f(t)}{t}dt}_{G(w)} \\
&= \mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right),
\end{aligned}$$

pois, pelo Teorema 1.20 $\lim\limits_{w\to\infty} G(w) = 0$. A existência de $\mathcal{L}\left(f(t)/t\right)$ é assegurada pelas hipóteses.

$\square$

Exemplo 1.26. Calculemos $\mathcal{L}\left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{t}\right)$.

Temos que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \int_s^\infty \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{w\to\infty}\left(\tan^{-1} x\Big|_s^w\right) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} s. \tag{1.19}$$

Seja $f(x) = \tan^{-1} x + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, então

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0.$$

Isto significa que $f(x) = k$, k constante. Assim, como

$$\tan^{-1} 1 + \tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{2}$$

para $x = 1$, temos que

$$\tan^{-1} s + \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\pi}{2},$$

para $x = s$. Portanto, substituindo este resultado em (1.19) obtemos

$$\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (s > 0).$$

Exemplo 1.27. Calculemos $\mathcal{L}\left(\dfrac{\operatorname{senh} wt}{t}\right)$

Temos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\frac{\operatorname{senh} wt}{t}\right) &= \int_s^\infty \frac{w\,dx}{x^2-w^2} \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\tau\to\infty}\int_s^\tau \left(\frac{1}{x-w} - \frac{1}{x+w}\right)dx \\
&= \frac{1}{2}\lim_{\tau\to\infty}\Big[\ln(x-w) - \ln(x+w)\Big]_s^\tau \\
&= \frac{1}{2}\left(\lim_{\tau\to\infty}\ln\frac{\tau-w}{\tau+w} + \ln\frac{s+w}{s-w}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\ln 1 + \ln\frac{s+w}{s-w}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{s+w}{s-w} \qquad (s > |w|).
\end{aligned}$$

No segundo passo utilizamos o método das frações parciais.

2 Aplicações da Transformada de Laplace: Sistemas de Equações Diferenciais e Equações Integrais

O método da transformada de Laplace pode ser aplicado a vários tipos de problemas os quais incluem equações diferenciais ordinárias, equações integrais e integro-diferenciais. Para mostrar a utilidade deste método, neste capítulo resolveremos alguns problemas de valores iniciais para estas equações, para isto, estudaremos propriedades fundamentais da transformada de Laplace no que diz respeito a cada uma delas. Para estender o nosso estudo inicialmente faremos uma breve introdução a função gama e em seguida a funções periódicas, isto é, veremos como estas duas funções estão relacionadas com a transformada Laplace.

2.1 Função Gama

Na seção 1.4 vimos que

$$\mathcal{L}(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \qquad n = 1, 2, 3, ...,$$

equação (1.12). A fim de estender este resultado para valores não-inteiros de n, consideremos

$$\mathcal{L}(t^\nu) = \int_0^\infty e^{-st} t^\nu \, dt \qquad (\nu > -1).$$

Na verdade, para $-1 < \nu < 0$, a função $f(t) = t^\nu$ não é contínua por partes sobre $[0, \infty)$ uma vez que $\lim\limits_{t \to 0^+} t^\nu = +\infty$. No entanto, como a integral (imprópria) $\int_0^\tau t^\nu \, dt$ existe para $\nu > -1$, e $f(t) = t^\nu$ é limitada para valores grandes de t, a transformada de Laplace, $\mathcal{L}(t^\nu)$, existe.

Por uma mudança de variável, $x = st$ $(s > 0)$ em (1.12), temos que

$$\mathcal{L}(t^\nu) = \int_0^\infty e^{-x} \left(\frac{x}{s}\right)^\nu \frac{1}{s} \, dx = \frac{1}{s^{\nu+1}} \int_0^\infty x^\nu e^{-x} dx. \tag{2.1}$$

A quantidade

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \qquad (p > 0) \tag{2.2}$$

é conhecida como a *função gama* (*Euler*). Embora esta intergal imprópria exista e seja uma função contínua de $p > 0$, não é igual a nenhuma função elementar, veja a figura abaixo.

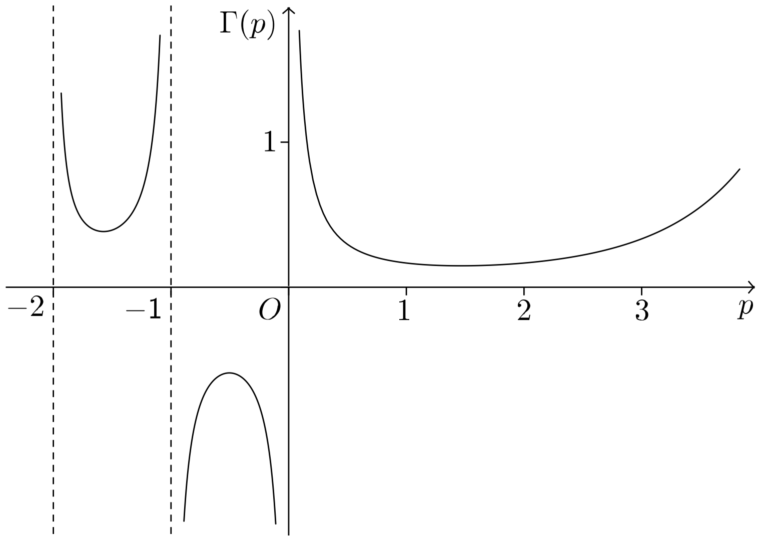

Figura 2.8 –

Façamos $p = \nu + 1$ em (2.2), então

$$\Gamma(\nu+1) = \int_0^\infty x^\nu e^{-x} dx \qquad (\nu > -1).$$

Substituindo em (2.1), obtemos

$$\mathcal{L}(t^\nu) = \frac{\Gamma(\nu+1)}{s^{\nu+1}}, \qquad \nu > -1,\ s > 0. \tag{2.3}$$

Para o exemplo que veremos a seguir, vamos provar o seguinte lema

Lema 2.1.

$$\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.4}$$

Demonstração. Façamos

$$I_P = \int_0^P e^{-x^2} dx = \int_0^P e^{-y^2} dy \qquad (P > 0).$$

Temos que

$$I_P^2 = \int_0^P e^{-x^2} dx \int_0^P e^{-y^2} dy = \int_0^P \int_0^P e^{-x^2-y^2} dxdy = \iint_{R_p} e^{-(x^2+y^2)} dxdy,$$

onde R_P é o quadrado $OACE$ de lado P como mostra a figura 2.9. Uma vez que o integrando é positivo, temos

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy \le I_P^2 \le \iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy, \tag{2.5}$$

onde R_1 e R_2 são as regiões do primeiro quadrante limitadas pelos círculos de raios P e $P\sqrt{2}$ respectivamente.

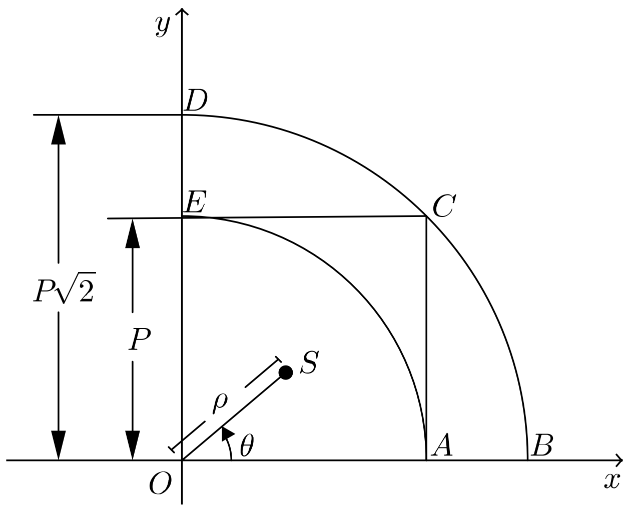

Figura 2.9 –

Façamos a mudança de variável

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\theta \end{cases} ; \qquad dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\theta)}\right| d\rho d\theta = \rho\, d\rho d\theta.$$

Para que o ponto S permaneça na região R_1 é suficiente que θ pertença ao intervalo $[0, \pi/2]$ e ρ ao intervalo $[0, P]$. Daí

$$\iint_{R_1} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \int_0^{\pi/2}\int_0^P e^{-\rho^2}\rho\, d\rho d\theta = \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^P e^{-\rho^2}\rho\, d\rho = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-P^2}\right).$$

Analogamente,

$$\iint_{R_2} e^{-(x^2+y^2)} dxdy = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2P^2}\right).$$

Portanto, voltando a (2.5) temos

$$\frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-P^2}\right) \leq I_P^2 \leq \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2P^2}\right)$$

ou

$$\sqrt{\frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-P^2})} \leq I_P \leq \sqrt{\frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-2P^2})}.$$

Como

$$\lim_{P\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-P^2})} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \lim_{P\to\infty}\sqrt{\frac{\pi}{4}\,(1 - e^{-2P^2})}$$

segue pelo teorema do confronto que

$$\lim_{P\to\infty} I_P = \lim_{P\to\infty}\int_0^P e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ou seja,

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Assim, o resultado (2.4) segue fazendo $x = u$.

□

Exemplo 2.1. Calculemos $\mathcal{L}\left(t^{-1/2}\right)$.

Por (2.3) temos que

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{s^{\frac{1}{2}}},$$

onde

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}}e^{-x}dx.$$

Por uma mudança de variável, $x = u^2$,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-u^2}du$$

e em virtude do Lema acima

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Portanto

$$\mathcal{L}\left(t^{-\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \qquad (s > 0) \tag{2.6}$$

e

$$\mathcal{L}^{-1}\left(s^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \qquad (t > 0). \tag{2.7}$$

Em alguns casos pode ser que tenhamos que determinar a transformada de Laplace de uma função periódica, a seguir veremos como isto pode ser feito.

2.2 Funções Periódicas

Se f é uma função periódica com período $T > 0$, então $f(t) = f(t+T)$ com $-\infty < t < \infty$ como mostra a figura 2.10.

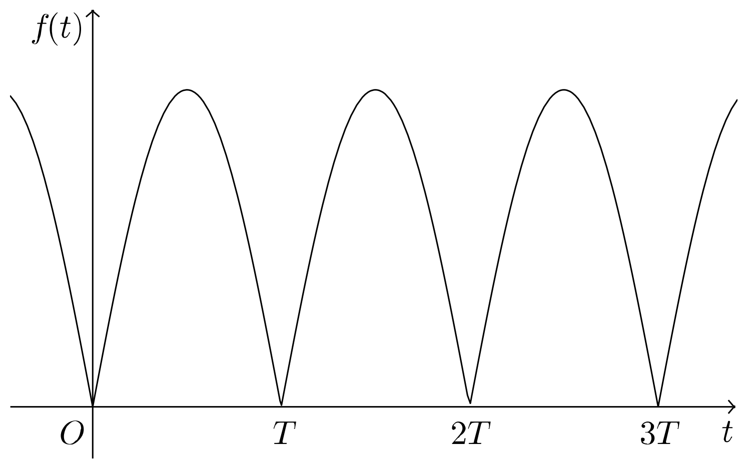

Figura 2.10 –

Para funções deste tipo,

$$F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)dt + \cdots .$$

Como

$$\int_0^T e^{-st} f(t)dt = \int_T^{2T} e^{-st} f(t)dt = \int_{2T}^{3T} e^{-st} f(t)dt = \cdots ,$$

pela periodicidade de f, temos que a transformada de Laplace de toda função periódica é apenas um múltiplo particular de

$$F_1(s) = \int_0^T e^{-st} f(t)dt$$

que é a transformada de Laplace da função f no primeiro período e zero fora deste período.

As funções sen t, cos t e tg t são periódicas, sendo que esta tem período $T = \pi$ e as outras duas têm período $T = 2\pi$.

A seguir veremos como determinar a tranaformada de Laplace de uma função periódica.

Teorema 2.1. *Se $F(s) = \mathcal{L}(f(t))$ e f é periódica de período T, então*

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s). \tag{2.8}$$

Demonstração.

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^T e^{-st} f(t)dt + \int_T^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{2.9}$$

Fazendo $\tau = t - T$ na última integral, obtemos

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+T)} f(\tau + T)d\tau = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau + T)d\tau.$$

Como f é periódica

$$\int_T^\infty e^{-st} f(t)dt = e^{-sT} \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)d\tau = e^{-sT} F(s).$$

Substituindo em (2.9), obtemos

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^T e^{-st} f(t)dt + e^{-sT} F(s) \\ &= F_1(s) + e^{-sT} F(s). \end{aligned}$$

Isto é,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} F_1(s).$$

□

Exemplo 2.2. Encontremos a transformada de Laplace da função onda quadrada representada na figura abaixo.

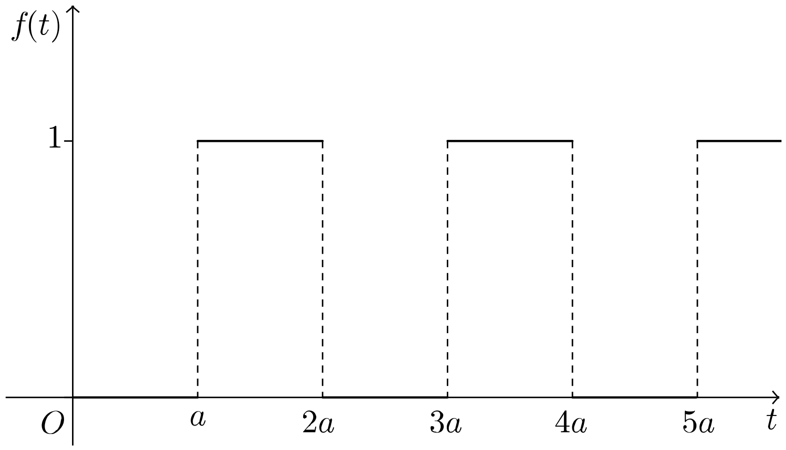

Figura 2.11 –

Esta função é limitada, contínua por partes e periódica de período $T = 2a$, então

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} F_1(s),$$

onde

$$F_1(s) = \int_a^{2a} e^{-st} dt = \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_a^{2a} = \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-2as}).$$

Portanto

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2as}} \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-2as}) = \frac{e^{-as}(1 - e^{-as})}{s(1 - e^{-as})(1 + e^{-as})} = \frac{e^{-as}}{s(1 + e^{-as})} = \frac{1}{s(1 + e^{as})}.$$

Observe que a expressão

$$\frac{1}{1-e^{-sT}}$$

na equação (2.8), é a soma da série geométrica de razão z $= e^{-sT}$ logo, também podemos escrever (2.8) como

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nsT} F_1(s) \qquad (x = \mathcal{R}e(s) > 0).$$

Assim, por exemplo para a função do Exemplo (2.2) temos

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-2nas} \frac{1}{s}(e^{-as} - e^{-2as}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-(2n+1)as}}{s} - \frac{e^{-(2n+2)as}}{s} \right) \\ &= \frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-2as}}{s} + \frac{e^{-3as}}{s} - \frac{e^{-4as}}{s} + \cdots \end{aligned}$$

ou seja,

$$\mathcal{L}(f(t)) = \mathcal{L}(u_a(t)) - \mathcal{L}(u_{2a}(t)) + \mathcal{L}(u_{3a}(t)) - \mathcal{L}(u_{4a}(t)) + \cdots .$$

Isto significa, que para as funções periódicas como a da função onda quadrada (Figura 2.11), que poderem ser escritas na forma

$$f(t) = u_a(t) - u_{2a}(t) + u_{3a}(t) - u_{4a}(t) + \cdots ,$$

também podemos tomar a transformada de Laplace termo a termo.

Exemplo 2.3. Consideremos a função seno de meia-onda retificada dada por

$$f(t) = \begin{cases} \text{sen}\, wt, & \frac{2n\pi}{w} < t < \frac{(2n+1)\pi}{w} \\ 0, & \frac{(2n+1)\pi}{w} < t < \frac{(2n+2)\pi}{w} \end{cases}, \quad n = 0, 1, 2, ..., \text{ (Figura 2.12).}$$

Esta função é limitada, continua por partes e periódica de período $T = 2\pi/w$, então

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1 - e^{-\frac{2\pi s}{w}}} F_1(s),$$

onde

$$F_1(s) = \int_0^{\frac{\pi}{w}} e^{-st} \text{sen}\, wt \, dt.$$

Utilizando integração por partes, obtemos

$$F_1(s) = \frac{e^{-st}}{s^2+w^2}(-s \operatorname{sen} wt - w\ \cos\ wt)\Big|_0^{\frac{\pi}{w}} = \frac{w}{s^2+w^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{w}}).$$

Portanto

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-\frac{2\pi s}{w}}}\frac{w}{s^2+w^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{w}}) = \frac{w}{(s^2+w^2)(1-e^{-\frac{\pi s}{w}})}.$$

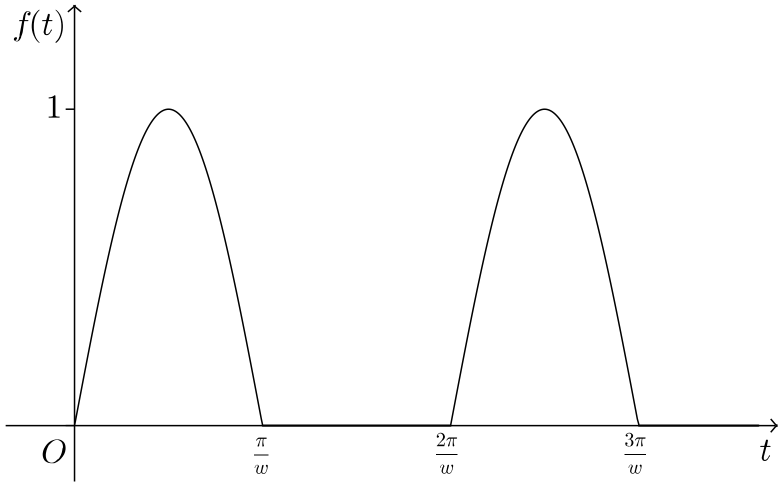

Figura 2.12 –

Exemplo 2.4. Consideremos a função de onda completa retificada $f(t) = |\operatorname{sen} wt|$ dada pela figura abaixo.

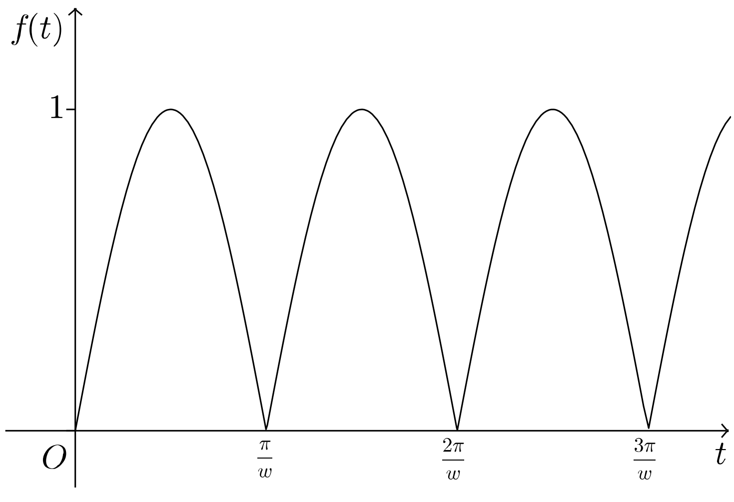

Figura 2.13 –

Esta função é periódica de período $T = \pi/w$, então

$$\mathcal{L}(f(t)) = \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi s}{w}}}F_1(s).$$

Como no exemplo anterior

$$F_1(s) = \int_0^{\frac{\pi}{w}} e^{-st} \text{sen}\, wt\, dt.$$

Assim, integrando por partes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f(t)) &= \frac{1}{1-e^{-\frac{\pi s}{w}}} \frac{w}{s^2+w^2}(1+e^{-\frac{\pi s}{w}}) \\
&= \frac{w}{s^2+w^2}\left(\frac{1+e^{-\frac{\pi s}{w}}}{1-e^{-\frac{\pi s}{w}}}\right) \\
&= \frac{w}{s^2+w^2}\left(\frac{e^{\frac{\pi s}{2w}}+e^{-\frac{\pi s}{2w}}}{e^{\frac{\pi s}{2w}}-e^{-\frac{\pi s}{2w}}}\right) \\
&= \frac{w}{s^2+w^2}\left(\frac{\cosh\frac{\pi s}{2w}}{\text{senh}\frac{\pi s}{2w}}\right) \\
&= \frac{w}{s^2+w^2} \coth\frac{\pi s}{2w}.
\end{aligned}$$

2.3 Transformada de Derivadas

Para aplicarmos a transformada de Laplace na resolução de equações diferenciais ordinárias necessitamos de uma fórmula para o cálculo da transformada da derivada. A seguir veremos que a transformada da derivada de f pode ser expressa em termos de $\mathcal{L}(f)$.

Teorema 2.2 (Teorema da Derivada)**.** *Suponha que f é contínua sobre $(0,\infty)$ e de ordem exponencial α e que f' é contínua por partes sobre $[0,\infty)$. Então*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0^+) \qquad (\mathcal{R}e(s) > \alpha). \tag{2.10}$$

Demonstração. Temos que

$$\mathcal{L}(f'(t)) = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t)dt = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \int_\delta^\tau e^{-st} f'(t)dt$$

Utilizando integração por partes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t)) &= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \left[e^{-st} f(t)\Big|_\delta^\tau + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)\, dt \right] \\
&= \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \tau\to\infty}} \left[e^{-s\tau} f(\tau) - e^{-s\delta} f(\delta) + s\int_\delta^\tau e^{-st} f(t)\, dt \right].
\end{aligned}$$

Como f tem ordem exponencial α

$$|f(\tau)| \leq Me^{\alpha\tau}.$$

Multiplicando por $e^{-x\tau}$, onde $x = \mathcal{R}e(s)$, temos

$$\left|e^{-s\tau} f(\tau)\right| \leq e^{-x\tau} M e^{\alpha\tau} = M e^{-(x-\alpha)\tau} \to 0, \tag{2.11}$$

quando $\tau \to \infty$, para $\mathcal{R}e(s) = x > \alpha$. Segue então que

$$\mathcal{L}(f'(t)) = -f(0^+) + s \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \qquad (\mathcal{R}e(s) > \alpha).$$

Portanto,

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0^+).$$

□

Observações:

(i) Observemos que $f(0^+)$ existe desde que $f'(0^+) = \lim_{t \to 0^+} f'(t)$ exista. É evidente que se f for contínua em $t = 0$, então $f(0^+) = f(0)$ e a fórmula (2.10) torna-se

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0). \tag{2.12}$$

(ii) Uma característica interessante do Teorema 2.2 é que podemos obter $\mathcal{L}(f')$ mesmo que f' não seja de ordem exponencial, pois, por hipótese, temos que $\mathcal{L}(f)$ existe. Vimos um caso semelhante no Exemplo 1.9, onde $f(t) = \text{sen}\,(e^{t^2})$.

Exemplo 2.5. Vamos calcular $\mathcal{L}(\text{sen}^2 wt)$ e $\mathcal{L}(\cos^2 wt)$.

Para $f(t) = \text{sen}^2 wt$ temos que

$$f'(t) = 2w\, \text{sen}\, wt \cos\, wt = w\, \text{sen}\, 2wt.$$

Então, por (2.12)

$$\mathcal{L}(w\, \text{sen}\, 2wt) = s\mathcal{L}(\text{sen}^2 wt) - \text{sen}^2 0.$$

Isto é,

$$\mathcal{L}(\text{sen}^2 wt) = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}(w\, \text{sen}\, 2wt) = \frac{w}{s} \frac{2w}{s^2 + 4w^2} = \frac{2w^2}{s(s^2 + 4w^2)}.$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}(\cos^2 wt) = \frac{1}{s}\, \mathcal{L}(-w\, \text{sen}\, 2wt) + \frac{1}{s} = -\frac{w}{s} \frac{2w}{s^2 + 4w^2} + \frac{1}{s} = \frac{s^2 + 2w^2}{s(s^2 + 4w^2)}.$$

Se $f(0) = 0$ na equação (2.12) então,

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)).$$

Assim, temos

$$\mathcal{L}^{-1}(sF(s)) = f'(t),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}\,(f(t))$.

Exemplo 2.6. Calculemos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2-a^2}\right)$.

Temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(s\,\frac{a}{a(s^2-a^2)}\right) = \frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left(s\,\frac{a}{s^2-a^2}\right),$$

onde $a/(s^2-a^2) = \mathcal{L}\,(\operatorname{senh} at)$. Logo

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2-a^2}\right) = \frac{1}{a}\,(\operatorname{senh} at)' = \cosh\, at.$$

Pode ocorrer que f tenha uma descontinuidade de salto em um ponto distinto da origem. Para este caso, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Suponha que f é contínua sobre $[0,\infty)$ exceto por uma descontinuidade de salto em $t = t_1 > 0$, e que f tenha ordem exponencial α com f' contínua por partes sobre $[0,\infty)$. Então*

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) - e^{-t_1 s}(f(t_1^+) - f(t_1^-)) \qquad (\mathcal{R}e(s) > \alpha). \tag{2.13}$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t)) &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \int_0^\tau e^{-st} f'(t)\,dt \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \left[\int_0^{t_1^-} e^{-st} f'(t)\,dt + \int_{t_1^+}^\tau e^{-st} f'(t)\,dt\right] \\
&= \lim_{\tau\to\infty} \left[e^{-st} f(t)\Big|_0^{t_1^-} + e^{-st} f(t)\Big|_{t_1^+}^\tau + s\int_0^\tau e^{-st} f(t)\,dt\right].
\end{aligned}$$

Como e^{-st} é contínua em $t = t_1 > 0$,

$$\lim_{t\to t_1^-} e^{-st} = \lim_{t\to t_1^+} e^{-st} = \lim_{t\to t_1} e^{-st} = e^{-st_1}.$$

Então

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f'(t)) &= \lim_{\tau\to\infty}\left[e^{-st_1}f(t_1^-) - f(0) + e^{-s\tau}f(\tau) - e^{-st_1}f(t_1^+) + s\int_0^\tau e^{-st}f(t)\,dt\right] \\
&= e^{-st_1}f(t_1^-) - f(0) - e^{-st_1}f(t_1^+) + s\mathcal{L}(f(t)) \qquad (\mathcal{R}e(s) > \alpha),
\end{aligned}$$

por (2.11). Isto é,

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - f(0) - e^{-st_1}(f(t_1^+) - f(t_1^-)).$$

Observação: se $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ são um número finito de descontinuidades de salto, a fórmula (2.13) torna-se

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s\mathcal{L}(f(t)) - t(0^+) - \sum_{k=1}^{n} e^{-st_k}(f(t_k^+) - f(t_k^-)). \tag{2.14}$$

□

No tratamento das equações diferenciais ordinárias precisamos conhecer também $\mathcal{L}(f''(t))$. Suponha que possamos aplicar a fórmula (2.12) para f''. Então

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s\mathcal{L}(f'(t)) - f'(0) = s\,[s\mathcal{L}(f(t)) - f(0)] - f'(0) = s^2\mathcal{L}(f(t)) - sf(0) - f'(0).$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}(f'''(t)) = s\mathcal{L}(f''(t)) - f''(0) = s^3\mathcal{L}(f(t)) - s^2f(0) - sf'(0) - f''(0)$$

De maneira geral, temos o seguinte teorema.

Teorema 2.4. *Suponha que $f(t)$,$f'(t)$, $\cdots$, $f^{(n-1)}(t)$ são contínuas sobre $(0,\infty)$ e de ordem exponencial, enquanto $f^{(n)}(t)$ é contínua por partes sobre $[0,\infty)$. Então*

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right) = s^n\mathcal{L}(f(t)) - s^{n-1}f(0^+) - s^{n-2}f'(0^+) - \cdots - f^{(n-1)}(0^+).$$

Exemplo 2.7. Calculemos a transformada de Laplace dos polinômios de Laguerre, definidos por

$$L_n(t) = \frac{e^t}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t}), \qquad n = 0, 1, 2, \cdots. \tag{2.15}$$

Façamos $y(t) = t^ne^{-t}$ em (2.15), então

$$\mathcal{L}(L_n(t)) = \mathcal{L}\left(e^t\frac{1}{n!}y^{(n)}\right) = \frac{1}{n!}\mathcal{L}\left(e^ty^{(n)}\right). \tag{2.16}$$

Seja $Y(s) = \mathcal{L}(y^{(n)})$. Pelo Teorema 1.6 (Primeiro Teorema da Translação)

$$\mathcal{L}\left(e^ty^{(n)}\right) = \frac{1}{n!}Y(s-1) \qquad (\mathcal{R}e(s) > 1). \tag{2.17}$$

Utilizando o Teorema 2.4 obtemos

$$Y(s) = s^n \mathcal{L}\left(y(t)\right) - s^{n-1}y(0^+) - s^{n-2}y'(0^+) - \cdots - y^{(n-1)}(0^+) = s^n \mathcal{L}\left(y(t)\right).$$

Assim, pelo primeiro teorema da translação

$$Y(s) = s^n \mathcal{L}(t^n e^{-t}) = s^n \frac{n!}{(s+1)^{n+1}},$$

visto que $\mathcal{L}(t^n) = n!/s^{n+1}$ em (1.12). Portanto, voltando à (2.17) temos que

$$\mathcal{L}\left(e^t y^{(n)}\right) = \frac{(s-1)^n n!}{s^{n+1}}.$$

Substituindo em (2.16) obtemos

$$\mathcal{L}\left(e^t y^{(n)}\right) = \frac{1}{n!}\frac{(s-1)^n n!}{s^{n+1}} = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \qquad (\mathcal{R}e(s) > 1).$$

2.3.1 Sistemas de Equações Diferenciais

O teorema da derivada na forma do Teorema 2.4 possibilita a utilização da transformada de Laplace como uma ferramenta para a resolução de equações diferenciais ordinárias. Entre as inúmeras aplicações desta transformada à EDOs, está a resolução de sistemas de equações diferenciais. Para ilustrar esta aplicação, vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.8. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = -\mathrm{z}, \\ \\ \dfrac{d\mathrm{z}}{dt} = y, \end{cases} \qquad y(0) = 1,\ \mathrm{z}(0) = 0. \tag{2.18}$$

Suponhamos que $y(t)$ e $\mathrm{z}(t)$ satisfazem as hipóteses do teorema (2.4). Aplicando a transformada de Laplace à ambos os lados da primeira e da segunda equação, isto é

$$\mathcal{L}(y') = -\mathcal{L}(\mathrm{z}),$$

e

$$\mathcal{L}(\mathrm{z}') = \mathcal{L}(y),$$

obtemos, a partir de (2.12) e das condições iniciais

$$s\mathcal{L}(y) - 1 = -\mathcal{L}(\mathrm{z}) \tag{2.19}$$

e

$$s\mathcal{L}(\mathrm{z}) = \mathcal{L}(y) \tag{2.20}$$

Substituindo (2.20) em (2.19), obtemos

$$s^2\mathcal{L}(\mathrm{z}) - 1 = -\mathcal{L}(\mathrm{z}),$$

ou seja,

$$\mathcal{L}(\mathrm{z}) = \frac{1}{s^2+1}.$$

Tomando a transformada inversa desta última equação e substituindo o resultado em uma das equações do sistema (2.18) obtemos

$$\mathrm{z} = \mathrm{sen}\, t \qquad \mathrm{e} \qquad y = \cos\, t,$$

respectivamente. Notamos facilmente que esta, é a solução desejada.

Exemplo 2.9. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} y' + \mathrm{z}' + y + \mathrm{z} = 1 \\ \qquad\quad y' + \mathrm{z} = e^t \end{cases} \qquad y(0) = -1,\ \mathrm{z}(0) = 2. \tag{2.21}$$

A partir da primeira equação e das condições iniciais temos

$$s\mathcal{L}(y) + 1 + s\mathcal{L}(\mathrm{z}) - 2 + \mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(\mathrm{z}) = \frac{1}{s} \tag{2.22}$$

e a partir da segunda, temos

$$s\mathcal{L}(y) + 1 + \mathcal{L}(\mathrm{z}) = \frac{1}{s-1}. \tag{2.23}$$

De (2.22) e (2.23) obtemos

$$\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(\mathrm{z}) = \frac{1}{s} \tag{2.24}$$

e

$$s\mathcal{L}(y) + \mathcal{L}(\mathrm{z}) = \frac{2-s}{s-1} \tag{2.25}$$

respectivamente. Subtraindo (2.24) de (2.25), obtemos

$$\mathcal{L}(y) = \frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2}.$$

Por decomposição em frações parciais,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(y) &= \frac{-s^2+s+1}{s(s-1)^2} \\
&= \frac{A}{s}+\frac{B}{s-1}+\frac{C}{(s-1)^2} \\
&= \frac{1}{s}-\frac{2}{s-1}+\frac{1}{(s-1)^2}.
\end{aligned}$$

Tomando a transformada inversa e substituindo o resuldo em uma das equações do sistema (2.21) obtemos

$$y = 1-2e^t+te^t \qquad \text{e} \qquad \mathrm{z} = 2e^t-te^t.$$

respectivamente.

Exemplo 2.10. Consideremos o sistema

$$\begin{cases} \mathrm{z}-y''+y = e^{-t}-1 \\ \mathrm{z}'+y'-y = -3e^{-t}+t \end{cases} \qquad \mathrm{z}(0)=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=-2. \tag{2.26}$$

A partir da primeira equação e das condições iniciais temos

$$\mathcal{L}(\mathrm{z})-s^2\mathcal{L}(y)+s-2+\mathcal{L}(y) = -\frac{1}{s(s+1)} \tag{2.27}$$

e a partir da segunda, temos

$$s\mathcal{L}(\mathrm{z})+s\mathcal{L}(y)-1-\mathcal{L}(y) = -\frac{-3s^2+s+1}{s^2(s+1)}. \tag{2.28}$$

De (2.27) e (2.28) obtemos

$$\mathcal{L}(\mathrm{z})-s^2\mathcal{L}(y)+\mathcal{L}(y) = \frac{-s^3+s^2+2s-1}{s(s+1)} \tag{2.29}$$

e

$$s\mathcal{L}(\mathrm{z})+s\mathcal{L}(y)-\mathcal{L}(y) = \frac{s^3-2s^2+s+1}{s^2(s+1)} \tag{2.30}$$

respectivamente. Resolvendo o sistema de equações (2.29) e (2.30), obtemos

$$\mathcal{L}(y) = \frac{s^2-s-1}{s^2(s+1)} = \frac{s^2}{s^2(s+1)} - \frac{s+1}{s^2(s+1)},$$

cancelando dá

$$\mathcal{L}(y) = \frac{1}{s+1}-\frac{1}{s^2}.$$

Tomando a transformada inversa e substituindo o resultado em uma das equações do sistema (2.26) obtemos

$$y = e^{-t} - t \qquad \text{e} \qquad z = t + e^{-t} - 1.$$

respectivamente.

2.4 Transformada de Integrais

Em certas equações diferenciais também é necessário calcular a transformada de Laplace de uma integral.

Teorema 2.5. *Se f é contínua por partes sobre $[0, \infty)$, de ordem exponencial $\alpha \geq 0$ e*

$$g(t) = \int_0^t f(u)du,$$

então

$$\mathcal{L}(g(t)) = \frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t)) \qquad (\mathcal{R}e(s) > \alpha). \tag{2.31}$$

Demonstração. Por definição,

$$\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)\, dt = \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} g(t)\, dt.$$

Integrando por partes obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(g(t)) &= \lim_{\tau \to \infty} \left[\left. \frac{g(t)e^{-st}}{-s} \right|_0^\tau + \frac{1}{s} \int_0^\tau e^{-st} g'(t)\, dt \right] \\
&= \lim_{\tau \to \infty} \left[\frac{g(\tau)e^{-s\tau}}{-s} + \frac{g(0)}{s} + \frac{1}{s} \int_0^\tau e^{-st} g'(t)\, dt \right].
\end{aligned}$$

Aqui, temos que

$$g(0) = \int_0^0 f(u)\, du = 0 \qquad \text{e} \qquad g'(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t f(u)\, du = f(t)$$

exceto nos pontos de descontinuidades de f, então

$$\mathcal{L}(g(t)) = \lim_{\tau \to \infty} \frac{g(\tau)e^{-s\tau}}{-s} + \frac{1}{s} \lim_{\tau \to \infty} \int_0^\tau e^{-st} f(t)\, dt. \tag{2.32}$$

Como f tem ordem exponencial α, existe $M > 0$ tal que

$$|f(u)| \leq M e^{\alpha u}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\left|g(\tau)e^{-s\tau}\right| &\leq e^{-x\tau}\int_0^{\tau}|f(u)|\,du\\ &\leq Me^{-x\tau}\int_0^{\tau}e^{\alpha u}du\\ &= \frac{M}{\alpha}(e^{-(x-\alpha)\tau}-e^{-x\tau})\to 0,\end{aligned}$$

para $x=\mathcal{R}e(s)>\alpha>0$, quando $\tau\to\infty$. Analogamente, isso vale para $\alpha=0$. Portanto, voltando à (2.32)

$$\mathcal{L}(g(t))=\frac{1}{s}\lim_{\tau\to\infty}\int_0^{\tau}e^{-st}f(t)\,dt=\frac{1}{s}\mathcal{L}(f(t))\qquad(\mathcal{R}e(s)>\alpha).$$

□

Exemplo 2.11. Consideremos a função

$$\text{Si}(t)=\int_0^t\frac{\text{sen}\,u}{u}du.$$

Pelo teorema acima

$$\mathcal{L}(\text{Si}(t))=\mathcal{L}\left(\int_0^t\frac{\text{sen}\,u}{u}du\right)=\frac{1}{s}\mathcal{L}\left(\frac{\text{sen}\,t}{t}\right).$$

Assim, pelo Exemplo 1.26 temos que

$$\mathcal{L}(\text{Si}(t))=\frac{1}{s}\tan^{-1}\frac{1}{s}.$$

Observação. A função Si(t) é chamada de *seno integral*.

Tomando a transformada inversa em (2.31) obtemos

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{F(s)}{s}\right)=\int_0^t f(u)\,du,$$

onde $F(s)=\mathcal{L}\left(f(t)\right)$.

Exemplo 2.12. Calculemos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s(s^2-a^2)}\right)$

Temos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2-a^2)}\right)=\frac{1}{a}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{s(s^2-a^2)}\right)=\frac{1}{a}\int_0^t\text{senh}\,au\,du=\frac{1}{a^2}(\cosh\,at-1).$$

As equações diferenciais que envolvem integrais (conhecidas como equações integro-diferenciais), comumente surgem em problemas envolvendo circuitos elétricos.

2.4.1 Circuitos Elétricos

No circuito (RCL) na figura abaixo, temos uma indutância L (constante), uma resistência R (constante), uma capacitância C (constante) e um gerador ou bateria, fornecendo uma força eletromotriz (tensão) $E(t)$.

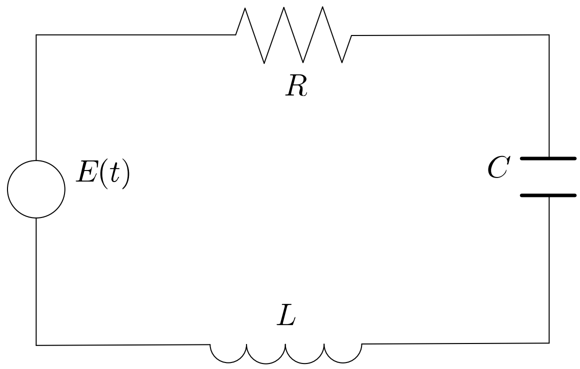

Figura 2.14 –

Sendo a corrente que percorre este circuito dada por $I = dQ/dt$ (Q é a carga do capacitor) temos que a diferença de potencial (ou queda de tensão) através destes componentes são dadas respectivamente por:

$$V_L = L\frac{dI}{dt} = L\frac{d^2Q}{dt^2}, \quad V_R = RI = R\frac{dQ}{dt} \quad e \quad V_C = \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\, d\tau = \frac{Q}{C}.$$

Pela segunda segunda lei de *Kirchoff's*, temos que a soma das quedas de tensão através dos componentes individuais é igual a tensão impressa, $E(t)$, isto é,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int_0^t I(\tau)\, d\tau = E(t).$$

ou

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = E(t). \tag{2.33}$$

Vejamos algumas aplicações da transformada de Laplace à problemas de valor inicial envolvendo circuitos elétricos.

Exemplo 2.13. Suponha que a corrente I em um circuito elétrico satisfaz

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E_0 \operatorname{sen} wt, \tag{2.34}$$

onde L, R, E_0 e w são constantes. Encontremos $I = I(t)$ para $t > 0$ se $I(0) = 0$.

Tomando a transformada de Laplace à ambos os lados de (2.34) e utilizando a condição inicial,

$$Ls\mathcal{L}(I) + R\mathcal{L}(I) = \frac{E_0 w}{s^2 + w^2},$$

isto é,

$$\mathcal{L}(I) = \frac{E_0 w}{(Ls + R)(s^2 + w^2)} = \frac{E_0 w/L}{(s + R/L)(s^2 + w^2)},$$

Utilizando decomposição em frações parciais

$$\mathcal{L}(I) = \frac{E_0 w/L}{(s + R/L)(s^2 + w^2)} = \frac{A}{s + R/L} + \frac{Bs + C}{s^2 + w^2}.$$

Temos que

$$A = \frac{E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2}, \quad B = \frac{-E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2}, \quad C = \frac{E_0 R w}{L^2 w^2 + R^2}.$$

Daí

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(I) &= \frac{E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2} \frac{1}{s + R/L} + \left(\frac{-E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2}\, s + \frac{E_0 R w}{L^2 w^2 + R^2} \right) \frac{1}{s^2 + w^2} \\ &= \frac{E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2} \frac{1}{s + R/L} + \frac{E_0 R}{L^2 w^2 + R^2} \frac{w}{s^2 + w^2} - \frac{E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2} \frac{s}{s^2 + w^2}.\end{aligned}$$

Tomando a transformada inversa, obtemos

$$I(t) = \frac{E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2}\, e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0 R}{L^2 w^2 + R^2} \operatorname{sen} wt - \frac{E_0 L w}{L^2 w^2 + R^2}\, \cos\, wt.$$

Exemplo 2.14. Suponha que a corrente I no circuito elétrico representado na figura abaixo satisfaz

$$L\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t I(\tau) d\tau = E,$$

onde L, C, e E são constantes positivas, $I(0) = 0$.

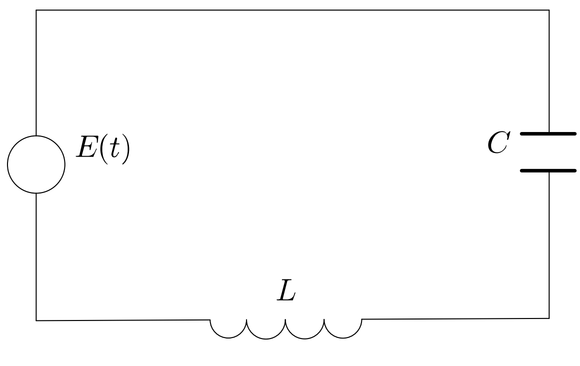

Figura 2.15 –

Temos que

$$Ls\mathcal{L}(I) + \frac{\mathcal{L}(I)}{Cs} = \frac{E}{s}.$$

Isto é,

$$\mathcal{L}(I) = \frac{EC}{LCs^2+1} = \frac{E}{L(s^2+1/LC)} = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{1/\sqrt{LC}}{L\left[s^2+\left(1/\sqrt{LC}\right)^2\right]}.$$

Tomando a trasformada inversa obtemos

$$I(t) = E\sqrt{\frac{C}{L}}\,\mathrm{sen}\frac{1}{\sqrt{LC}}\,t.$$

2.5 Convolução

Existe uma operação entre funções que quando tomamos a transformada dá o produto das transformadas das duas funções. Esta operação é denominada convolução e tem um papel importante no cálculo de transformadas inversas.

A convolução de duas funções $f(t)$ e $g(t)$ definidas para $t > 0$ é dada pela integral

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau, \tag{2.35}$$

que naturalmente existe se f e g são, digamos, contínuas por partes.

Assim como a múltiplicação, a convolução também apresenta as seguintes propriedades

(i) Propriedade comutativa

Substituindo $u = t - \tau$ em (2.35) dá

$$(f * g)(t) = -\int_t^0 f(t-u)g(u)du = \int_0^t g(u)f(t-u)du = (g * f)(t)$$

(ii) Propriedade distributiva

$$\begin{aligned}
[f*(g+h)](t) &= \int_0^t f(\tau)(g+h)(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)[g(t-\tau)+h(t-\tau)]d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau + \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= (f*g)(t) + (f*h)(t)
\end{aligned}$$

(iii) Propriedade associativa

$$\begin{aligned}
[f*(g*h)](t) &= \int_0^t f(\tau)(g*h)(t-\tau)\,d\tau \\
&= \int_0^t f(\tau)\left(\int_0^{t-\tau} g(x)h(t-\tau-x)\,dx\right)d\tau \\
&= \int_0^t \left(\int_\tau^t f(\tau)g(u-\tau)h(t-u)\,du\right)d\tau \qquad (x=u-\tau) \\
&= \int_0^t \left(\int_0^u f(\tau)g(u-\tau)\,d\tau\right)h(t-u)\,du \\
&= \int_0^t (f*g)(u)h(t-u)\,du \\
&= [(f*g)*h](t).
\end{aligned}$$

No quarto passo apenas invertemos a ordem de integração.

(iv) Multiplicação por uma constante

$$c(f*g)(t) = c\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_0^t [cf(\tau)]g(t-\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)[cg(t-\tau)]d\tau,$$

isto é,

$$c(f*g)(t) = (cf*g)(t) = (f*cg)(t)$$

Exemplo 2.15. Se $f(t)=e^t$ e $g(t)=t$, então

$$\begin{aligned}
(f*g)(t) &= \int_0^t e^\tau(t-\tau)d\tau \\
&= \int_0^t te^\tau\,d\tau - \int_0^t \tau e^\tau\,d\tau \\
&= te^\tau\Big|_0^t - \left(\tau e^\tau\Big|_0^t - \int_0^t e^\tau\,d\tau\right) \\
&= -t + e^\tau\Big|_0^t \\
&= e^t - t - 1.
\end{aligned}$$

O seguinte teorema mostra que a transformada de Laplace da convolução de duas funções dá o produto das transformadas das duas funções.

Teorema 2.6 (Teorema da Convolução)**.** *Se f e g são contínuas por partes sobre $[0,\infty)$ e de ordem exponencial α, então*

$$\mathcal{L}\left[(f*g)(t)\right] = \mathcal{L}\left(f(t)\right).\mathcal{L}\left(g(t)\right) \qquad (\mathcal{R}e(s)>\alpha)\,.$$

Demonstração.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)) &= \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau\right)\left(\int_0^\infty e^{-su} g(u)\, du\right)\\ &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+u)} f(\tau) g(u)\, du\right) d\tau.\end{aligned}$$

Façamos $t = \tau + u$, como τ é constante em relação a u $du = dt$ e assim,

$$\mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)) = \int_0^\infty \left(\int_\tau^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau)\, dt\right) d\tau. \tag{2.36}$$

Esta integral é calculada sobre a região sombreada da figura abaixo que se estende até o infinito no $t\tau$-plano.

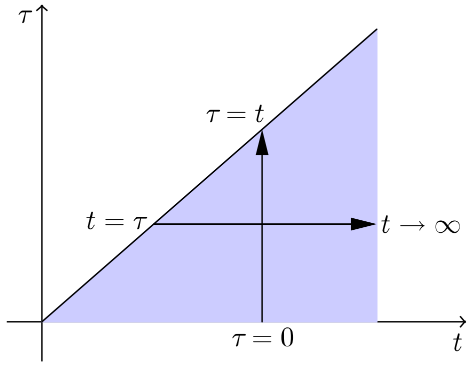

Figura 2.16 – Região de integração no $t\tau$-plano

Devido as hipóteses sobre f e g, a ordem de integração pode ser invertida (veja Ref. [2] para uma prova usando convergência uniforme). Assim, temos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f(t)).\mathcal{L}(g(t)) &= \int_0^\infty \left(\int_0^t e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right) dt\\ &= \int_0^\infty e^{-st}\left(\int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau\right) dt\\ &= \mathcal{L}[(f*g)(t)].\end{aligned}$$

□

Exemplo 2.16. Calculemos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-a)(s-b)}\right)$.

Pelo teorema da convolução temos que

$$\frac{1}{(s-a)(s-b)} = \frac{1}{s-a}.\frac{1}{s-b} = \mathcal{L}(e^{at}) \,.\, \mathcal{L}(e^{bt}) = \mathcal{L}(e^{at} * e^{bt}).$$

Então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) &= e^{at} * e^{bt} \\
&= \int_0^t e^{a\tau} e^{b(t-\tau)} d\tau \\
&= e^{bt} \int_0^t e^{(a-b)\tau}\, d\tau \\
&= e^{bt} \left(\left. \frac{e^{(a-b)\tau}}{a-b} \right|_0^t \right).
\end{aligned}
$$

Isto é,

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s-a)(s-b)}\right) = \frac{e^{at}-e^{bt}}{a-b} \qquad a \neq b.
$$

Exemplo 2.17. Calculemos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2(s-1)}\right)$.

Anteriormente, calculamos esta inversa utilizando decomposição em frações parciais, agora basta observar que

$$
\frac{1}{s^2(s-1)} = \frac{1}{s^2}.\frac{1}{s-1} = \mathcal{L}(t).\mathcal{L}(e^t) = \mathcal{L}(t * e^t).
$$

Logo,

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s-1)}\right) = t * e^t = e^t - t - 1,
$$

pelo Exemplo (2.15).

Exemplo 2.18. Encontremos $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{w^2}{(s^2+w^2)^2}\right)$ e $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{s}{(s^2+w^2)^2}\right)$.

Como

$$
\frac{w^2}{(s^2+w^2)^2} = \frac{w}{s^2+w^2}.\frac{w}{s^2+w^2} = \mathcal{L}(\text{sen } wt).\mathcal{L}(\text{sen } wt) = \mathcal{L}(\text{sen } wt * \text{sen } wt),
$$

então

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{w^2}{(s^2+w^2)^2}\right) &= \text{sen } wt * \text{sen } wt \\
&= \int_0^t \text{sen } w\tau \text{ sen } w(t-\tau) d\tau \\
&= \frac{1}{2}\int_0^t \left[\cos\,(2w\tau - wt) - \cos\, wt\right] d\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\left. \left(\frac{\text{sen }(2w\tau - wt)}{2w} - \tau \cos\, wt \right) \right|_0^t \right],
\end{aligned}
$$

isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{w^2}{(s^2+w^2)^2}\right)=\frac{1}{2w}(\operatorname{sen} wt - wt\ \cos\ wt). \tag{2.37}$$

Analogamente, como

$$\frac{s}{(s^2+w^2)^2}=\frac{1}{w}\left(\frac{s}{s^2+w^2}\cdot\frac{w}{s^2+w^2}\right)=\frac{1}{w}\mathcal{L}\left(\cos\ wt * \operatorname{sen} wt\right),$$

tem-se que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+w^2)^2}\right)=\frac{1}{w}\cos\ wt * \operatorname{sen} wt=\frac{1}{w}\int_0^t \cos\ w\tau\ \operatorname{sen} w(t-\tau)\,d\tau,$$

isto é,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{(s^2+w^2)^2}\right)=\frac{1}{2w}\,t\operatorname{sen} wt. \tag{2.38}$$

Para encontrar as inversas (2.37) e (2.38) nós usamos o fato de que

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B=\frac{1}{2}\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

e

$$\operatorname{sen} A\ \cos\ B=\frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(A+B)+\operatorname{sen}(A-B)\right]$$

respectivamente.

2.5.1 Equações Integrais

Uma equação integral é uma equação em que a função incógnita aparece sob o sinal de integração. São exemplos de equações integrais as equações do tipo

$$f(t)=g(t)+\int_0^t k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau \tag{2.39}$$

e

$$g(t)=\int_0^t k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau, \tag{2.40}$$

onde $g(t)$ e $k(t,\tau)$ são funções conhecidas e $f(t)$ é uma função desconhecida. A função $k(t,\tau)$ é chamada de núcleo da equação integral, quando este é da forma particular

$$k(t,\tau)=k(t-\tau),$$

as integrais representam convoluções. Considerando-se que na equação (2.39), $K(t,\tau)$ tem esta forma,

$$\int_0^t k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau = (f*k)(t).$$

Então, tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação (2.39), obtemos

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \mathcal{L}(g) + \mathcal{L}(f).\mathcal{L}(k),$$

pelo teorema da convolução. Daí

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right) = \frac{\mathcal{L}(g)}{1-\mathcal{L}(k)}.$$

O lado direito desta expressão é uma função da variável s. Assim, para obtermos $f(t)$ utilizamos a transformação inversa. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 2.19. Encontremos a solução da equação integral

$$x(t) = e^{-t} + \int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau. \tag{2.41}$$

Temos que

$$\int_0^t \operatorname{sen}(t-\tau)x(\tau)\,d\tau = x(t) * \operatorname{sen}(t).$$

Então, tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação (2.41) obtemos

$$\mathcal{L}(x(t)) = \mathcal{L}(e^{-t}) + \mathcal{L}(\operatorname{sen} t).\mathcal{L}(x(t)),$$

pelo teorema da convolução. Daí

$$\mathcal{L}(x(t)) = \frac{\mathcal{L}(e^{-t})}{1-\mathcal{L}(\operatorname{sen} t)} = \frac{s^2+1}{s^2(s+1)} = \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s}.$$

Portanto, tomando a transformada inversa obtemos

$$x(t) = 2e^{-t} + t - 1.$$

Exemplo 2.20. Seja

$$x(t) = 1 + \int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)\,d\tau.$$

Então, tomando a transformada de Laplace de ambos os lados desta equação, obtemos

$$\mathcal{L}\left(x(t)\right) = \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}\left(x(t)\right).\mathcal{L}(\cos\, t).$$

Daí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(x(t)\right) &= \frac{\mathcal{L}(1)}{1-\mathcal{L}(\cos\, t)}\\
&= \frac{s^2+1}{s(s^2-s+1)}\\
&= \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2-s+1}\\
&= \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2-s+1/4+3/4}\\
&= \frac{1}{s}+\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}/2}{(s-1/2)^2+(\sqrt{3}/2)^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto, pelo primeiro teorema da translação

$$x(t) = 1+\frac{2}{\sqrt{3}}\,e^{\frac{1}{2}t}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Exemplo 2.21. Seja

$$x(t) = \text{sen}\,t + \int_0^t e^{\tau}x(t-\tau)\,d\tau.$$

Então,

$$\mathcal{L}\left(x(t)\right) = \mathcal{L}(\text{sen}\,t) + \mathcal{L}(e^t).\mathcal{L}\left(x(t)\right).$$

Daí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(x(t)\right) &= \frac{\mathcal{L}(\text{sen}\,t)}{1-\mathcal{L}(e^t)}\\
&= \frac{s-1}{(s^2+1)(s-2)}\\
&= -\frac{1}{5}\,\frac{s}{s^2+1}+\frac{3}{5}\,\frac{1}{s^2+1}+\frac{1}{5}\,\frac{1}{s-2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$x(t) = -\frac{1}{5}\,\cos\,t+\frac{3}{5}\,\text{sen}\,t+\frac{1}{5}\,e^{2t}.$$

Como um exemplo de uma equação integral do tipo (2.40), vamos considerar um problema clássico do século XIX. Uma partícula desliza sem atrito sobre uma curva, com a condição de que o tempo de descida (devido à gravidade) seja independente do ponto de partida (Figura 2.18). Tal curva é chamada de *tautócrona*.

Uma análise da física da situação leva à equação integral (Abel)

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^y \frac{f(u)\,du}{\sqrt{y-u}} \tag{2.42}$$

onde T_0 é uma constante (tempo), g é a constante gravitacional, e $f(u)$ representa ds/dy com $y = u$, onde $s = s(y)$ é o comprimento do arco.

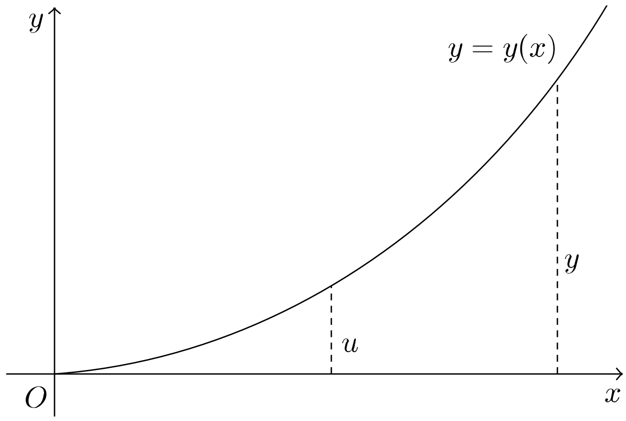

Figura 2.17 –

Note que na equação (2.42),

$$\int_0^y \frac{f(u)\, du}{\sqrt{y-u}} = f(y) * \frac{1}{\sqrt{y}}.$$

Então, tomando a transformada de Laplace de ambos os lados obtemos

$$T_0 \mathcal{L}(1) = \frac{1}{\sqrt{2g}}\, \mathcal{L}(f(y)).\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{y}}\right).$$

Assim, por (2.6)

$$\mathcal{L}(f(y)) = \frac{\sqrt{2g}\, T_0/s}{\sqrt{\pi/s}} = \frac{\sqrt{2g/\pi}}{s^{\frac{1}{2}}}\, T_0 = \frac{c_0}{s^{\frac{1}{2}}}.$$

Tomando a transformada inversa obtemos

$$f(y) = c_0 \mathcal{L}^{-1}(s^{-\frac{1}{2}}) = c_0 \frac{1}{\sqrt{\pi y}} = \frac{c}{\sqrt{y}}, \tag{2.43}$$

por (2.7). Uma vez que

$$f(y) = \frac{ds}{dy} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \tag{2.44}$$

então

$$1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{c^2}{y},$$

ou seja,

$$dx = \sqrt{\frac{c^2 - y}{y}}\, dy.$$

Integrando os dois lados desta equação obtemos

$$x = \int \sqrt{\frac{c^2 - y}{y}} dy.$$

Façamos $y = c^2 \operatorname{sen}^2(\varphi/2)$, então

$$\begin{aligned}
x &= c^2 \int \sqrt{\frac{c^2 - c^2 \operatorname{sen}^2(\varphi/2)}{c^2 \operatorname{sen}^2(\varphi/2)}} \operatorname{sen}(\varphi/2) \cos(\varphi/2)\, d\varphi \\
&= c^2 \int \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\varphi/2)}\, \cos(\varphi/2)\, d\varphi \\
&= c^2 \int \sqrt{\cos^2(\varphi/2)} \cos(\varphi/2)\, d\varphi \\
&= c^2 \int \cos^2(\varphi/2) d\varphi \\
&= \frac{c^2}{2} \int (1 + \cos\, \varphi)\, d\varphi.
\end{aligned}$$

Isto é

$$x = \frac{c^2}{2}(\varphi + \operatorname{sen} \varphi)$$

e

$$y = \frac{c^2}{2}(1 - \cos\, \varphi).$$

Estas são equações paramétricas de uma ciclóide.

3 Aplicações da Transformada de Laplace: Equações Diferenciais Parciais

O método da transformada de Laplace também pode ser aplicado à solução de equações diferenciais parciais. Particularmente este método tem grande utilidade para a resolução de EDPs lineares de segunda ordem. Para uma função de duas variáveis $u = u(x, y)$ em geral estas EDPs têm a forma

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g, \tag{3.1}$$

onde os coeficientes a, b, c, d, e, f, g são constantes reais ou são funções que dependem apenas das variáveis x e y. Uma EDP da forma (3.1) é chamada de:

$$\begin{array}{lll} \text{elíptica} & \text{se} & b^2 - ac < 0, \\ \text{hiperbólica} & \text{se} & b^2 - ac > 0, \\ \text{parabólica} & \text{se} & b^2 - ac = 0. \end{array}$$

Como podemos observar, a classificação das EDPs da forma (3.1) depende somente dos coeficientes das derivadas de segunda ordem.

Exemplo 3.1.

(i) A equação do calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{onde } c \text{ é uma constante}$$

é parabólica, pois, $0^2 - c.0 = 0$.

(ii) A equação de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{onde } a^2 \text{ é uma constante}$$

é hiperbólica, pois, $0^2 - a^2.(-1) = a^2 > 0$.

(iii) A equação de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

é elíptica, pois, $0^2 - 1.1 = -1 < 0$.

No capítulo anterior, vimos que para a resolução de problemas envolvendo equações diferenciais ordinárias era necessário determinar a transformada de Laplace da derivada ordinária de uma função. Naturalmente, para a resolução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais é necessário determinar a transformada de Laplace da derivada parcial de uma função. A seguir determinaremos:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right), \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \text{ e } \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right); u = u(x,t),$$

onde $t \geq 0$ é uma variável de tempo. Denotamos por $U(x,s)$ a transformada de Laplace de u em relação a t, isto é,

$$U(x,s) = \mathcal{L}(u(x,t)) = \int_0^\infty e^{-st} u(x,t)\, dt,$$

onde x é a "variável não transformada".

Exemplo 3.2. Calculemos $\mathcal{L}\left(e^{a(x+t)}\right)$.

Tem-se que

$$\mathcal{L}\left(e^{a(x+t)}\right) = \mathcal{L}(e^{ax}e^{at}) = e^{ax}\mathcal{L}\left(e^{at}\right) = \frac{e^{ax}}{s-a}.$$

Consideremos as hipóteses:

Hipótese (1).

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \int_0^\infty e^{-st}\frac{\partial}{\partial x}u(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt = \frac{\partial}{\partial x}U(x,s). \tag{3.2}$$

Em outras palavras, "a transformada da derivada é a derivada da transformada."

Hipótese (2).

$$\lim_{x \to x_0} \int_0^\infty e^{-st}u(x,t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}u(x_0,t)\, dt,$$

isto é,

$$\lim_{x \to x_0} U(x,s) = U(x_0,s). \tag{3.3}$$

Uma vez que, em (3.2) o parâmetro s pode ser tratado como uma constante em relação a diferenciação envolvida, podemos escrever

$$\frac{\partial}{\partial x}\, U(x,s) = \frac{d}{dx}\, U(x,s) = \frac{dU}{dx}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{dU}{dx}. \tag{3.4}$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \frac{d^2 U}{dx^2}. \tag{3.5}$$

Note que no presente contexto o teorema (2.2) da derivada diz

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) = s\mathcal{L}(u(x,t)) - u(x,0^+) = sU(x,s) - u(x,0^+). \tag{3.6}$$

Para a segunda derivada temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right) &= s\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) - \frac{\partial}{\partial t}u(x,0^+) \\ &= s^2 U(x,s) - su(x,0^+) - \frac{\partial}{\partial t}\,u(x,0^+) \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.1 Método da Transformada de Laplace

O método da transformada de Laplace aplicado à solução de EDPs consiste em primeiro aplicar a transformada de Laplace para ambos os lados da equação. Disto resultará uma EDO da função U dependendo somente da variável x.

Por exemplo, se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial t}, \tag{3.8}$$

então

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right), \tag{3.9}$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\,U(x,s) = sU(x,s) - u(x,0^+).$$

A EDO obtida é então resolvia por qualquer meio. Se por exemplo

$$u(x,0^+) = x, \tag{3.10}$$

então

$$\frac{d}{dx}\,U(x,s) - sU(x,s) = -x.$$

Multiplicando esta equação, pelo fator de integração e^{-sx} obtemos

$$\frac{d}{dx}\left(Ue^{-sx}\right) = -xe^{-sx}.$$

Integrando encontramos a solução geral

$$U(x,s) = ce^{sx} + \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}. \tag{3.11}$$

Problemas de EDP em contextos físicos vêm com uma ou mais condições de fronteira. Por exemplo, digamos que para (3.8)

$$u(0,t) = t. \tag{3.12}$$

Uma vez que as condições de fronteira também expressam u como uma função de t, tomamos a transformada de Laplace das condições de fronteira também. Assim, por (3.12)

$$U(0,s) = \mathcal{L}(u(0,t)) = \frac{1}{s^2}.$$

Substituido na solução geral (3.11) encontramos que $c = 0$. Portanto,

$$U(x,s) = \frac{x}{s} + \frac{1}{s^2}.$$

Uma vez que esta é a transformada da função $u(x,t)$, tomando a transformada inversa obtemos

$$u(x,t) = x + t.$$

Esta função satisfaz a equação (3.8) e também as condições (3.10) e (3.12) portanto, é a solução desejada. Este exemplo ilustra as técnicas básicas envolvidas na resolução de equações diferenciais parciais.

Exemplo 3.3. Resolver o problema com condições de fronteira

$$x\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial t} + ay = bx^2, \tag{3.13}$$

$x > 0$, $t > 0$, a e b constantes, $y(0,t) = 0$ e $y(x,0^+) = 0$.

Definindo $\mathcal{L}\left(y(x,t)\right) = Y(x,s)$ e tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação (3.13), resulta

$$x\frac{d}{dx}Y(x,s) + sY(x,s) - y(x,0^+) + aY(x,s) = \frac{bx^2}{s},$$

por (3.4) e por (3.6). Como $y(x,0^+) = 0$,

$$x\frac{dY}{dx} + sY + aY = \frac{bx^2}{s},$$

isto é,

$$x\frac{dY}{dx} + (s+a)Y = \frac{bx^2}{s},$$

ou ainda

$$\frac{dY}{dx} + \frac{(s+a)}{x}Y = \frac{bx}{s} \qquad (s > 0). \tag{3.14}$$

Multiplicando esta equação pelo fator de integração $x^{(s+a)}$, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left[Yx^{(s+a)}\right] = \frac{b}{s}\, x^{(s+a+1)}.$$

Integrando, obtemos

$$Y(x,s)x^{(s+a)} = \frac{b}{s(s+a+2)}x^{(s+a+2)} + c. \tag{3.15}$$

Assim, a solução geral da EDO (3.14) é dada por

$$Y(x,s) = \frac{bx^2}{s(s+a+2)} + cx^{-(s+a)} \qquad (x > 0,\ s > -a).$$

Tomando a transformada de Laplace da condição de fronteira $y(0,t) = 0$ temos

$$Y(0,s) = \mathcal{L}\left(y(0,t)\right) = 0.$$

Substituindo em (3.15) encontramos $c = 0$. Portanto,

$$Y(x,s) = \frac{bx^2}{s(s+a+2)}.$$

Tomando a transformada inversa encontramos

$$y(x,t) = \frac{bx^2}{a+2}\left(1 - e^{-(a+2)t}\right)$$

pelo Exemplo 2.16.

Exemplo 3.4. Resolver a equação

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\frac{\partial u}{\partial t} + u, \tag{3.16}$$

$u(x,0) = 6e^{-3x}$ e u limitada para $x > 0$, $t > 0$.

Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação diferencial parcial (3.16), e utilizando (3.4) e (3.6), encontramos

$$\frac{dU}{dx} = 2(sU - u(x,0)) + U.$$

Como $u(x,0) = 6e^{-3x}$, então

$$\frac{dU}{dx} - (2s+1)U = -12e^{-3x}. \tag{3.17}$$

Multiplicando esta equação pelo fator de integração $e^{-(2s+1)x}$, obtemos

$$\frac{d}{dx}\left[Ue^{(2s+1)x}\right] = -12e^{-(2s+4)x}.$$

Integrando, obtemos

$$Ue^{-(2s+1)x} = \frac{6}{s+2}e^{-(2s+4)x} + c. \tag{3.18}$$

Assim, a solução geral da EDO (3.17) é dada por

$$U(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x} + ce^{(2s+1)x}.$$

Como $u(x,t)$ deve ser limitada quando $x \to \infty$, existe $M > 0$ tal que

$$|u(x,t)| \leq M.$$

Daí

$$\begin{aligned}
|U(x,s)| &= \left|\int_0^\infty e^{-st}u(x,t)dt\right| \\
&\leq \int_0^\infty e^{-wt}\left|u(x,t)\right| dt \\
&\leq M\int_0^\infty e^{-wt}dt \\
&= K \qquad (w = \mathcal{R}e(s) > 0)\,,
\end{aligned}$$

isto é, $U(x,s)$ também deve ser limitada quando $x \to \infty$ logo, devemos escolher $c = 0$. Portanto

$$U(x,s) = \frac{6}{s+2}e^{-3x}.$$

Tomando a transformada inversa encontramos

$$u(x,t) = 6e^{-2t-3x},$$

que é a solução desejada.

As duas funções que estudaremos a seguir, têm importância particular neste capítulo, pois, aparecem em certos problemas de valores na fronteira.

3.2 Função Erro

Uma das funções que aparecerão na resolução da equação do calor (3.24) é a função erro, que na teoria é definida como

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2}\, dx.$$

Cujo gráfico é

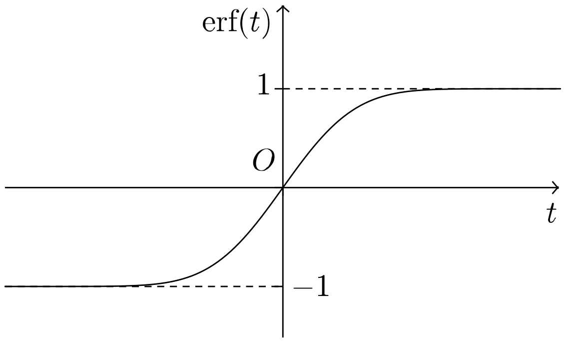

Figura 3.18 –

Notemos que

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = 1 \tag{3.19}$$

por (2.4).

A função erro complementar, erfc(t), é definida por

$$\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t), \tag{3.20}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\operatorname{erfc}(t) &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-x^2} dx \\
&= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^t e^{-x^2}\, dx + \int_t^\infty e^{-x^2} dx - \int_t^\infty e^{-x^2} dx \right) \\
&= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^\infty e^{-x^2} dx - \int_t^\infty e^{-x^2} dx \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2} dx.
\end{aligned}$$

por (2.4). Esta função aparece em certos problemas de valores na fronteira na forma erfc $\left(a/2\sqrt{t}\right)$, onde a é uma constante real. A transformada de Laplace dessa função pode ser obtida do seguinte modo:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-st}\left(\int_{a/2\sqrt{t}}^\infty e^{-x^2}dx\right)dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2}\left(\int_{a^2/4x^2}^\infty e^{-st}dt\right)dx \\
&= \frac{2}{s\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(x^2+a^2s/4x^2)}\,dx. \\
&= \frac{2}{s\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\left[(x-a\sqrt{s}/2x)^2+a\sqrt{s}\right]}\,dx. \qquad (3.21)
\end{aligned}
$$

Façamos

$$
y = x - \frac{a\sqrt{s}}{2x}, \quad \text{ou} \quad x = \frac{y+\sqrt{y^2+2a\sqrt{s}}}{2}.
$$

Daí

$$
dx = \frac{1}{2}\,dy + \frac{ydy}{2\sqrt{y^2+2a\sqrt{s}}} \qquad \text{e} \qquad -\infty < y < \infty.
$$

Então, (3.21) torna-se

$$
\mathcal{L}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s\sqrt{\pi}}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-y^2}dy + \int_{-\infty}^\infty \frac{y}{\sqrt{y^2+2a\sqrt{s}}}e^{-y^2}dy\right).
$$

A primeira integral tem valor $\sqrt{\pi}$ em virtude de ser duas vezes a integral (2.4), equanto que a segunda integral é igual a zero, pois, o integrando é uma função ímpar de y. Portanto,

$$
\mathcal{L}\left(\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}.
$$

Equivalentemente

$$
\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right) = \operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right). \qquad (3.22)
$$

Com base nesta inversa provaremos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.

(i) $\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-a\sqrt{s}}\right) = \dfrac{a}{2\sqrt{\pi\, t^3}}\,e^{-a^2/4t} \qquad (a > 0).$

(ii) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\,e^{-a^2/4t} \qquad (a > 0).$

Demonstração. Derivando (3.22) em relação a t e em seguida tomando a transformada de Laplace em ambos os lados, isto é,

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right)\right]$$

obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] &= s\mathcal{L}\left[\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right)\right] - \lim_{t\to 0^+}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}\right) \\ &= e^{-a\sqrt{s}} - \lim_{t\to 0^+}\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\end{aligned}$$

pelo teorema (2.2) da derivada e por (3.22). Notemos que

$$\lim_{t\to 0^+}\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 0$$

pois,

$$\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 1 - \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$$

por (3.20), e

$$\lim_{t\to 0^+}\text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = 1,$$

uma vez que, $\lim\limits_{t\to 0^+} a/2\sqrt{t} = \infty$ (veja (3.19)). Assim, temos

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] = e^{-a\sqrt{s}},$$

onde

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\text{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}\left(1 - \text{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right)\frac{d}{dt}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] \\ &= \mathcal{L}\left[-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-(a/2\sqrt{t})^2}\left(-\frac{a}{4\sqrt{t^3}}\right)\right] \\ &= \mathcal{L}\left(\frac{a}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-a^2/4t}\right),\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathcal{L}\left(\frac{a}{2\sqrt{\pi\, t^3}}\, e^{-a^2/4t}\right) = e^{-a\sqrt{s}}. \tag{3.23}$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(e^{-a\sqrt{s}}\right) = \frac{a}{2\sqrt{\pi\, t^3}}\, e^{-a^2/4t}.$$

Para obtermos a expressão (ii) derivamos (3.23) em relação a s,

$$\frac{d}{ds}\mathcal{L}\left(\frac{a}{2\sqrt{\pi\, t^3}}\, e^{-a^2/4t}\right) = -\frac{ae^{-a\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}},$$

assim, pelo Teorema 1.8,

$$\mathcal{L}\left(-\frac{at}{2\sqrt{\pi\, t^3}}\, e^{-a^2/4t}\right) = -\frac{ae^{-a\sqrt{s}}}{2\sqrt{s}},$$

que após o cancelamento dá

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-a^2/4t}\right) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}.$$

Portanto,

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi\, t}}\, e^{-a^2/4t}.$$

$\square$

3.2.1 Equação do Calor Unidimensional

O fluxo de calor em uma haste finita ou semi-finita é regido pela EDP

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{3.24}$$

onde c é uma constante (chamada *difusividade*), e $u(x,t)$ é a temperatura na posição x e tempo t. A temperatura ao longo de um corte transversal em x é considerado como sendo uniforme, veja a figura abaixo.

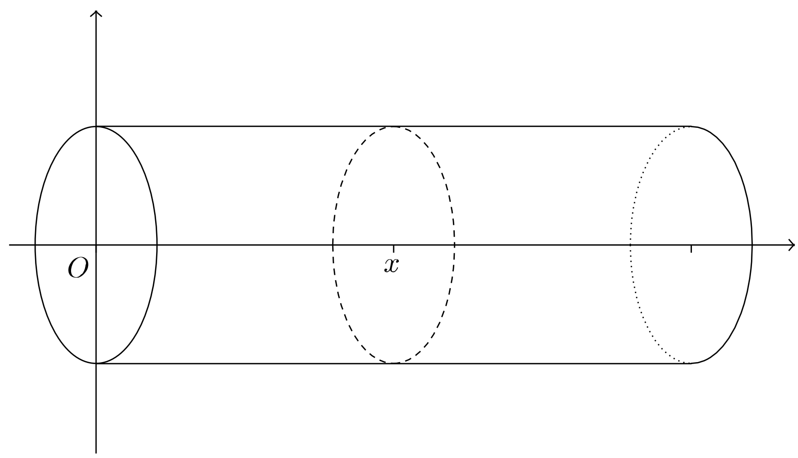

Figura 3.19 –

Muitos casos particulares podem aparecer na resolução da equação do calor, consideremos alguns deles.

Exemplo 3.5. Vamos resolver a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{3.25}$$

para

(i) $u(x, 0^+) = 1,\ x > 0,$

(ii) $u(0, t) = 0,\ t > 0,$

(iii) $\lim_{x\to\infty} u(x, t) = 1.$

Tomando a transformada de Laplace de (3.25), isto é,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right),$$

obtemos

$$\frac{d^2 U}{dx^2} = sU - u(x, 0^+) \tag{3.26}$$

por (3.5) e por (3.4). Pela condição (i), obtemos a EDO não homogênea

$$\frac{d^2 U}{dx^2} - sU = -1, \tag{3.27}$$

cuja solução geral é dada por

$$U(x, s) = c_1 e^{\sqrt{s}x} + c_2 e^{-\sqrt{s}x} + \frac{1}{s}. \tag{3.28}$$

Tomando a transformada de Laplace da condição de fronteira (iii) obtemos

$$\lim_{x\to\infty} U(x, s) = \lim_{x\to\infty} \mathcal{L}\left(u(x, t)\right) = \mathcal{L}\left(\lim_{x\to\infty} u(x, t)\right) = \frac{1}{s}. \tag{3.29}$$

Tomando o limite quando $x \to \infty$ em ambos os lados da equação (3.28) e substituindo (3.29) encontramos $c_1 = 0$. Logo,

$$U(x, s) = c_2 e^{-\sqrt{s}\,x} + \frac{1}{s}. \tag{3.30}$$

Tomando a transformada de Laplace da condição de fronteira (ii) obtemos

$$U(0, s) = \mathcal{L}\left(u(0, t)\right) = 0.$$

Substituindo em (3.30) encontramos $c_2 = -1/s$. Portanto,

$$U(x, s) = \frac{1}{s} - \frac{e^{-\sqrt{s}\,x}}{s}.$$

Tomando a transformada inversa obtemos

$$u(x,t) = 1 - \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right).$$

por (3.22). Assim, por (3.20)

$$u(x,t) = \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x/2\sqrt{t}} e^{-u^2}\, du.$$

Exemplo 3.6. Encontremos a solução da equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{3.31}$$

para

(i) $u(x, 0^+) = 0$,

(ii) $u(0,t) = f(t),\ t > 0$,

(iii) $\lim_{x\to\infty} u(x,t) = 0$.

Como no exemplo anterior, tomando a tranformada de Laplace em ambos os lados de (3.31) obtemos

$$\frac{d^2U}{dx^2} = sU - u(x, 0^+).$$

Utilizando a condição (i) obtemos a EDO

$$\frac{d^2U}{dx^2} - sU = 0,$$

cuja solução geral também é dada por

$$U(x,s) = c_1 e^{\sqrt{s}\,x} + c_2 e^{-\sqrt{s}\,x}. \tag{3.32}$$

Tomando a transformada de Laplace da condição de fronteira (iii) obtemos

$$\lim_{x\to\infty} U(x,s) = 0. \tag{3.33}$$

Tomando o limite quando $x \to \infty$ em (3.32) e em seguida substituindo (3.33) concluímos que $c_1 = 0$. Logo,

$$U(x,s) = c_2 e^{-\sqrt{s}x}. \tag{3.34}$$

Tomando a transformada de Laplace da condição de fronteira (ii) obtemos

$$U(0,s) = \mathcal{L}\left(f(t)\right) = F(s).$$

Substituindo em (3.34) encontramos $c_2 = F(s)$. Portanto,

$$U(x,s) = F(s)e^{-\sqrt{s}x}. \tag{3.35}$$

Note que pelo teorema (2.6) da convolução e pelo Teorema 3.1 (i)

$$F(s)e^{-\sqrt{s}x} = \mathcal{L}\left(f(t) * \mathcal{L}^{-1}\left(e^{-\sqrt{s}x}\right)\right) = \mathcal{L}\left[f(t) * \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-x^2/4t}\right],$$

Portanto, tomando a transformada inversa em (3.35) obtemos

$$u(x,t) = f(t) * \frac{x}{2\sqrt{\pi t^3}}e^{-x^2/4t} = \int_0^t \frac{x}{2\sqrt{\pi\,\tau^3}}\, e^{-x^2/4\tau} f(t-\tau)\,d\tau.$$

Fazendo a substituição $\sigma^2 = x^2/4\tau$, encontramos

$$u(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x/2\sqrt{t}}^{\infty} e^{-\sigma^2} f\left(t - \frac{x^2}{4\sigma^2}\right) d\sigma,$$

que é a solução desejada.

3.2.2 Equação de Onda Unidimensional

O movimento das ondas de uma corda inicialmente em repouso sobre o eixo x, com uma extremidade na origem pode ser descrita pela equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad x > 0,\ t > 0,$$

veja a figura abaixo.

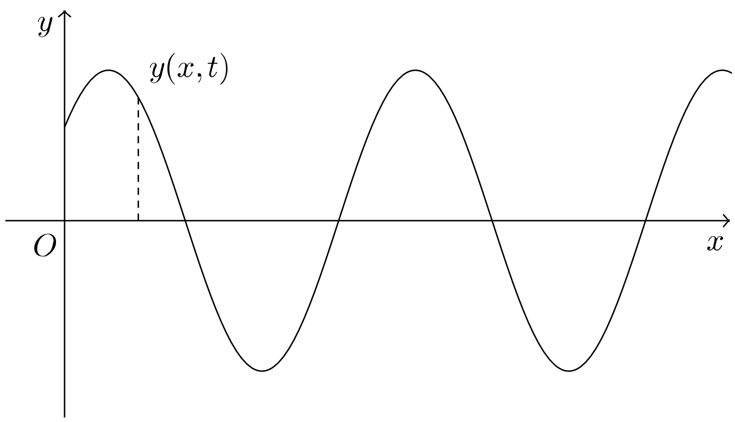

Figura 3.20 –

O deslocamento é apenas na direção vertical, e é dado por $y(x,t)$ na posição x e tempo t. A constante a é dada por $a = \sqrt{T/\rho}$, onde T é a tensão na corda e ρ a sua massa por unidade de comprimento. A mesma equação ocorre para descrever as vibrações longitudinais em um feixe horizontal, em que $y(x,t)$ representa o deslocamento longitudinal de uma seção transversal em x e tempo t.

Exemplo 3.7. Vamos resolver a equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{3.36}$$

para

(i) $y(x, 0^+) = 0,\ x > 0,$

(ii) $y_t(x, 0^+) = 0,\ x > 0,$

(iii) $y(0, t) = f(t)\ (f(0) = 0)\,,$

(iv) $\lim_{x\to\infty} y(x, t) = 0.$

Tomando a transformada de Laplace em ambos os lados de (3.36), isto é,

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right) = a^2 \mathcal{L}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right),$$

então

$$s^2 Y - sy(x, 0^+) - \frac{\partial}{\partial t}\, y(x, 0^+) = a^2 \frac{d^2 Y}{dx^2},$$

por (3.7) e por (3.5). Utilizando as condições (i) e (ii) obtemos a EDO

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} Y = 0, \tag{3.37}$$

cuja solução geral é dada por

$$Y(x, s) = c_1 e^{(s/a)x} + c_2 e^{-(s/a)x}. \tag{3.38}$$

Tomando a transformada de Laplace da condição de fronteira (iv) obtemos

$$\lim_{x\to\infty} Y(x, s) = 0. \tag{3.39}$$

Tomando o limite quando $x \to \infty$ em ambos os lados da equação (3.43) e em seguida substituindo (3.39) concluímos que $c_1 = 0$ logo,

$$Y(x, s) = c_2 e^{-(s/a)x}. \tag{3.40}$$

Tomando a transformada de Laplace da condição (iii) obtemos

$$Y(0, s) = F(s).$$

Substituindo em (3.40) encontramos $c_2 = F(s)$. Portanto,

$$Y(x, s) = F(s) e^{-(s/a)x}.$$

Tomando a transformada inversa, obtemos

$$y(x,t) = u_{\frac{x}{a}}(t) f\left(t - \frac{x}{a}\right)$$

pelo teorema (1.7) (segundo teorema da translação).

Uma vez que,

$$u_{\frac{x}{a}}(t) = \begin{cases} 1, & t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & t < \frac{x}{a} \end{cases},$$

podemos escrever

$$y(x,t) = \begin{cases} f\left(t - \frac{x}{a}\right), & t \geq \frac{x}{a} \\ 0, & t < \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Isto quer dizer que a corda permanece em repouso até o tempo $t = x/a$, logo após apresenta o mesmo movimento que a extremidade em $x = 0$, com um atraso de tempo de x/a.

Exemplo 3.8. Encontremos a solução da equação

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad x > 0,\ t > 0, \tag{3.41}$$

para

(i) $y(x,0) = 0$

(ii) $y_t(x,0) = 0$

(iii) $y(0,t) = A_0 \operatorname{sen} wt$

(iv) $|y(x,t)| < M$

Como no exemplo anterior, tomando a tranformada de Laplace em ambos os lados de (3.41) e utilizando as condições (i) e (ii) obtemos novamente a EDO

$$\frac{d^2 Y}{dx^2} - \frac{s^2}{a^2} Y = 0, \tag{3.42}$$

cuja a solução geral já conhecemos, isto é,

$$Y(x,s) = c_1 e^{(s/a)x} + c_2 e^{-(s/a)x}. \tag{3.43}$$

Como, pela condição (iv), $y(x,t)$ deve ser limitada então, $Y(x,s)$ também deve ser limitada (veja o Exemplo 3.4). Disto segue que devemos escolher $c_1 = 0$ logo,

$$Y(x,s) = c_2 e^{-(s/a)x}. \tag{3.44}$$

Tomando a transformada de Laplace da condição (iii) obtemos

$$Y(0,s) = \frac{A_0 w}{s^2 + w^2}.$$

Substituindo em (3.44) encontramos $c_2 = A_0 w/(s^2 + w^2)$. Portanto,

$$Y(x,s) = \frac{A_0\, w}{s^2 + w^2} e^{-(s/a)x}. \tag{3.45}$$

Tomando a transformada inversa, obtemos

$$y(x,t) = A_0\, u_{\frac{x}{a}(t)} \operatorname{sen} w \left(t - \frac{x}{a}\right),$$

pelo Teorema (1.7) (Segundo Teorema da Translação). Ou ainda

$$y(x,t) = \begin{cases} A_0 \operatorname{sen} w \left(t - \frac{x}{a}\right), & t > \frac{x}{a} \\ 0, & t < \frac{x}{a}. \end{cases}$$

Referências

[1] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C., **Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems**. 7th ed. New York: John Wiley Sons, Inc., 2001

[2] CHURCHILL, R. V., **Operational Mathematics**. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1972.

[3] COURANTE, R., **Cálculo Diferencial e Integral**. Vol. 2 1ª ed. Porto Alegre: Editora Globo,1963.

[4] FIGUEIREDO, D. G.; NEVES, A. F., **Equações diferenciais aplicadas**. 2ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.

[5] KREYSZIG, E., **Advanced Engineering Mathematics**. 7th ed. New York: Wiley, 1993

[6] SCHIFF, J. L., **The Laplace Transform**: Theory and Applications. New York: Springer-Verlag, 1999

[7] SPIEGEL, M. R., **Schaum's Outline of Theory and Problems of Laplace Transforms**. New York: McGraw-Hill, 1965.

[8] STEPHENSON, G., **An introduction to partial differential equations for science students**. 1ª ed. São Paulo: Longmans, 1968.