



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

MAURÍCIO NEVES BRANCO

VOLUME

MAURÍCIO NEVES BRANCO

VOLUME

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial ao curso de licenciatura em Matemática, com propósito de aquisição do título de licenciado em Matemática

Orientador: Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva

BELÉM-PA
2014

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

MAURÍCIO NEVES BRANCO

Trabalho de conclusão de curso, apresentado como requisito parcial ao curso de licenciatura em Matemática, com propósito de aquisição do título de licenciado em Matemática, pela Banca examinadora:

Data: _____ / _____ / 2014

Prof. Dr. Juaci Picanço da Silva.
Faculdade de Matemática, UFPa

Prof. Dr. José Antônio Moraes Vilhena.
Faculdade de Matemática, UFPa

Prof. Dra. Rúbia Gonçalves Nascimento.
Faculdade de Matemática, UFPa

CONCEITO: _____

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, muito a Deus, pois sem Ele nada disso seria possível: meus passos, minha proteção, meus sonhos, minhas realizações, enfim, todo o amparo que me foi dado. É graças a Ele, que conquistei a sabedoria que tenho. Peço-lhe que sempre esteja renovando a minha força e me abençoe a cada dia. Agradeço todas as coisas boas que Ele coloca em meu caminho. Em especial, meu filho, Julius, pois me faz bem tê-lo comigo.

A minha família, irmão, primos e tios, pois me deram forças para continuar minha jornada; fizeram de mim, o Homem que me tornei; apoiando-me e colaborando para que meus sonhos se tornem realidade. Em especial, minha mãe Aparecida das Neves e minha avó Marlene Branco que estiveram sempre ao meu lado me ajudando nas grandes dificuldades que enfrentei.

Aos meus queridos amigos que tornaram esses quatro anos muito agradáveis e divertidos. Cada dia novos motivos para sorrir. Jamais vou esquecer os momentos vividos e compartilhados, dentro e fora da universidade, na fila do RU e as loucuras no Vadião. Todos ficarão guardados, com carinho, em meu coração: Tiogo Sousa, Karin Goiabeira, Isabela Queiroz, Automa de Oliveira, José Luiz, Marcelo Moura, Elisa Martins, Ingra Dantas, Rosângela Silva, Gilmax Wanzeler, Jéssica Amorim, Pâmela Furtado, Ramon Brito, Bruno Castanho, Vanessa Vilhena e Cristiano Pinheiro. Em especial, Silvana Gonçalves, mais que uma amiga.

A todos os educadores que se dedicaram, ensinaram e aprenderam durante esses anos de convivência: Dr^a. Rúbia Nascimento, Dr^a. Joelma Morbach, Dr^a Cristina Vaz, Dr^a. Maria José Mendes e Dr^a Nazaré Bezerra. Em especial, Dr. Juaci Silva pela paciência e suas orientações que me levaram ao último passo da graduação.

A todos, serei eternamente grato. Um dia irei retribuir. Muito Obrigado!

Tudo está organizado segundo os números e as formas geométricas.

Pitágoras

RESUMO

Nossa proposta é apresentar mecanismos para calcular o volume de objetos matemáticos tridimensionais. A princípio, vamos demonstrar as fórmulas clássicas aplicadas em sólidos da geometria espacial. Posteriormente, mostraremos como calcular o volume de sólidos de revolução, via integral unidimensional. E, por fim, exibiremos argumentos que comprovam como calcular volumes usando integral dupla e tripla.

Conteúdo

1	Sólidos da geometria espacial clássica	4
1.1	Volume do prisma	4
1.1.1	Definição	4
1.2	Volume da Pirâmide	9
1.2.1	Definição	9
1.2.2	Pirâmide de qualquer base	12
1.2.3	Tronco de pirâmide	14
1.3	Volume do cilindro circular	17
1.3.1	Definição	17
1.4	Volume do cone	20
1.4.1	Definição	20
1.4.2	Tronco de cone	23
1.5	Volume da Esfera	26
1.5.1	Definição	26
2	Integral de Riemann	31
2.1	Propriedades das Integrais de Riemann	34
2.2	Resultados Importantes	36
3	Teorema Fundamental do Cálculo	39
4	Volumes de Sólidos de Revolução	43
4.1	Método dos discos circulares	44
4.2	Método dos anéis circulares	47
4.3	Método dos invólucros cilíndricos	48
4.4	Método das secções transversais	50

5	Integral dupla	52
5.1	Teorema de Fubini para retângulos	55
5.2	Propriedades da Integral dupla	56
5.3	Outras regiões de integração	60
5.4	Mudanças de variáveis em integrais duplas	67
5.4.1	Coordenadas polares	74
5.4.2	Regiões mais gerais	80
6	Integral Tripla	83
6.1	Mudanças de variáveis em integrais triplas	88
6.1.1	Coordenadas Cilíndricas	89
6.1.2	Coordenadas Esféricas	91

Introdução

O volume de um objeto desempenha papel importante em situações-problemas nas diversas áreas das ciências, inclusive na própria matemática, como, por exemplo, na geometria. Todos temos uma idéia do que é volume. Uma delas, intuitivamente, é a quantidade de espaço ocupado por um objeto, ou ainda, calcular volume é verificar a capacidade que tal objeto tem de comportar algumas substâncias, entre elas: a água. Determinar a medida do volume de um sólido tem grande importância no cotidiano e com o estudo do cálculo, os matemáticos estabeleceram métodos sofisticados para calcular tais medidas. Este trabalho reside, exatamente, em verificar a veracidade dos métodos para calcular volume de diversos sólidos, desde os sólidos clássicos da geometria espacial ao uso de integral para sólidos de formas mais gerais.

No primeiro capítulo demonstramos as fórmulas do cálculo de volume de sólidos da geometria espacial clássica, ou seja, dos prismas e corpos redondos. E para isso, fazemos uso de alguns resultados importantes, tais como o Princípio de Cavalieri e o volume do sólido chamado anticlépsidra. No capítulo 2 e 3, damos início ao estudo do cálculo de integral. Vamos apresentar propriedades da integral simples e o Teorema Fundamental do Cálculo. Este, por sua vez, é uma importante ferramenta que nos auxiliará na resolução das aplicações apresentadas durante o desenvolvimento deste trabalho. Em sequência, no capítulo 4, com estudo do cálculo de integral simples, mostraremos métodos para calcular volume de corpos que conhecemos por sólidos de revolução.

Nos capítulos seguintes e finalizando o trabalho, iniciamos a integração múltipla. Definiremos e mostramos propriedades das integrais duplas e triplas e nosso interesse com estas integrais é o cálculo do volume. Teorema de Fubini, regiões diversas de integração e mudanças de variáveis são temas que aqui serão discutidos. A mudança em coordenadas polares é um caso particular de mudança de coordenada na integral dupla. Na integração tripla, por sua vez, apresentaremos duas mudanças: coordenadas cilíndricas e esféricas.

Capítulo 1

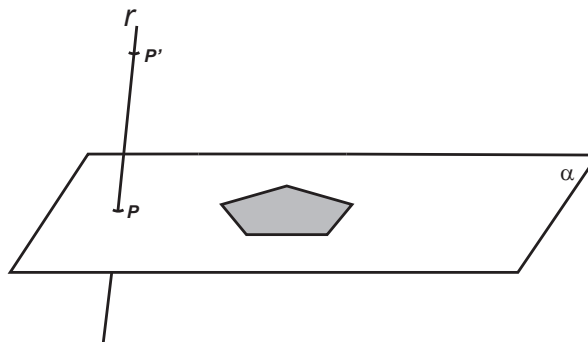
Sólidos da geometria espacial clássica

1.1 Volume do prisma

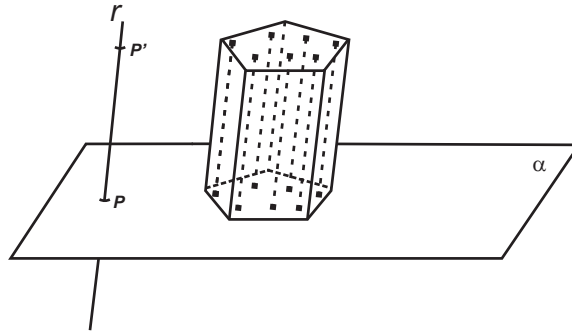
O primeiro tipo de sólido que apresentamos o cálculo do volume é o do prisma. A classe dos prismas contém vários sólidos como os paralelepípedos e os cubos. O cálculo do volume desses sólidos é relativamente simples em comparação com outros que estudaremos aqui e, por isso, começaremos por eles.

1.1.1 Definição

Considere um polígono contido em um plano α e seja r uma reta secante a α . Seja, ainda, P o ponto de intersecção de r com α . Em r , considere, também, um ponto P' distinto de P



Chama-se *prisma* a reunião de todos os segmentos paralelos e congruentes a $\overline{PP'}$ que tem uma extremidade em um ponto do polígono e estão situados num mesmo semi-espaço determinado por α



Quando nos referimos ao *paralelepípedo* estamos falando do prisma cujas bases são paralelogramos. Do mesmo modo, *Paralelepípedo retângulo* é um prisma reto cujas bases são retângulos. É importante ressaltar que paralelepípedos são prismas cuja particularidade é que qualquer de suas faces pode ser tomada como base. Um caso particular de paralelepípedo retângulo é o *cubo* no qual cada face é uma região quadrada, isto é, com todas suas arestas congruentes.

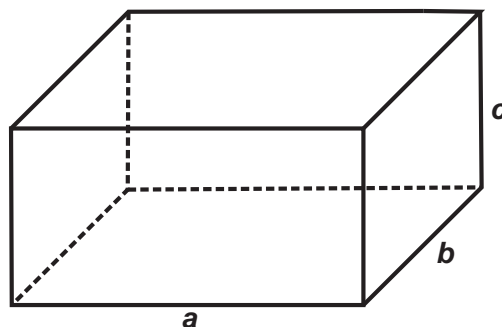
Definição 1 (Cubo unitário). *Estabeleceremos como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual chamaremos de cubo unitário e seu volume será igual a 1.*

Resta mostrar como calcular o volume destes paralelepípedos. E para tal finalidade, segue o Teorema:

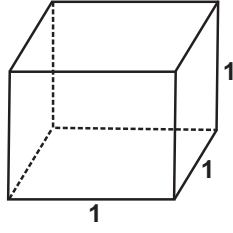
Teorema 1. *O volume de paralelepípedo retângulo é igual ao produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração.

Seja $V(a, b, c)$ o volume do paralelepípedo retângulo cujas dimensões são a, b e c .



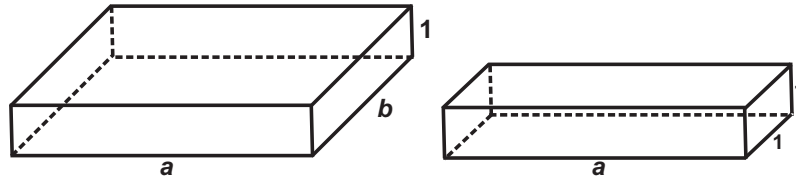
Utilizaremos o cubo unitário para medir o paralelepípedo retângulo, isto é, o paralelepípedo que por definição tem volume igual a $V(1, 1, 1) = 1$.



Para isso estabeleceremos a razão que será o volume procurado:

$$V = \frac{V(a, b, c)}{V(1, 1, 1)}$$

Consideremos, então, os paralelepípedos em que 1 é a unidade de comprimento.



Nessas condições, temos:

$$\frac{V(a, b, c)}{V(a, b, 1)} = \frac{c}{1}$$

Base (a, b) congruentes.

$$\frac{V(a, b, 1)}{V(a, 1, 1)} = \frac{b}{1}$$

Base $(a, 1)$ congruentes.

$$\frac{V(a, 1, 1)}{V(1, 1, 1)} = \frac{a}{1}$$

Base $(1, 1)$ congruentes.

Multiplicando-se membro a membro:

$$\frac{V(a, b, c)}{V(a, b, 1)} \cdot \frac{V(a, b, 1)}{V(a, 1, 1)} \cdot \frac{V(a, 1, 1)}{V(1, 1, 1)} = \frac{c}{1} \frac{b}{1} \frac{a}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{V(a, b, c)}{V(1, 1, 1)} = \frac{c}{1} \frac{b}{1} \frac{a}{1}$$

$$\Rightarrow V = abc$$

Tomando como base a face de dimensões a e b , indicando por S_b a área dessa base e a altura c por H , podemos escrever:

$$V = S_b H$$

■

Corolário 1. *O volume de um cubo é igual ao cubo da medida de sua aresta.*

Demonstração.

É imediata, pois o cubo é um caso particular do paralelepípedo retângulo, onde suas arestas tem medidas iguais, ou seja, $a = b = c$.

Como,

$$V = abc$$

então,

$$V_{cubo} = aaa$$

portanto,

$$V_{cubo} = a^3$$

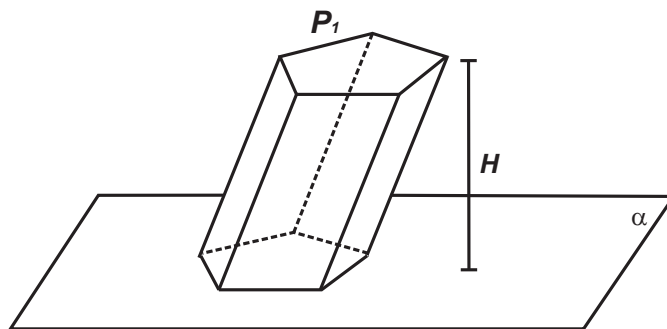
■

Agora, demonstraremos a fórmula utilizada para calcular volume do prisma de qualquer base.

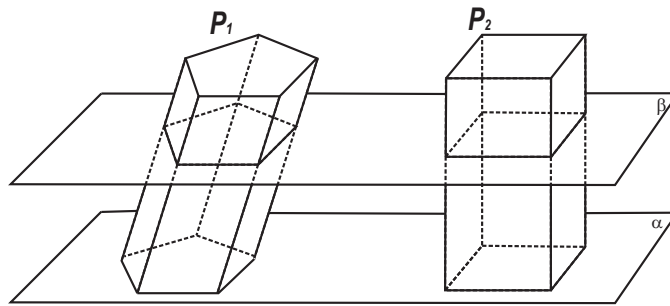
Teorema 2. *O volume de um Prisma é igual ao produto da área da base pela medida da altura.*

Demonstração.

Dado um prisma P_1 qualquer de altura H cuja base está contida em um plano α .



Consideremos um paralelepípedo retângulo P_2 de mesma altura H e base contida em α . Suponhamos um plano β paralelo a α que intercepta P_1 e P_2 .



Se todo plano paralelo a β , que intercepta P_1 e P_2 , determinar secções transversais de áreas iguais, então, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos P_1 e P_2 têm volumes iguais.

$$V_{P_1} = V_{P_2}$$

Como, o volume de P_2 é dado por:

$$V_{P_2} = S_b H$$

Portanto, o volume de um prisma qualquer é:

$$V_{P_1} = S_b H$$

■

Vejam as imagens, são exemplos que lembram prismas:

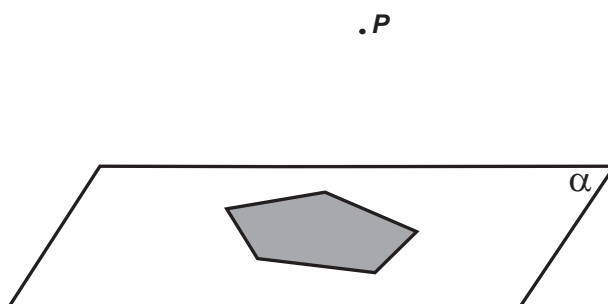


1.2 Volume da Pirâmide

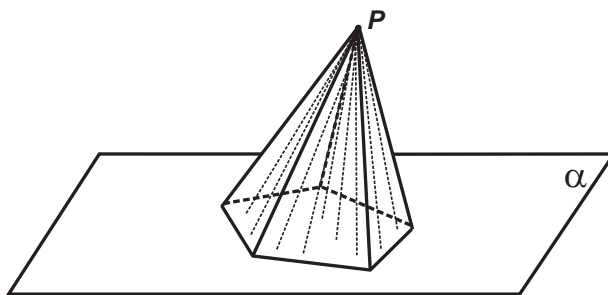
Estudaremos, agora, o volume das pirâmides que são sólidos utilizados desde os primórdios da humanidade. As primeiras grandes construções humanas tinham o formato de pirâmides, datam milhares de anos e são encontradas na África, Ásia e, até mesmo, nas Américas.

1.2.1 Definição

Considere um polígono contido em um plano α e o ponto P exterior ao plano da região poligonal, ou seja, $P \notin \alpha$.



Chama-se de *pirâmide* o sólido formado pela reunião de todos os segmentos de reta que tem uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do polígono.

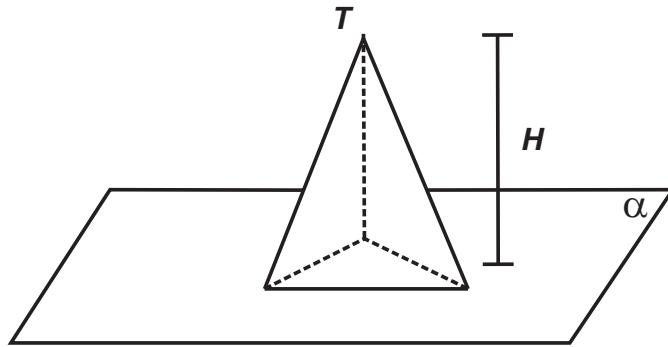


Chama-se *tetraedro* a pirâmide cuja região poligonal é um triângulo.

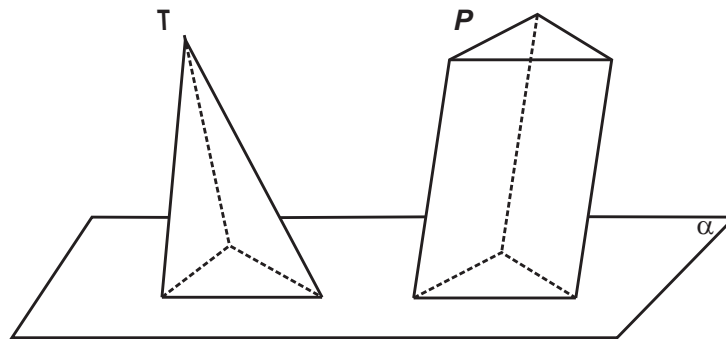
Teorema 3. *O volume de um tetraedro é igual a um terço do produto da área da base pela medida da sua altura.*

Demonstração.

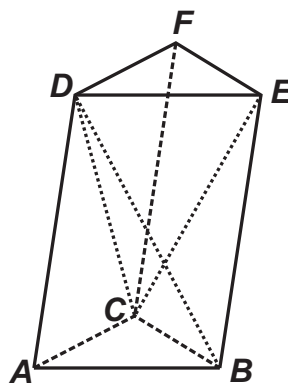
Dado um tetraedro T de altura H cuja base está contida em um plano α .



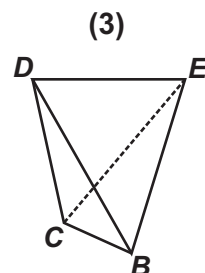
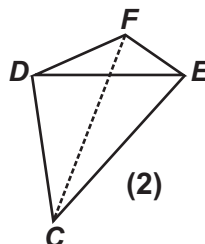
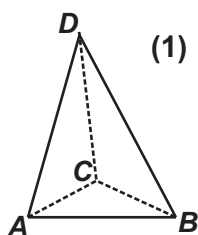
Consideremos um prisma triangular P de mesma altura H e base contida em α .



Vamos decompor o prisma triangular P em três tetraedros (1, 2 e 3), com a finalidade de mostrar que eles têm o mesmo volume.



Daí segue,



Os tetraedros 1 e 2 têm volumes iguais, pois suas bases têm áreas iguais e ambos os tetraedros possuem a mesma altura.

$$V_1 = V_2 \tag{1.1}$$

Observe os tetraedros 2 e 3. Considere como base os triângulos FEC e BCE . A área de cada um é a metade da área da face $BCFE$ do prisma P . Logo, essas bases têm áreas iguais. Além disso, os tetraedros 2 e 3 têm a mesma altura. Então,

$$V_2 = V_3 \tag{1.2}$$

De 1.1 e 1.2 segue,

$$V_1 = V_2 = V_3$$

Logo, o volume de cada uma destes tetraedros é um terço do volume do prisma P .

$$V_1 = \frac{1}{3}V_P$$

Particularmente, o tetraedro 1 têm a mesma base e a mesma altura do tetraedro T e do prisma P .

Portanto, pelo Princípio de Cavalieri, conclui-se que:

$$V_T = \frac{1}{3}S_bH$$

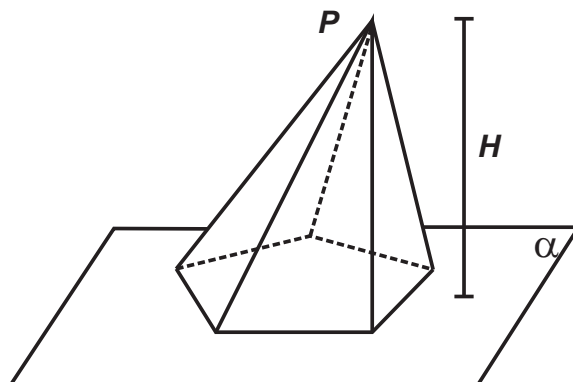
■

1.2.2 Pirâmide de qualquer base

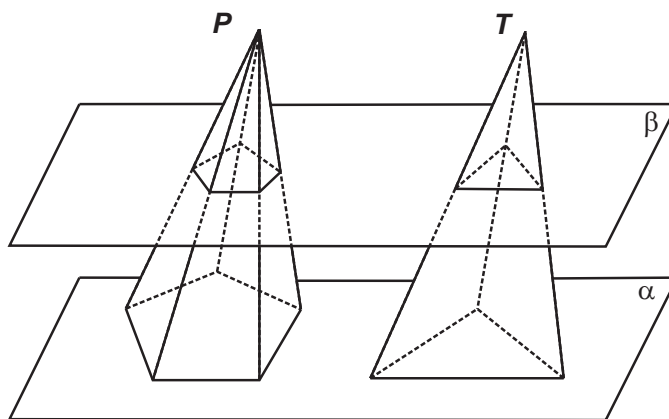
Teorema 4. *O volume de uma pirâmide qualquer é igual a um terço do produto da sua área da base pela medida da sua altura.*

Demonstração.

Dada uma pirâmide P de qualquer base e altura H cuja base está contida em um plano α .



Consideremos um tetraedro T de mesma altura H e base contida em α . Suponhamos um plano β paralelo a α que intercepta P e T .



Se todo plano β paralelo a α , que intercepta P e T , determinar secções transversais de áreas iguais, então, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos P e T têm volumes iguais.

$$V_T = \frac{1}{3}S_b H$$

e

$$V_T = V_P \Rightarrow V_P = \frac{1}{3}S_b H$$

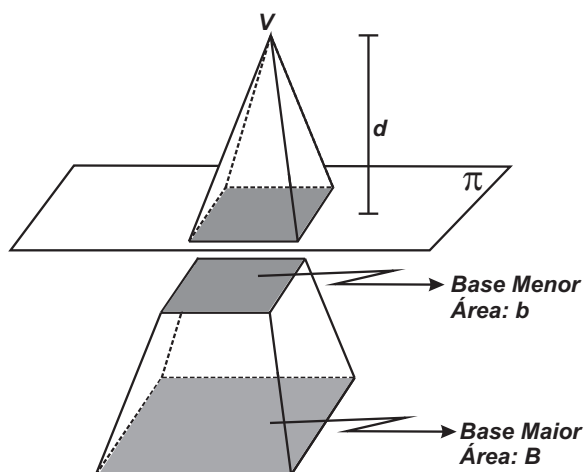
■

Veja as imagens, como podemos encontrar objetos ou estruturas que nos lembram pirâmides.



1.2.3 Tronco de pirâmide

Considere uma pirâmide de vértice V . Traçando um plano π paralelo à base, que secciona a pirâmide a uma distância d do vértice.

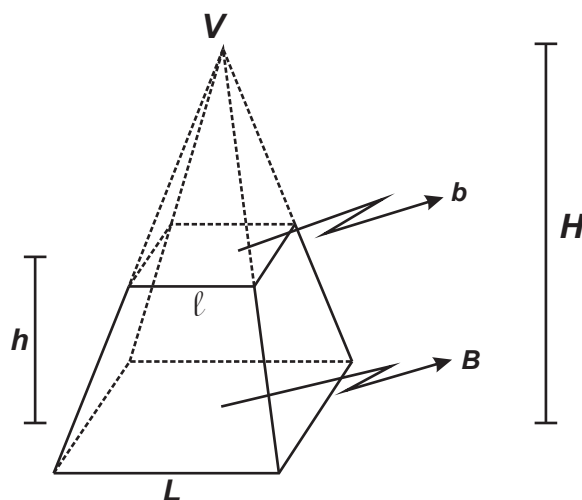


Desta forma, obtemos dois sólidos: uma pirâmide de vértice V e altura d e outro que contém a base da pirâmide inicial. Este, recebe o nome de *Tronco de pirâmide*.

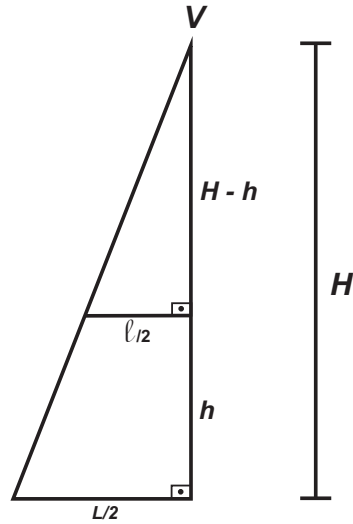
Teorema 5. *O volume do tronco de uma pirâmide é dada por:*

$$V_{tronco} = \frac{1}{3}h[B + \sqrt{b}\sqrt{B} + b]$$

Demonstração.
Seja o tronco de pirâmide



Destacamos os triângulos:



$$\frac{H-h}{\frac{l}{2}} = \frac{H}{\frac{L}{2}} \Rightarrow \frac{H-h}{H} = \frac{l}{L}$$

Elevando ao quadrado ambos os membros:

$$\frac{(H-h)^2}{H^2} = \frac{l^2}{L^2}$$

Como:

$l^2 = \text{Área da seção. Portanto, } l^2 = b$

$L^2 = \text{Área da base. Portanto, } L^2 = B$

Assim,

$$\left(\frac{H-h}{H}\right)^2 = \frac{b}{B}$$

Desenvolvendo a igualdade, tem-se:

$$H\sqrt{b} = H\sqrt{B} - h\sqrt{B}$$

$$h\sqrt{B} = H(\sqrt{B} - \sqrt{b})$$

$$H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \tag{1.3}$$

Observando a pirâmide, é de imediato

$$V_{tronco} = V_{P_{maior}} - V_{P_{menor}}$$

E como já sabemos calcular o volume de uma pirâmide de qualquer base:

$$\begin{aligned} V_{tronco} &= \frac{1}{3}BH - \frac{1}{3}b(H - h) \\ &= \frac{1}{3}[BH - bH + bh] \\ &= \frac{1}{3}[H(B - b) + bh] \end{aligned}$$

De 1.3 , segue que:

$$\begin{aligned} V_{tronco} &= \frac{1}{3} \left[\frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}(B - b) + bh \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[\frac{B - b}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}h\sqrt{B} + bh \right] \\ &= \frac{1}{3}[(\sqrt{B} + \sqrt{b})h\sqrt{B} + bh] \\ &= \frac{1}{3}[hB + h\sqrt{b}\sqrt{B} + bh] \\ &= \frac{1}{3}h[B + \sqrt{b}\sqrt{B} + b] \end{aligned}$$

■

Exemplo de tronco de pirâmide, veja a imagem:

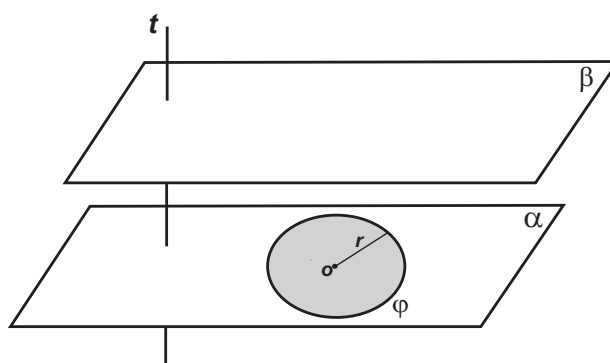


1.3 Volume do cilindro circular

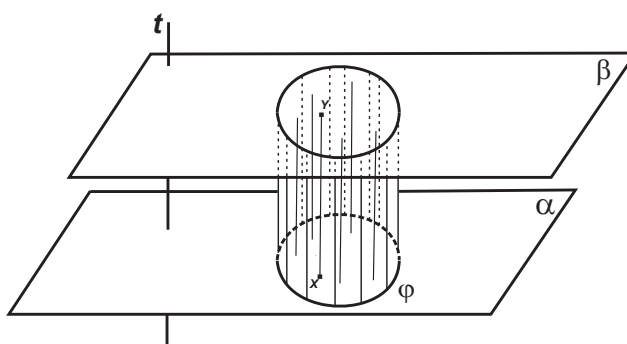
A seguir apresentaremos outro sólido conhecido: o cilindro circular. E como tal, não diferente dos demais estudados até aqui, o formato cilíndrico está presente no dia-a-dia e têm várias utilidades, como reservatórios de água, embalagens de produtos, entre outros.

1.3.1 Definição

Sejam α e β planos paralelos e φ um círculo (região circular) de centro O e raio r , contido em α . Seja, ainda, t uma reta que intersecta α e β .



Considere todos os segmentos \overline{XY} paralelos a t com extremidade X no círculo φ e Y no plano β .

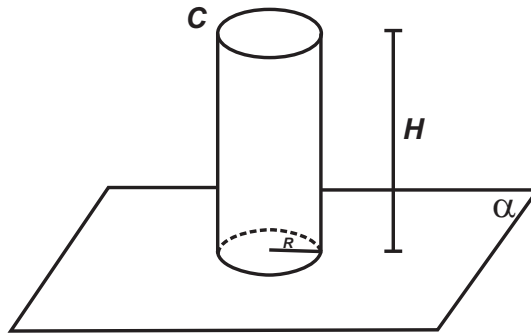


Chama-se de *cilindro circular* a união destes segmentos.

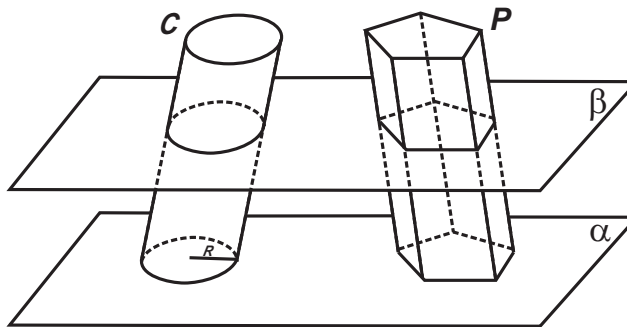
Teorema 6. *O volume do cilindro circular é igual ao produto da área da sua base (região circular) pela medida de sua altura.*

Demonstração.

Dado um cilindro circular C de altura H e raio R cuja base está contida em um plano α .



Consideremos um prisma P de mesma altura H e base contida em α .
 Suponhamos um plano β paralelo a α que intercepta C e P .



Se todo plano β paralelo a α , que intercepta C e P , determinar secções transversais de áreas iguais, então, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos C e P têm volumes iguais.

$$V_C = V_P$$

Como,

$$V_P = S_b H$$

Logo,

$$V_C = S_b H$$

Portanto, sendo a base de um cilindro uma região circular de raio R

$$V_C = \pi R^2 H$$

■

São várias as formas que nos lembram este sólido. Veja a imagem:

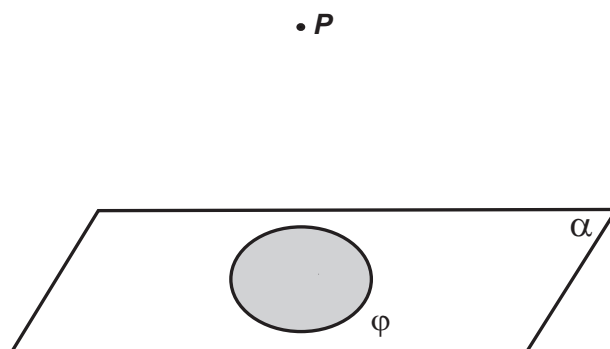


1.4 Volume do cone

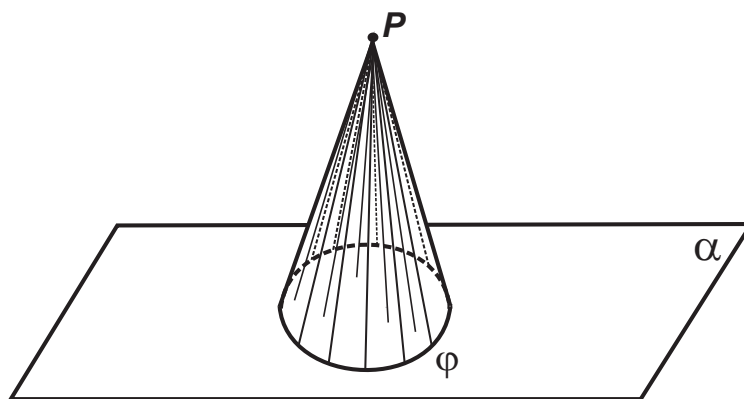
O sólido que estudaremos agora é chamado de cone. O cone é outro importante sólido da geometria clássica. Assim como prismas, pirâmides e cilindros, objetos que nos lembram o cone estão presentes no cotidiano. São vários os utensílios e locais que nos recordam este sólido, por exemplo, na arquitetura, culinária e até mesmo em obras de arte.

1.4.1 Definição

Considere um plano α , uma região circular φ contida nesse plano e o ponto P não pertencente a α .



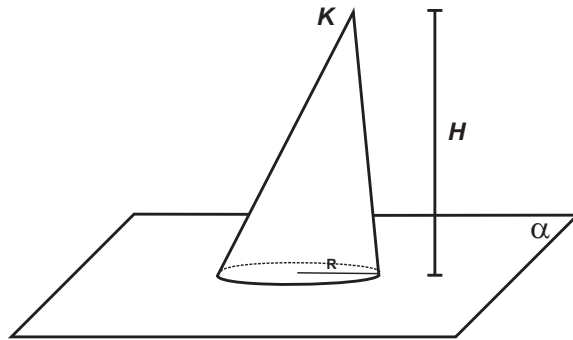
Chama-se *cone circular*, a reunião de todos os segmentos que tem uma extremidade em P e a outra num ponto qualquer do círculo φ .



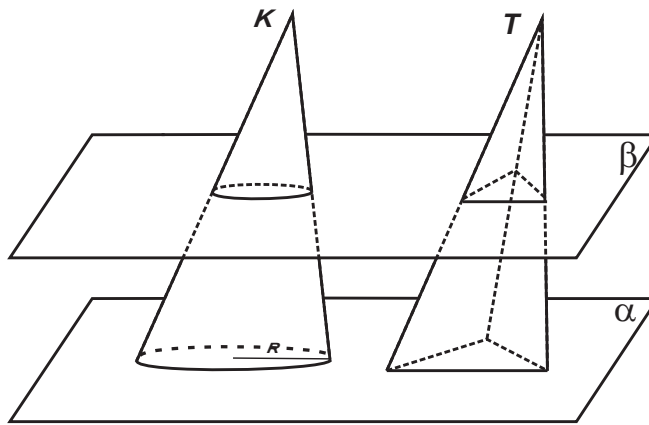
Teorema 7. *O volume do cone é um terço do produto da área da sua base (região circular) pela medida da sua altura.*

Demonstração.

Dado um cone K de altura H e raio da base R está contido em um plano α .



Consideremos um tetraedro T de mesma altura H e base contida em α e suponhamos um plano β paralelo a α que intercepta K e T .



Se todo plano β paralelo a α , que intercepta K e T , determinar secções transversais de áreas iguais, então, pelo Princípio de Cavalieri, os sólidos K e T têm volumes iguais.

$$V_K = V_T$$

Como,

$$V_T = \frac{1}{3} S_b H$$

Então,

$$V_K = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

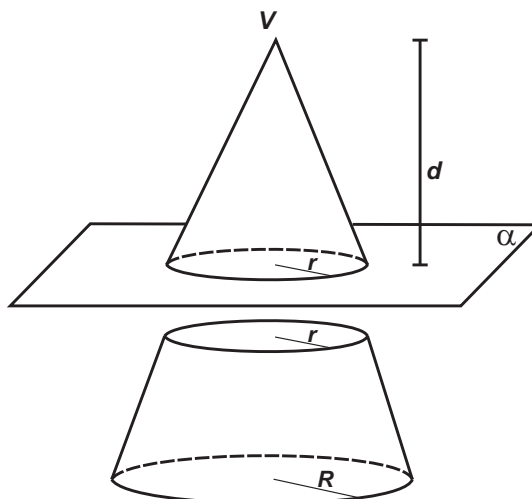
■

Veja na imagem um exemplo de cone circular



1.4.2 Tronco de cone

Sejam um cone circular de vértice V com raio da base R e um plano α paralelo a base que secciona o cone a uma distância d do vértice.

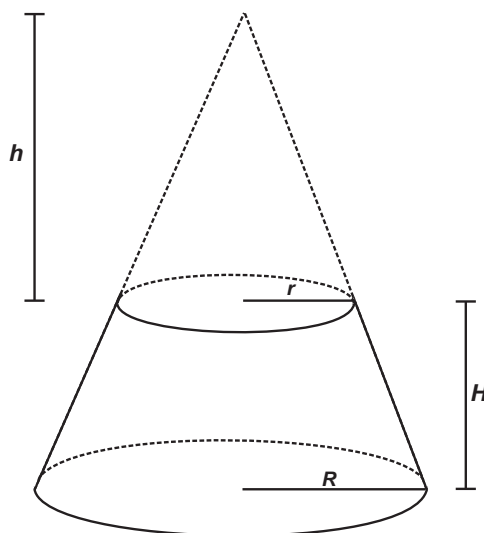


Desta forma, obtemos dois sólidos: um cone de vértice V e altura d e outro que contém a base do cone inicial. Este, recebe o nome de *tronco de cone*.

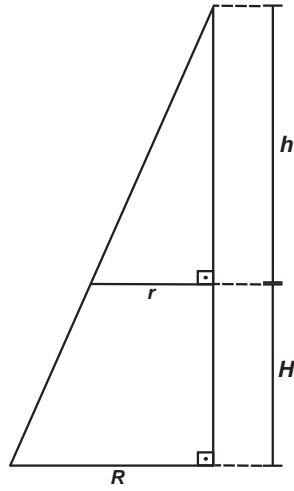
Teorema 8. *O volume do tronco de cone é dado por:*

$$\frac{\pi}{3}H[rR + r^2 + R^2]$$

Demonstração.
Seja o cone



Destacamos a relação dos triângulos:



$$\frac{h + H}{h} = \frac{R}{r}$$

onde,

$$h = \frac{rH}{R - r} \quad (1.4)$$

Sabemos que:

$$\begin{aligned} V_{tronco} &= V_{K_{maior}} - V_{K_{menor}} \\ V_{tronco} &= \frac{1}{3}\pi R^2(h + H) - \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ V_{tronco} &= \frac{\pi}{3}[h(R^2 - r^2) + R^2 H] \end{aligned}$$

De 1.4, segue que:

$$\begin{aligned} V_{tronco} &= \frac{\pi}{3} \left[\frac{rH}{R - r} (R + r)(R - r) + R^2 H \right] \\ &= \frac{\pi}{3} [rRH + r^2 H + R^2 H] \\ &= \frac{\pi}{3} H [rR + r^2 + R^2] \end{aligned}$$

■

Exemplo de tronco de cone:

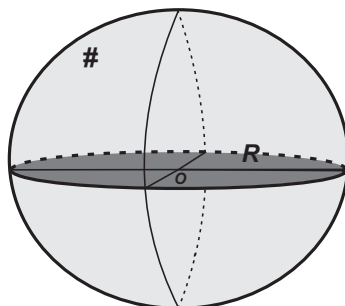


1.5 Volume da Esfera

O último sólido da geometria espacial clássica que apresentaremos é conhecido como Esfera. Quando exploramos ao nosso redor, notamos diversos objetos cujo formato nos remetem a este sólido. Formatos, estes, dos mais variados tamanhos, desde pequenos portes, como bolinhas de gude e bolas de sinuca à médios e grandes portes, como o globo terrestre. Nossa interesse reside em verificar a fórmula para calcular o volume da esfera.

1.5.1 Definição

Considere o ponto O e um segmento de medida R . Chama-se *esfera* de centro O e raio R ao conjunto dos pontos do espaço que estão a uma distância menor do que ou igual a R do ponto O .



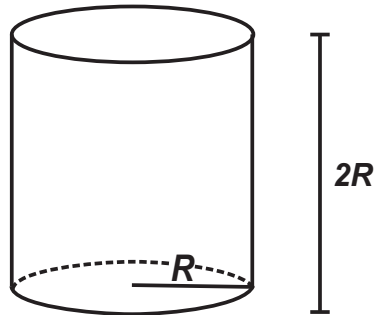
Teorema 9. *O volume de uma esfera de raio R é dada por:*

$$V_{esfera} = \frac{3}{4}\pi R^3$$

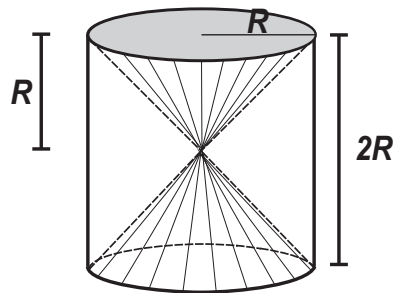
Para tal demonstração, mostraremos dois resultados importantes que serão de grande valia para demonstrar a fórmula do volume da esfera: a área da coroa circular, obtida pela intersecção de um plano com a anticlépsidra e a área da secção circular, obtido pela intersecção de um plano com uma esfera.

Primeiramente, verificaremos a área de uma coroa circular, obtida pela intersecção de um plano com um anticlépsidra.

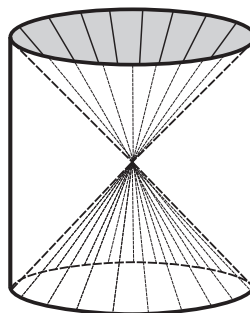
Seja um cilindro de raio R cuja altura é igual ao diâmetro da base. Este recebe o nome de *cilindro equilátero*.



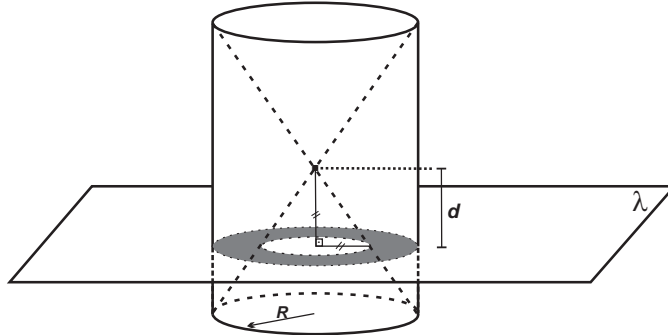
Tomemos dois cones de raio R ligados pelos vértices e inscritos no cilindro equilátero, onde a altura de cada cone é a metade da altura do cilindro e o centro do cilindro é o vértice dos cones.



Ao extrairmos os dois cones do cilindro, obtemos um sólido, o qual chamamos de *anticlépsidra*.



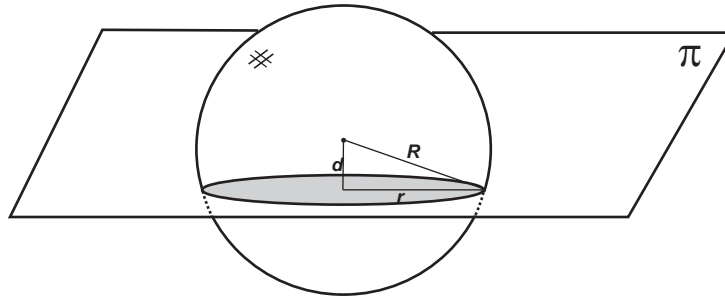
Neste sólido, vamos considerar uma secção transversal determinado por um plano λ situado a uma distância d do vértice dos cones (centro do cilindro).



Veja, essa secção é uma coroa circular cuja área é igual:

$$S_{coroa} = \pi(R^2 - d^2)$$

Observe, agora, que qualquer plano secante a uma esfera de raio R , intercepta-a segundo um círculo. O raio r desse círculo depende da distância d do centro da esfera ao plano de secção.



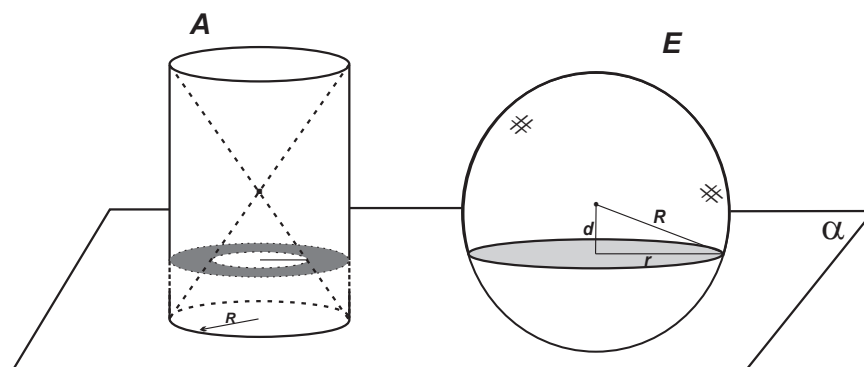
Logo, a área da secção (região circular) é dada por:

$$S_{circulo} = \pi(R^2 - d^2)$$

Demonstração.

Dada uma esfera E de raio R que têm um ponto de tangência com o plano α .

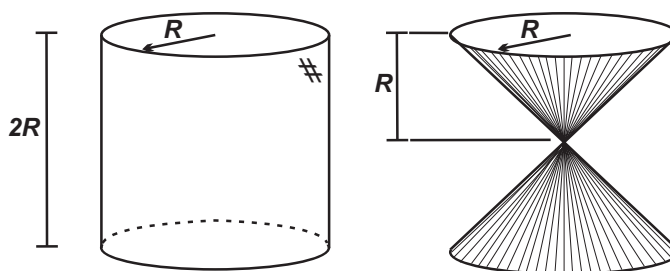
Consideremos um anticlépsidra A cuja base está contida em α e no mesmo semi-espço da esfera E .



Então, pelo Princípio de Cavalieri podemos concluir que o volume da anticlépsidra é igual ao volume de uma esfera de raio R .

$$V_A = V_E$$

Por outro lado, o volume do anticlépsidra é imediato. Para isso, basta subtrair os volumes dos dois cones do cilindro equilátero.



$$\begin{aligned}
 V_A &= V_C - 2V_K \\
 &= \pi R^2 2R - 2 \frac{1}{3} \pi R^2 R \\
 &= 2R^3 \pi - \frac{2}{3} R^3 \pi \\
 &= \left(2 - \frac{2}{3}\right) R^3 \pi \\
 &= \frac{4}{3} R^3 \pi
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$V_E = \frac{4}{3} R^3 \pi$$

■

São exemplos de objetos que lembram este sólido:

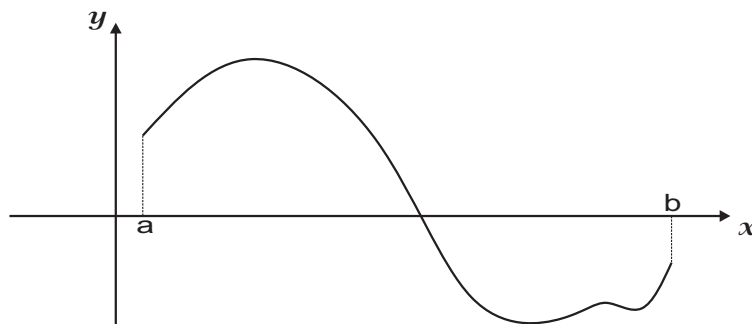


Capítulo 2

Integral de Riemann

Neste momento, iniciaremos o estudo da integral simples, apresentando definições, propriedades e alguns teoremas que serão úteis para, posteriormente, fazer uso destas integrais para calcular o volume de sólidos.

Seja f uma função contínua definida em um intervalo $[a, b]$.

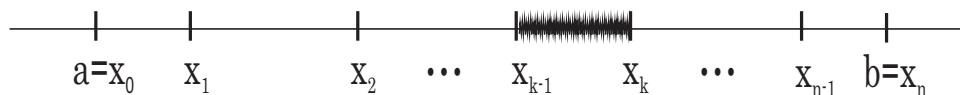


Consideremos uma partição \mathcal{P} no intervalo $[a, b]$ em n subintervalos fechados, tais que:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

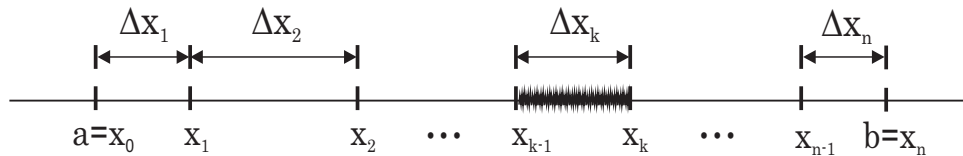
Deste modo, o k -ésimo subintervalo de \mathcal{P} é:

$$[x_{k-1}, x_k], \text{ com } 1 \leq k \leq n$$



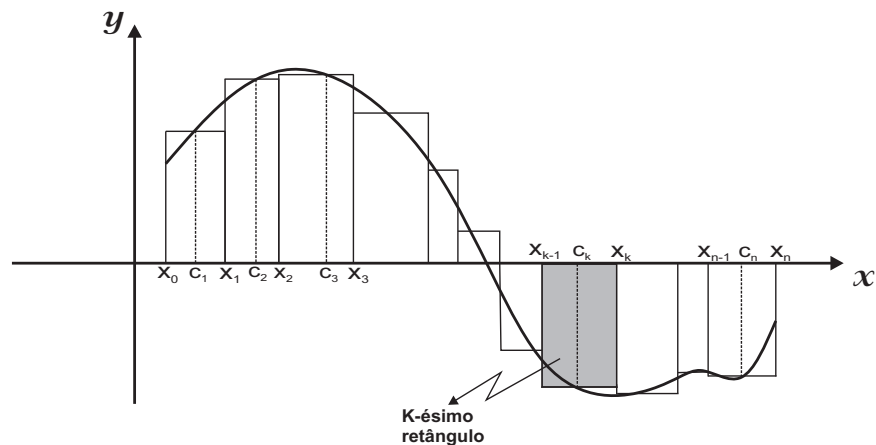
Denotemos por Δx_k o comprimento do k -ésimo subintervalo, tal que

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$



Observação 1. Note que o comprimento dos subintervalos não são necessariamente iguais.

Para cada índice k , consideremos C_k um número em $[x_{k-1}, x_k]$ escolhido arbitrariamente. Com isso, em cada subintervalo, construímos um retângulo com base no eixo x e toca a curva no ponto $(C_k, f(C_k))$.



Com este procedimento, formamos produtos da forma

$$f(C_k) \cdot \Delta x_k$$

Note que,

- Se $f(C_k) > 0 \implies f(C_k) \cdot \Delta x_k$ é a área do retângulo determinado pelas retas $x = x_{k-1}$, $x = x_k$, $y = 0$ e $y = f(C_k)$ de comprimento Δx_k e altura $f(C_k)$.
- Se $f(C_k) < 0 \implies f(C_k) \cdot \Delta x_k$ é um número negativo; o oposto da área de um retângulo com comprimento Δx_k e estende-se até o número negativo $f(C_k)$. Assim, a área será $-f(C_k) \cdot \Delta x_k$

A soma \mathcal{S} de todos esses produtos é dada por:

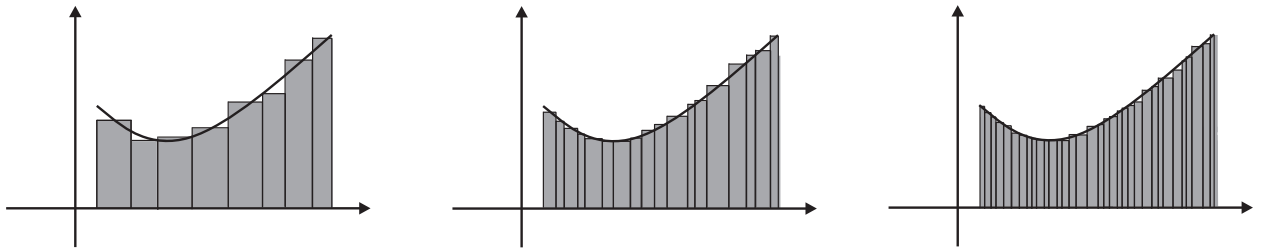
$$\mathcal{S} = \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta x_k$$

É revelante ressaltar que esta soma é **única**, seja qual for a partição no intervalo $[a, b]$ e o somatório é chamado de Soma de Riemann de f relativo a partição \mathcal{P}

Definição 2. A norma de uma partição \mathcal{P} no intervalo $[a, b]$ é o maior de todos os comprimentos dos subintervalos e denotaremos por $\|\mathcal{P}\|$.

$$\|\mathcal{P}\| = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$$

Note que se $\|\mathcal{P}\|$ é um número muito pequeno, então, todos os subintervalos da partição \mathcal{P} são estreitos.



Partições mais finas criam conjuntos de retângulos com bases menores que aproximam a região entre a curva de f e o eixo x com precisão cada vez maior.

Dizemos que I , $I \in \mathbb{R}$, é o limite da soma de Riemann de f se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição \mathcal{P} , temos:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(C_k) \Delta x_k - I \right| < \epsilon$$

O número I , quando existe, é chamado de integral de f . Isto nos motiva a seguinte definição:

Definição 3. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$ é integrável em $[a, b]$ se existe um número real I tal que

$$I = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(C_k) \Delta x_k$$

para toda partição e qualquer ponto escolhido.

Notação: $I = \int_a^b f(x) dx$

Sobre a notação, Leibniz tornou as somas de Riemann $\sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta x_k$ em uma soma infinita dos valores de $f(x)$, multiplicando por comprimento de subintervalos “infinitesimais” dx . O sinal da integral \int lembra um \mathcal{S} maiúsculo, o que é apropriado, pois a integral definida é o limite de uma soma.

Note que as afirmações são sinônimas: “ f é integrável em $[a, b]$ ” e “a integral definida de f de a até b existe.”

2.1 Propriedades das Integrais de Riemann

Segue as propriedades das integrais definidas:

Proposição 1. *Sejam f, g funções integráveis em $[a, b]$ e K um número real, então*

- i. $f \pm g$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b [f(x) \pm g(x)] = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$
- ii. $K \cdot f$ é integrável em $[a, b]$ e $\int_a^b K \cdot f(x)dx = K \cdot \int_a^b f(x)dx$

Demonstração.

[i.] Desde que f e g sejam integráveis, então existem os limites

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta x_k$$

$$\int_a^b g(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(C_k) \cdot \Delta x_k$$

Assim, segue por definição

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n [f(C_k) \pm g(C_k)] \cdot \Delta x_k \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta x_k \pm \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n g(C_k) \cdot \Delta x_k \\ &= \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx \end{aligned}$$

■

[ii.] Desde que f seja integrável em $[a, b]$, então existe o limite

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta x_k$$

Assim, segue por definição

$$\begin{aligned} \int_a^b K \cdot f(x)dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n K \cdot f(C_k) \cdot \Delta x_k \\ &= K \cdot \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(C_k) \cdot \Delta x_k \\ &= K \cdot \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

■

Proposição 2. Se f for integrável em um intervalo $[a, b]$ e $c \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Demonstração.

Seja \mathcal{P} uma partição $[a, b]$ de tal forma que o ponto c seja um ponto da partição, isto é, $c = x_i, \forall i = 1, 2, 3, \dots, n$

Note que o intervalo $[a, c]$ ficou dividido em r subintervalos e, conseqüentemente, $[c, b]$ em $n - r$ subintervalos. Com isso, escrevemos as somas de Riemann

$$\sum_{i=1}^r f(C_i) \cdot \Delta x_i \quad \text{e} \quad \sum_{i=r+1}^n f(C_i) \cdot \Delta x_i$$

Então,

$$\sum_{i=1}^n f(C_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^r f(C_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(C_i) \cdot \Delta x_i$$

E portanto, via definição, segue

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(C_i) \cdot \Delta x_i \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^r f(C_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=r+1}^n f(C_i) \cdot \Delta x_i \right) \\ &= \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^r f(C_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=r+1}^n f(C_i) \cdot \Delta x_i \\ &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \end{aligned}$$

Proposição 3. Se f é integrável e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Demonstração.

Como $f(c_i) \geq 0$ para todo $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ segue que

$$\sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \geq 0$$

Portanto,

$$\lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i \geq 0$$

E dessa forma

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

Proposição 4. Se f e g são funções integráveis em $[a, b]$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

Demonstração.

Considere $N \in \mathbb{R}$, tal que

$$N = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx$$

Note que, basta mostrar que $N \geq 0$. Usando a **proposição 1, item (i)**, podemos escrever:

$$N = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, temos que $f(x) - g(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Portanto, com base na **proposição 3**, concluímos que $N \geq 0$

2.2 Resultados Importantes

Definição 4. Sejam f uma função contínua em $[a, b]$ e $c \in [a, b]$.

- Se $f(c) \geq f(x)$, então $f(c)$ é o valor máximo global de f no ponto $(c, f(c))$, seja qual for $x \in [a, b]$.
- Se $f(c) \leq f(x)$, então $f(c)$ é o valor mínimo global de f no ponto $(c, f(c))$, seja qual for $x \in [a, b]$.

Teorema 10 (Teorema do Valor intermediário). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que*

$$f(a) < d < f(b) \quad \forall d \in \mathbb{R}$$

Então, existe $k \in [a, b]$ tal que $f(k) = d$

Demonstração.

Seja $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x) = f(x) - d$$

Desde que f seja contínua, então g , também, é.
Além disso,

$$g(a) = f(a) - d < 0 \text{ e } g(b) = f(b) - d > 0$$

Geometricamente, desde que f seja contínua, seu gráfico consiste em um trajeto sem interrupção. Os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ pertencem ao gráfico, um abaixo da reta $y = k$ e outro acima desta. Logo, necessariamente, o gráfico intercepta a reta $y = k$, sendo (c, k) o ponto de intersecção. Logo, $k = f(c)$. ■

Teorema 11 (Teorema do Valor médio para integrais). *Seja f uma função contínua em $[a, b]$. Então, existe $k \in [a, b]$ tal que*

$$f(k)(b - a) = \int_a^b f(x)dx$$

Demonstração.

Por hipótese, f é contínua, então f assume valor máximo $f(\bar{x})$ e um valor mínimo $f(\underline{x})$. Assim,

$$f(\bar{x}) \leq f(x) \leq f(\underline{x}) \quad \forall x \in [a, b]$$

entã,

$$\int_a^b f(\bar{x})dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(\underline{x})dx$$

Logo,

$$f(\bar{x}) \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq f(\underline{x}) \cdot (b - a)$$

. Como $b - a \geq 0$, segue

$$f(\bar{x}) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(\underline{x})$$

Pelo Teorema do Valor Intermediário para funções contínuas, f assume todos os valores entre dois quaisquer de seus valores.

Assim, desde que $f(\bar{x})$ e $f(\underline{x})$ são dois desses valores de f e como $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ está entre estes valores, então existe um número k em $[a, b]$ tal que

$$f(k) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Portanto,

$$f(k) \cdot (b-a) = \int_a^b f(x) dx$$

■

Capítulo 3

Teorema Fundamental do Cálculo

Claramente, percebemos o quanto é trabalhoso calcular integrais simples via definição, ou seja, calcular o limite de somas. Apresentaremos, então, um dos teoremas mais importantes no campo de estudo de integrais: o *Teorema Fundamental do Cálculo*. Este teorema estabelece uma ligação entre o estudo das derivadas e o estudo das integrais, além de ser uma ferramenta indispensável no cálculo das integrais definidas. Para apresentar formalmente o Teorema, vamos mostrar alguns resultados importantes. Inicialmente, definiremos uma função auxiliar.

Proposição 5. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e $x \in [a, b]$. Se $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável definida por*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

então

$$G'(x) = f(x)$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Demonstração.

Tomamos a integral definida

$$\int_a^b f(t)dt$$

fixamos o limite inferior a e fazemos variar o limite superior. Então, o valor da integral dependerá desse limite superior variável, o qual indicaremos por x . Fazendo x variar no interior do intervalo $[a, b]$, obtemos uma função $G(x)$, dada por:

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Queremos, então, determinar a derivada $G'(x)$.

Considere dois números x e $x + \Delta x$ em $[a, b]$, segue que

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \qquad G(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta} x f(t)dt$$

Temos,

$$G(x + \Delta x) - G(x) = \int_a^{x+\Delta} x f(t)dt - \int_a^x f(t)dt$$

Usando a **Proposição 2**, podemos escrever

$$\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

então,

$$\begin{aligned} G(x + \Delta x) - G(x) &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[x, x + \Delta x]$, pelo Teorema do valor médio para integrais, existe um ponto \bar{x} entre x e $x + \Delta x$ tal que

$$\begin{aligned} \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt &= (x + \Delta x - x) \cdot f(\bar{x}) \\ &= f(\bar{x}) \cdot \Delta x \end{aligned}$$

Agora, usando a definição para determinar a derivada, temos:

$$G'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\bar{x}) \cdot \Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) \end{aligned}$$

Como \bar{x} está entre x e $x + \Delta x$, segue que $\bar{x} \rightarrow x$ quando $\Delta x \rightarrow 0$ e f é contínua, temos

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} f(\bar{x}) = f(x)$$

logo,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{G(x + \Delta x) - G(x)}{\Delta x} = f(x)$$

ou seja,

$$G'(x) = f(x)$$

■

Uma importante consequencia desse resultado é que toda função f contínua num intervalo $[a, b]$ possui uma primitiva dada por

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

Teorema 12. *Seja f uma função contínua em um intervalo aberto I . Se $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$, então existirá uma constante K , tal que*

$$f(x) = K \quad \forall x \in I$$

Demonstração.

Sejam $x, y \in I, x < y$. Como f é derivável em I , contínua em $[x, y]$ e derivável em (x, y) . Pelo Teorema do valor médio, existe $z \in (x, y)$, tal que

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Como $f'(z) = 0$, vem que $f(x) = f(y)$. Como x e y são dois pontos quaisquer de I , concluímos que f é constante em I .

■

Corolário 2. *Sejam $G(x)$ e $H(x)$ funções primitivas de $f(x)$ e contínuas no intervalo I . Se $G'(x) = H'(x)$ em todo x no interior de I , então existe uma constante K tal que*

$$G(x) = H(x) + K \quad \forall x \in I$$

Demonstração.

Considere uma $S(x) = G(x) - H(x)$. Note que S é contínua em I e $S'(x) = G'(x) - H'(x)$. Como $G'(x) = H'(x)$ segue que $S'(x) = 0$.

Do **Teorema 12**, existe K tal que $S(x) = K$. Assim,

$$G(x) - H(x) = K$$

e, portanto,

$$G(x) = H(x) + K$$

■

Teorema 13 (Teorema Fundamental do Cálculo). *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e F uma primitiva de f neste intervalo, então:*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Demonstração.

Desde que f seja contínua em $[a, b]$, pela **proposição 5**, segue que

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt$$

é uma primitiva de f nesse intervalo.

Seja $F(x) : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva qualquer de f . Pelo **Corolário 2**, temos que:

$$F(x) = G(x) + K \quad \forall x \in [a, b]$$

Consideremos, agora, a diferença $F(b) - F(a)$:

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (G(b) + K) - (G(a) + K) \\ &= G(b) - G(a) \end{aligned}$$

Como $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ e $G(b) = \int_a^b f(t)dt$, segue que

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt$$

Sobre a notação, observemos que podemos escrever:

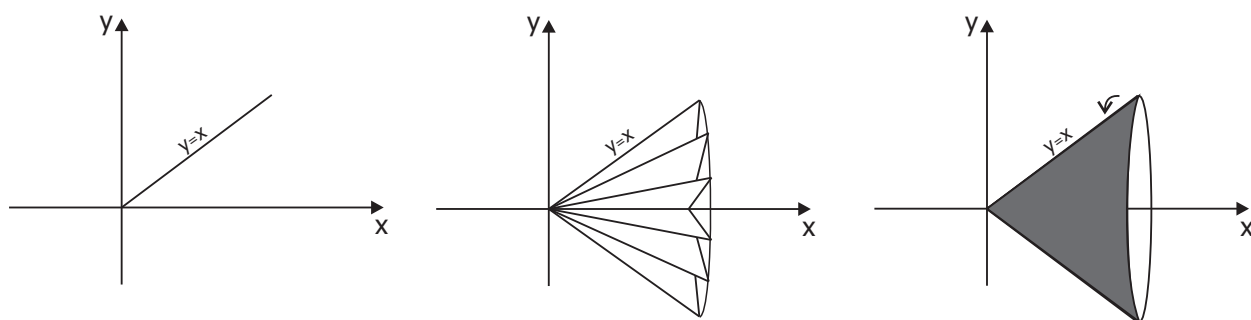
$$\int_a^b f(t)dt = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Capítulo 4

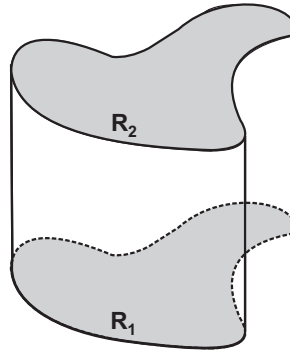
Volumes de Sólidos de Revolução

Uma aplicação de integral definida é no cálculo do volume de sólidos. Usando cortes, discos, anéis circulares e invólucros cilíndricos, mostraremos como a integral definida pode ser usada para calcular os volumes de vários sólidos, dentre estes, os chamados *sólidos de revolução*. Para isto, definiremos tudo como limites de somas de Riemann de funções contínuas em intervalos fechados, isto é, como integrais definidas que podem ser calculadas por meio do Teorema Fundamental do Cálculo.

Definição 5. *Fazendo uma região plana revolver em torno de uma reta no plano, o sólido resultante é chamado de sólido de revolução. A reta ao redor da qual a região rotaciona é chamada de eixo de revolução.*



Definição 6. *Um sólido será um cilindro se for limitado por duas regiões planas congruentes R_1 e R_2 , situadas em planos paralelos e por uma superfície lateral gerada por segmentos de reta, tendo seus extremos sobre R_1 e R_2 . Assim, a altura do cilindro é a distância perpendicular entre os planos onde estão contidas R_1 e R_2 e a base é R_1 ou R_2 .*



Um caso particular, será quando a base do cilindro for uma região limitada por um círculo. Nesse caso, teremos um cilindro circular, cujo cálculo do volume foi demonstrado na **seção 1.3**.

Existem alguns métodos que auxiliam no cálculo do volume dos sólidos de revolução, tais como método dos discos e anéis circulares e, também, por invólucros cilíndricos.

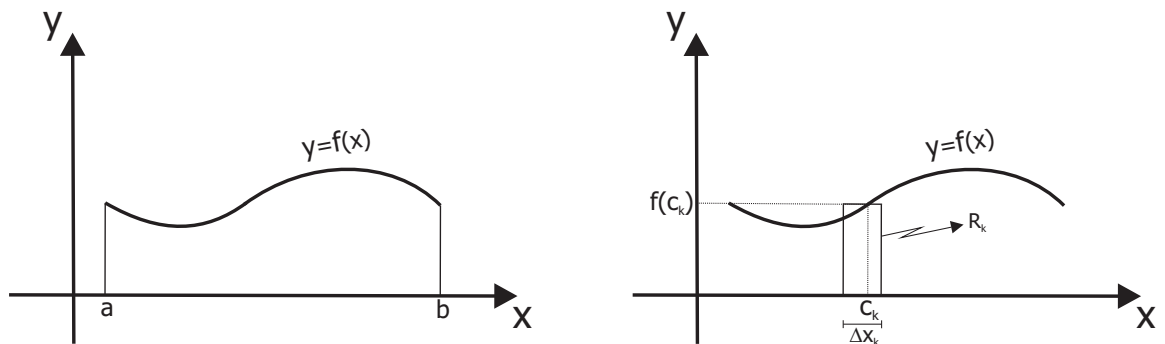
4.1 Método dos discos circulares

Teorema 14. *Sejam $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ e R a região plana limitada pelo gráfico de $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. O volume V do sólido S gerado pela revolução de R em torno do eixo x será dado por:*

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

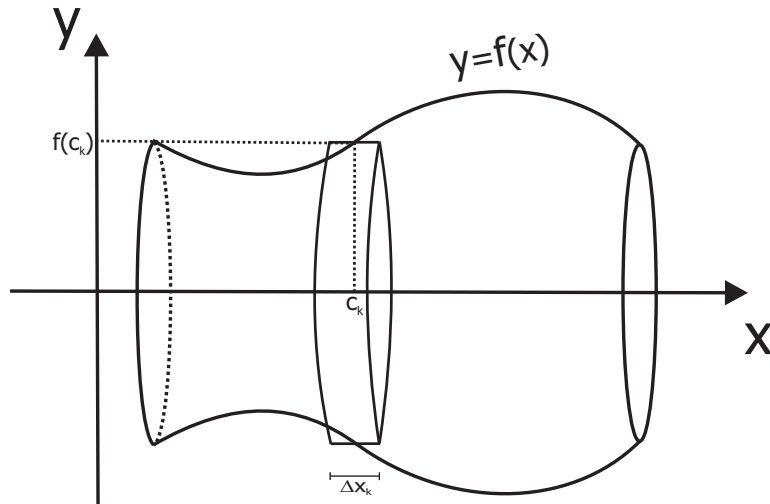
Demonstração.

Considere $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$ e, para cada subintervalo da partição, escolha um ponto $C_k \in [x_{k-1}, x_k]$.



Para cada $k, k = 1, 2, \dots, n$, tem-se um retângulo R_k , de base Δx_k e altura $f(C_k)$. Fazendo cada retângulo R_k girar em torno do eixo x , o sólido obtido é um cilindro, cujo volume é

$$\pi [f(C_k)]^2 \Delta x_k.$$



A soma dos volumes dos n cilindros é dado por

$$\begin{aligned} V &= \pi [f(C_1)]^2 \Delta x_1 + \pi [f(C_2)]^2 \Delta x_2 + \dots + \pi [f(C_n)]^2 \Delta x_n \\ &= \pi \sum_{k=1}^n [f(C_k)]^2 \cdot \Delta x_k \end{aligned}$$

e nos dá a aproximação do volume do sólido S .

Note que à medida que n cresce e cada $\Delta x_k, k = 1, 2, \dots, n$, torna-se muito pequeno, os cilindros empilhados formam um sólido que se parece cada vez mais com o sólido de revolução original. Deste modo, a soma dos volumes dos n cilindros aproxima-se do que, intuitivamente, entendemos como o volume do sólido de revolução S . Assim,

$$V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \pi \sum_{k=1}^n [f(C_k)]^2 \Delta x_k$$

Como f é contínua e o limite existe, então

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

■

Outra situação, será a região R girar em torno do eixo y ao invés do eixo x . Analogamente, segue que:

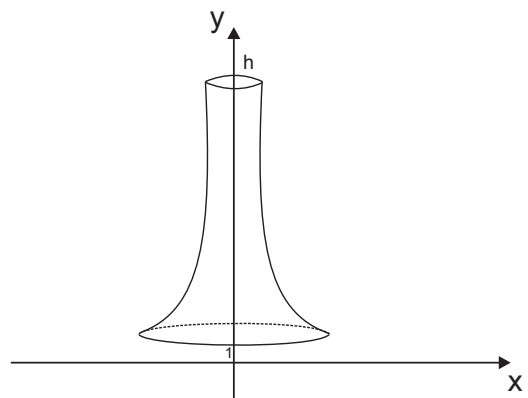
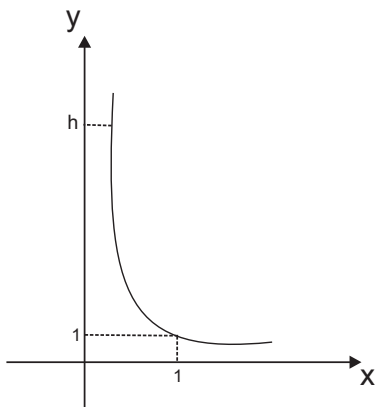
$$V = \pi \int_c^d [g(y)]^2 dy$$

Agora, utilizando o método apresentado acima, vamos a uma aplicação. Abaixo, temos uma imagem de um reservatório de água:



Criando um modelo matemático, partimos ao exercício: Calcular o volume do Sólido gerado pela função $y = \frac{1}{x^2}$ girando em torno do eixo y , no intervalo $[1, h]$.

Modelo Matemático:



Solução:

$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy \\
 &= \pi \int_1^h \left[\frac{1}{\sqrt{y}} \right]^2 dy \\
 &= \pi \int_1^h \frac{1}{y} dy \\
 &= \pi \ln y \Big|_1^h \\
 &= \pi (\ln h - \ln 1) \\
 &= \pi \ln h
 \end{aligned}$$

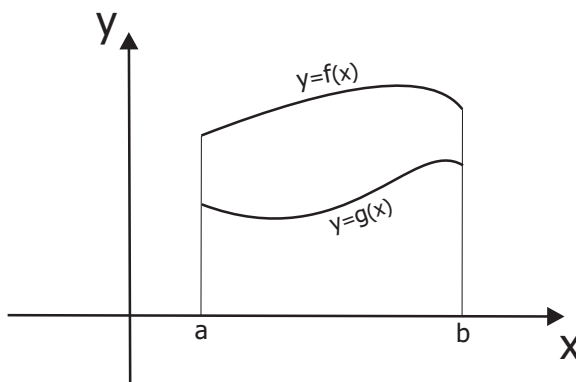
4.2 Método dos anéis circulares

Teorema 15. *Sejam f e g funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e suponha que $f(x) \geq g(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$. Seja, ainda, R a região plana limitada pelos gráficos de $y = f(x)$ e $y = g(x)$ entre as retas $x = a$ e $x = b$. O volume V do sólido S gerado pela revolução de R em torno do eixo x é dado por*

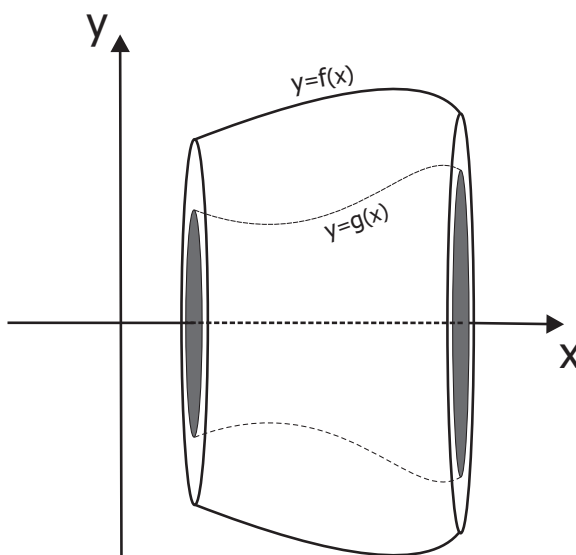
$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

Demonstração.

Considere duas regiões: a região plana limitada pelo gráfico $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$ e a região plana limitada pelo gráfico $y = g(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$.



Com a rotação destas regiões em torno do eixo x , obtêm-se dois sólidos de revolução e desde que $f(x) \geq g(x)$, então o volume V pode ser obtido pela diferença entre o volume destes sólidos.



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx - \pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$$

Pela **proposição 1** , segue

$$V = \pi \int_a^b ([f(x)]^2 - [g(x)]^2) dx$$

■

Naturalmente, o método dos anéis circulares pode ser aplicável aos sólidos gerados pela revolução de regiões planas em torno do eixo y .

Analogamente, segue que

$$V = \pi \int_c^d ([f(y)]^2 - [g(y)]^2) dy$$

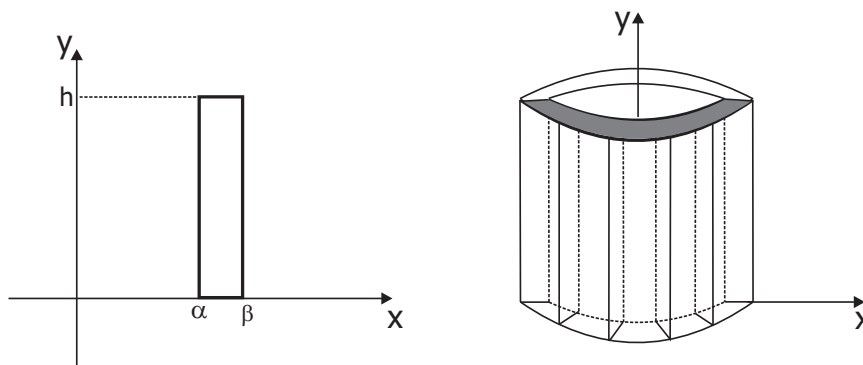
4.3 Método dos invólucros cilíndricos

Teorema 16. *Sejam f uma função no intervalo fechado $[a, b]$ e $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$, onde $b \geq a \geq 0$ e R a região plana limitada pela curva $y = f(x)$, pelo eixo x e pelas retas $x = a$ e $x = b$. O volume do sólido S gerado pela revolução de R em torno do eixo y é dado por*

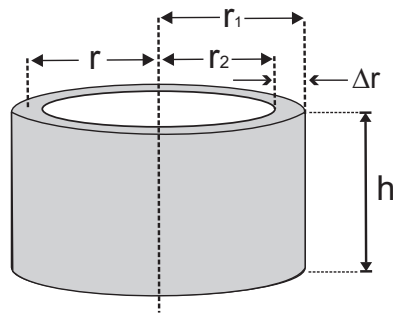
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

Demonstração.

Seja um retângulo de altura h sobre o intervalo $[\alpha, \beta]$, com $0 < \alpha < \beta$. Com a rotação deste retângulo em torno do eixo y é obtido uma *casca cilíndrica*.



Deste modo, considere a casca cilíndrica:



onde, r_1 é o raio exterior, r_2 o raio interior, $\Delta r = r_1 - r_2$ e h é a altura.

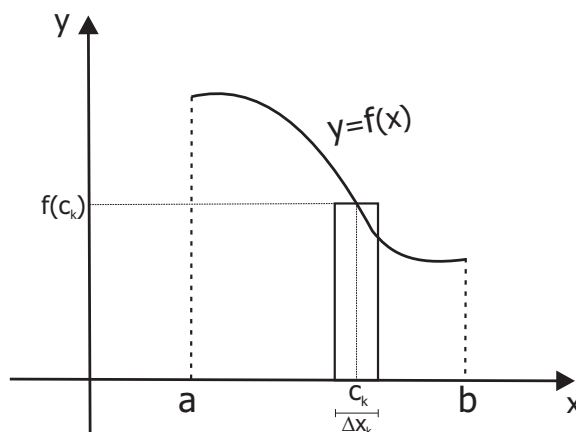
O volume da casca é imediato, pois é a diferença entre o volume do cilindro maior e do cilindro menor.

$$\begin{aligned} V_{casca} &= \pi r_1^2 h - \pi r_2^2 h \\ &= \pi (r_1^2 - r_2^2) h \\ &= \pi (r_1 + r_2)(r_1 - r_2) h \end{aligned}$$

O raio médio da casca é $r = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$. Assim,

$$V_{casca} = 2\pi r h \Delta r \quad (4.1)$$

Considere, agora, $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$ e, para cada subintervalo da partição, escolha o ponto médio $C_k \in [x_{k-1}, x_k]$.



À medida que R gira em torno do eixo y para gerar S , o retângulo de base Δx_k e altura $f(C_k)$ produz uma porção do volume do sólido de revolução, tendo a forma de uma casca cilíndrica de altura $f(C_k)$ e espessura Δx_k . Logo, por 4.1, o volume da casca é:

$$V_{casca} = 2\pi C_k f(C_k) \Delta x_k$$

A soma dos volumes das n cascas cilíndricas formadas por todos os n retângulos determinados pela partição \mathcal{P} é:

$$2\pi \sum_{k=1}^n C_k f(C_k) \Delta x_k$$

e nos dá uma aproximação do volume do sólido S .

Assim,

$$V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} 2\pi \sum_{k=1}^n C_k f(C_k) \Delta x_k$$

Desde que f seja contínua em $[a, b]$ e o limite acima exista, então,

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$

■

4.4 Método das secções transversais

Teorema 17. *Seja S um sólido limitado por dois planos perpendiculares ao eixo x , em $x = a$ e $x = b$, e para cada $x \in [a, b]$, seja, ainda, $A(x)$ a área da secção transversal de S com um plano perpendicular ao eixo. Desde que $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua, então a medida do volume de S é dado por:*

$$V = \int_a^b A(x) dx$$

Demonstração.

Seja $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{k-1} < x_k < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ uma partição \mathcal{P} do intervalo $[a, b]$. Assim, existem n subintervalos da forma $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, \dots, n$ e $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ o comprimento do k -ésimo subintervalo. Escolhe-se, arbitrariamente, $C_k \in [x_{k-1}, x_k]$ em cada subintervalo. Planos perpendiculares ao eixo x , em cada C_k da partição cortam o sólido em pequenas fatias. Para cada k , construímos cilindros retos com Δx_k de altura e a área das secção planas igual a $A(C_k)$. Desta forma, ΔV_k será o volume do k -ésimo cilindro reto.

$$\Delta V_k = A(C_k) \Delta x_k$$

Assim, a soma

$$\sum_{k=1}^n \Delta V_k = \sum_{k=1}^n A(C_k) \Delta x_k$$

nos dá uma aproximação do que, intuitivamente, conhecemos pelo volume do sólido S . À medida que $\|\mathcal{P}\|$ torna-se menor, o número de fatias aumenta e tornam-se mais finas. Assim,

$$V = \lim_{\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n A(C_k) \Delta x_k$$

Desde que $A(x)$ seja contínua, então

$$V = \int_a^b A(x)dx$$

■

Capítulo 5

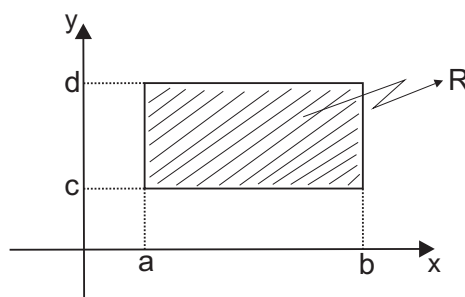
Integral dupla

Seguindo com nosso objetivo de calcular volume, nesse momento, vamos iniciar o estudo das integrais múltiplas, em particular, o estudo da *Integral Dupla*. Por meio de processos semelhantes usados nas integrais simples, definiremos integrais duplas e, conseqüentemente, propriedades e teoremas importantes a fim de obtermos ferramentas que auxiliam no cálculo de volume.

Seja R o retângulo do plano cartesiano definido por:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$

em que a, b, c e d são números reais tais que $a < b$ e $c < d$



Sejam

$$P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$$

partições dos intervalos $[a, b]$ e $[c, d]$, respectivamente. O conjunto $\mathcal{P} = P_1 \times P_2$, isto é,

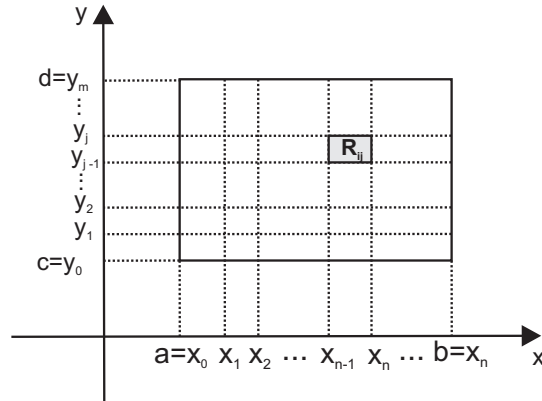
$$\mathcal{P} = \{(x_i, y_j) / i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, m\}$$

é chamado de partição do retângulo R .

A partir de uma partição \mathcal{P} obtemos nm retângulos menores:

$$R_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x_{i-1} < x < x_i \text{ e } y_{j-1} < y < y_j\}$$

chamados de sub-retângulos da partição \mathcal{P} . Deste modo, o retângulo R fica dividido em nm sub-retângulos de \mathcal{P} .



Consideremos o número $|\mathcal{P}|$ como o comprimento da maior diagonal dos retângulos R_{ij} . Assim, $|\mathcal{P}|$ é chamado de norma da partição.

Seja, agora, outra partição $\mathcal{P}' = P'_1 \times P'_2$ do retângulo R . Se $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, dizemos que \mathcal{P}' é um refinamento de \mathcal{P} . É imediato que a norma $|\mathcal{P}'|$ é tal que $|\mathcal{P}'| \leq |\mathcal{P}|$.

Definição 7. Um conjunto de nm elementos

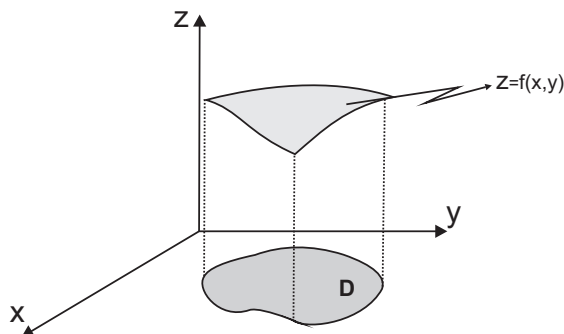
$$\mathcal{X} = \{x_{ij} \mid i = 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 1, 2, \dots, m\}$$

é dito admissível à partição \mathcal{P} se, para quaisquer i e j , temos $\mathcal{X}_{ij} \in R_{ij}$.

Podemos entender um conjunto admissível à partição como sendo uma escolha de nm pontos no retângulo R de modo que cada sub-retângulo da partição \mathcal{P} contenha alguns de tais pontos.

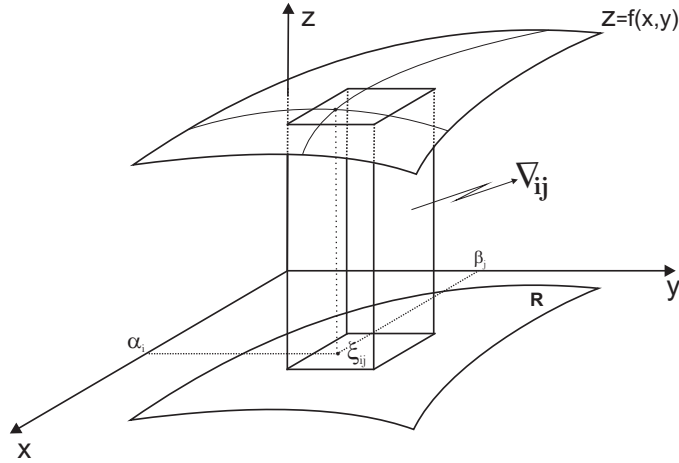
Definição 8. Um subconjunto D do \mathbb{R}^2 é limitado se D está contido em algum retângulo do \mathbb{R}^2 .

Nosso objetivo é calcular o volume de sólidos. É relevante ressaltar que para esta finalidade, consideramos os casos em que z é contínua e positiva. Considere, então



$$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / (x, y) \in D \text{ e } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$$

Escolhemos aleatoriamente, em cada R_{ij} , um ponto $\xi_{ij} = (\alpha_i, \beta_j)$ e formamos, assim, os paralelepípedos ∇_{ij} com base igual a área dos R_{ij} e altura $f(\xi_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j)$. Neste caso, convencionamos $f(\xi_{ij}) = 0$ se $\xi_{ij} \notin D$.



Como $f(\xi_{ij}) > 0$, então, o volume de cada paralelepípedo ∇_{ij} é dado por:

$$V(\nabla_{ij}) = f(\alpha_i, \beta_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Logo, o volume do sólido \mathcal{S} é, aproximadamente:

$$V(\mathcal{S}) = \sum_1^n \sum_1^m f(\alpha_i, \beta_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

O somatório é chamado de Soma de Riemann de f relativo a partição \mathcal{P} .

Dizemos que $L, L \in \mathbb{R}$, é o limite da soma de Riemann de f se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para qualquer partição \mathcal{P} , temos:

$$\left| \sum_1^n \sum_1^m f(\xi_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - L \right| < \epsilon$$

O número L , quando existe, é chamado de integral dupla de f sobre D . Isto nos motiva a seguinte definição:

Definição 9. Dizemos que $f : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ limitada com D um domínio limitado é integrável (Riemann) em D se existe um número real L tal que

$$L = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_1^n \sum_1^m f(\alpha_i, \beta_j) \Delta x_i \Delta y_j$$

Para toda partição \mathcal{P} e quaisquer pontos $\xi_{ij} = (\alpha_i, \beta_j)$

Notação: $L = \iint_D f(x, y) dx dy$

Sejam $f(x, y)$ função integrável em D , com $f(x, y) > 0$ em D e o conjunto $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in D \text{ e } 0 < z < f(x, y)\}$. O volume de D é dado por:

$$V(D) = \iint_D f(x, y) dx dy$$

5.1 Teorema de Fubini para retângulos

Seja $f(x, y)$ uma função integrável em R , onde

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \text{ e } c \leq y \leq d\}$$

onde a, b, c e d são reais. Agora, para cada $\bar{y} \in [c, d]$ fixo define-se a função:

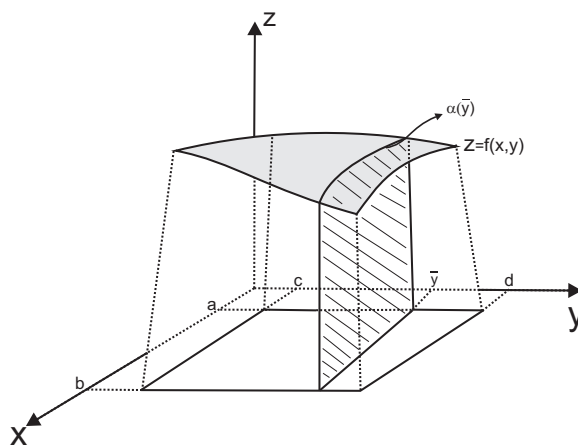
$$\begin{aligned} \varphi : [a, b] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x, \bar{y}) \end{aligned}$$

Portanto, $\varphi(x) = f(x, \bar{y})$. Podemos, então, calcular a integral da função φ de a até b . Se para cada \bar{y} tem-se que $\varphi(x)$ é integrável, então:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b f(x, \bar{y}) dx \quad \forall \bar{y} \in [c, d]$$

essa integral depende o y fixado em $[c, d]$, ou seja, para cada y , temos um valor para essa integral. Temos, assim, uma função $\alpha : [c, d] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\alpha(\bar{y}) = \int_a^b f(x, \bar{y}) dx \quad \forall \bar{y} \in [c, d]$$



Note que $\alpha(\bar{y})$ é a área da secção plana abaixo do gráfico de f e acima do plano xy .

De forma análogo, o mesmo argumento pode ser usado, fixando $\bar{x} \in [a, b]$ e considerando a função:

$$\begin{aligned} \psi : [c, d] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto f(\bar{x}, y) \end{aligned}$$

Assim, $\psi(y) = f(\bar{x}, y)$. Podemos, então, calcular a integral da função ψ de c até d . Se para cada \bar{x} tem-se que $\psi(y)$ é integrável, então:

$$\int_a^b \psi(y)dy = \int_c^d f(\bar{x}, y)dy \quad \forall \bar{x} \in [a, b]$$

essa integral depende o x fixado em $[a, b]$, ou seja, para cada x , temos um valor para essa integral. Temos, assim, uma função $\beta : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$\beta(\bar{x}) = \int_c^d f(\bar{x}, y)dy \quad \forall \bar{x} \in [a, b]$$

O seguinte Teorema enunciaremos sem demonstração.

Teorema 18 (Fubini). *Sejam $R = [a, b] \times [c, d]$ um retângulo e $f(x, y)$ uma função integrável em R . Suponha que, para todo $y \in [c, d]$ existe $\int_a^b f(x, y)dx$ e para todo $x \in [a, b]$ existe $\int_c^d f(x, y)dy$. Então,*

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)dx \right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)dy \right] dx$$

O Teorema de Fubini para retângulos é um procedimento que reduz o cálculo de uma integral dupla ao cálculo de duas integrais ordinárias.

5.2 Propriedades da Integral dupla

A integral dupla satisfaz as seguintes propriedades:

i. Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ integráveis em D , com D um domínio limitado e λ uma constante. Então,

(a) $f + g$ é integrável e $\iint_R (f + g)dxdy = \iint_R f(x, y)dxdy + \iint_R g(x, y)dxdy$.

(b) λf é integrável e $\iint_R \lambda f dxdy = \lambda \iint_R f(x, y)dxdy$

ii. (Existência). Se f é contínua sobre a região admissível R , então f é Riemann-integrável sobre R , isto é, $\iint_R f(x, y)dxdy$ existe.

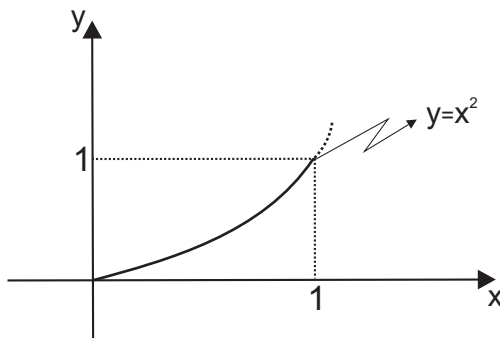
- iii. (Área). Se λ é uma constante e R uma região admissível de área $A(R)$, então $\iint_R \lambda dx dy = \lambda A(R)$. Em particular, $\iint_R dx dy = A(R)$.
- iv. Se f é Riemann-integrável sobre a região admissível R e se $f(x, y) \geq 0$ para todos os pontos (x, y) em R , então $\iint_R f(x, y) dx dy \geq 0$.
- v. Se f e g são funções Riemann-integráveis sobre a região admissível R e se $f(x, y) \leq g(x, y)$ valem para todos os pontos (x, y) em R , então $\iint_R f(x, y) dx dy \leq \iint_R g(x, y) dx dy$.
- vi. Sejam f Riemann-integrável sobre a região admissível R , h e H constantes. Se $h \leq f(x, y) \leq H$ em R , então $hA(R) \leq \iint_R f(x, y) dx dy \leq HA(R)$, onde $A(R)$ é a área da região R .
- vii. Seja R uma região admissível e suponha que $R = R_1 \cup R_2$, com R_1 e R_2 regiões admissíveis, tal que $R_1 \cap R_2 = \emptyset$ com exceção aos pontos de fronteiras. Se f é Riemann-integrável sobre as regiões R_1 e R_2 , então f é Riemann-integrável sobre R e $\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_{R_1} f(x, y) dx dy + \iint_{R_2} f(x, y) dx dy$.

As propriedades descritas acima são demonstradas por meio da definição de integral dupla e propriedades de limites. Aceitaremos como verdadeiras.

Exemplo 1. Calcular $\iint_B xy^2 dx dy$, onde B é o conjunto dos pontos (x, y) tais que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq x^2$.

Solução:

O conjunto B está ilustrado abaixo:



Consideremos o retângulo $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1\}$ e a função $f(x, y)$ definida em R por:

$$f(x, y) = \begin{cases} xy^2, & \text{se } (x, y) \in B \\ 0, & \text{se } (x, y) \notin B \end{cases}$$

Assim,

$$\iint_B xy^2 dx dy = \iint_R f(x, y) dx dy$$

Pelo Teorema de Fubini para retângulos, obtemos:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx$$

Mas, para cada x fixo em $[0, 1]$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^{x^2} f(x, y) dy + \int_{x^2}^1 f(x, y) dy \\ &= \int_0^{x^2} f(x, y) dy \\ &= \int_0^{x^2} xy^2 dy \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_B xy^2 dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^{x^2} xy^2 dy \right] dx$$

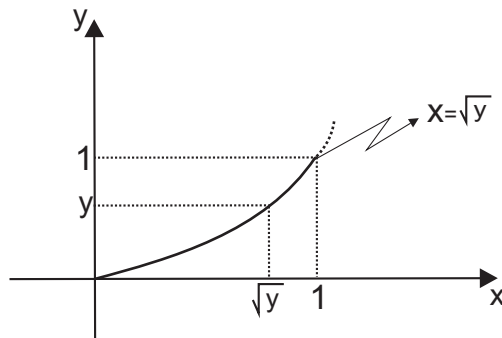
Pelo Teorema Fundamental do cálculo, segue que

$$\begin{aligned} \int_0^{x^2} xy^2 dy &= \frac{1}{3}x [y^3]_0^{x^2} \\ &= \frac{1}{3}x [(x^2)^3 - 0^3] \\ &= \frac{1}{3}x [x^6 - 0] \\ &= \frac{1}{3}x^7 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_B xy^2 dx dy &= \int_0^1 \frac{x^7}{3} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 x^7 dx \\ &= \frac{1}{24} [x^8]_0^1 \\ &= \frac{1}{24} [1 - 0] \\ &= \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Vamos, agora, calcular a integral invertendo a ordem de integração.



$$\begin{aligned} \iint_B xy^2 dx dy &= \iint_R f(x, y) dx dy \\ &= \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

Para cada y fixado em $[0, 1]$, temos:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dx &= \int_0^{\sqrt{y}} f(x, y) dx + \int_{\sqrt{y}}^1 f(x, y) dx \\ &= \int_{\sqrt{y}}^1 xy^2 dx \end{aligned}$$

Portanto,

$$\iint_B xy^2 dx dy = \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^1 xy^2 dx \right] dy$$

Pelo Teorema Fundamental do cálculo, segue que

$$\begin{aligned} \int_{\sqrt{y}}^1 xy^2 dx &= y^2 \left[\frac{x^2}{2} \right]_{\sqrt{y}}^1 \\ &= \frac{1}{2} y^2 [x^2]_{\sqrt{y}}^1 \\ &= \frac{1}{2} y^2 [1 - y] \\ &= \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{2} \\ &= \frac{1}{2} (y^2 - y^3) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \int_B xy^2 dx dy &= \int_0^1 \frac{1}{2}(y^2 - y^3) dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 (y^2 - y^3) dy \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - 0 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right] \\
 &= \frac{1}{24}
 \end{aligned}$$

5.3 Outras regiões de integração

Quando temos outros tipos de regiões de integração diferente de retângulos, podemos calcular as integrais duplas de uma forma simples, por meio de integrais ditas iteradas. A seguir apresentamos um teorema no qual será omitido a demonstração.

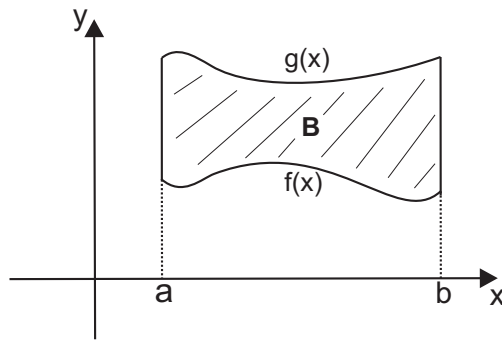
Teorema 19. *Sejam $p, q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com $p(x) \leq q(x), \forall x \in [a, b]$ e $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / a \leq x \leq b \text{ e } p(x) \leq y \leq q(x)\}$. Se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável e existe a integral $\int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dy, \forall x \in [a, b]$ Então,*

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_{p(x)}^{q(x)} f(x, y) dx dy$$

Analogamente, se $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / c \leq y \leq d \text{ e } \gamma(y) \leq x \leq \delta(y)\}$ com $\gamma(y)$ e $\delta(y)$ funções contínuas tais que $\gamma(y) \leq \delta(y), \forall y \in [c, d]$ e a integral $\int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx$ existe $\forall y \in [c, d]$ Então,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \int_{\gamma(y)}^{\delta(y)} f(x, y) dx dy$$

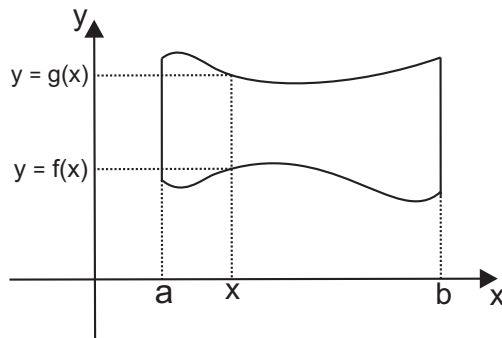
Podemos aplicar o raciocínio do exemplo anterior para calcular integrais duplas sobre conjuntos das formas descritas abaixo:



$$\text{Tipo I: } \begin{cases} f(x) \leq y \leq g(x) \\ a \leq x \leq b \end{cases}$$

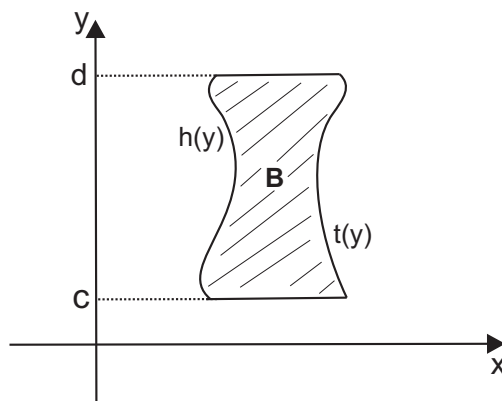
com $f(x)$ e $g(x)$ contínuas em $[a, b]$ e $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a, b]$

Neste caso, temos



$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

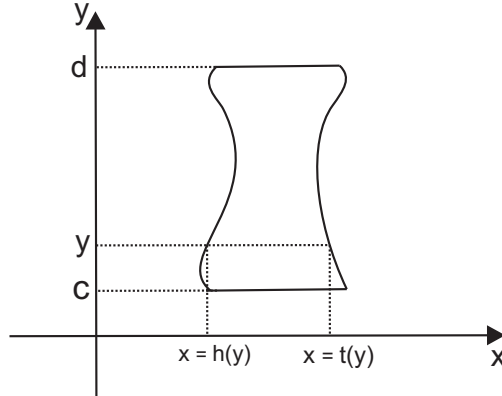
Por outro lado, o procedimento pode ser usado em conjuntos da forma:



$$\text{Tipo II: } \begin{cases} h(y) \leq x \leq t(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$

com $h(y)$ e $t(y)$ contínuas em $[c, d]$ e $h(y) \leq t(y), \forall y \in [c, d]$

Neste caso, temos

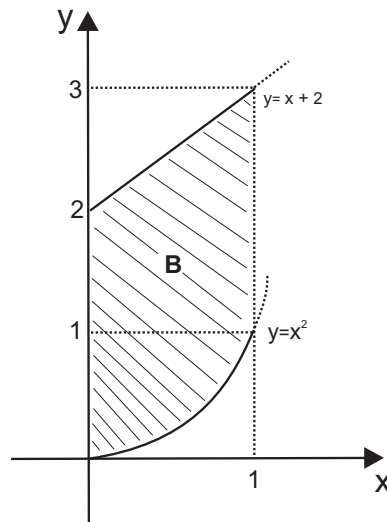


$$\iint_B f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h(y)}^{t(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

Exemplo 2. Seja $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ e } x^2 \leq y \leq x + 2\}$ a região no plano xy . Calcular o volume V sob o gráfico de $f(x, y) = x + 2y$ e acima da região R .

Solução

O gráfico ilustra a região B em questão.



Queremos calcular o volume V nas condições dadas, usando integral dupla. Pelo Teorema de Fubini, segue

$$\iint_B (x + 2y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x+2} (x + 2y) dy \right] dx$$

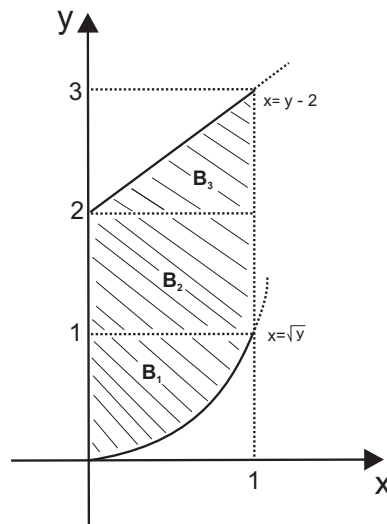
Assim,

$$\begin{aligned}
 \int_{x^2}^{x+2} (x+2y)dy &= [xy + y^2]_{x^2}^{x+2} \\
 &= x(x+2) + (x+2)^2 - [xx^2 + (x^2)^2] \\
 &= x^2 + 2x + x^2 + 4x + 4 - x^3 - x^4 \\
 &= -x^4 - x^3 + 2x^2 + 6x + 4
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 \iint_B (x+2y)dxdy &= \int_0^1 (-x^4 - x^3 + 2x^2 + 6x + 4)dx \\
 &= \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{2}{3}x^3 + 3x^2 + 4x \right]_0^1 \\
 &= -\frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{3} + 7 \\
 &= \frac{433}{60} u.v.
 \end{aligned}$$

Vamos, agora, calcular invertendo a ordem de integração. Para isso, precisamos dividir o conjunto B nos três subconjuntos indicados abaixo:



Considerando a região B_1 :

$$\iint_{B_1} (x+2y)dxdy = \int_0^1 \left[\int_0^{\sqrt{y}} (x+2y)dx \right] dy$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{y}} (x + 2y) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2yx \right]_0^{\sqrt{y}} \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{y})^2 + 2y\sqrt{y} \\
&= \frac{1}{2}y + 2y^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{B_1} (x + 2y) dx dy &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}y + 2y^{\frac{3}{2}} \right) dy \\
&= \left[\frac{1}{4}y^2 + \frac{4}{5}y^{\frac{5}{2}} \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \\
&= \frac{21}{20}
\end{aligned}$$

Considerando a região B_2 :

$$\iint_{B_2} (x + 2y) dx dy = \int_1^2 \left[\int_0^1 (x + 2y) dx \right] dy$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x + 2y) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2yx \right]_0^1 \\
&= \frac{1}{2} + 2y
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{B_2} (x + 2y) dx dy &= \int_1^2 \left(\frac{1}{2} + 2y \right) dy \\
&= \left[\frac{1}{2}y + y^2 \right]_1^2 \\
&= 1 + 4 - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \\
&= 5 - \frac{3}{2} \\
&= \frac{7}{2}
\end{aligned}$$

Considerando a região B_3 :

$$\iint_{B_3} (x + 2y) dx dy = \int_2^3 \left[\int_{y-2}^1 (x + 2y) dx \right] dy$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{y-2}^1 (x + 2y) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 + 2yx \right]_{y-2}^1 \\
&= \frac{1}{2} + 2y - \left[\frac{1}{2}(y-2)^2 + 2y(y-2) \right] \\
&= \frac{1}{2} + 2y - \frac{1}{2}y^2 + 2y - 2 - 2y^2 + 4y \\
&= -\frac{3}{2} + 8y - \frac{5}{2}y^2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\iint_{B_3} (x + 2y) dx dy &= \int_2^3 \left(-\frac{3}{2} + 8y - \frac{5}{2}y^2 \right) dy \\
&= \left[-\frac{3}{2}y + 4y^2 - \frac{5}{6}y^3 \right]_2^3 \\
&= -\frac{9}{2} + 36 - \frac{45}{2} + 3 - 16 + \frac{20}{3} \\
&= -27 + 23 + \frac{20}{3} \\
&= -4 + \frac{20}{3} \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

E, finalmente, temos:

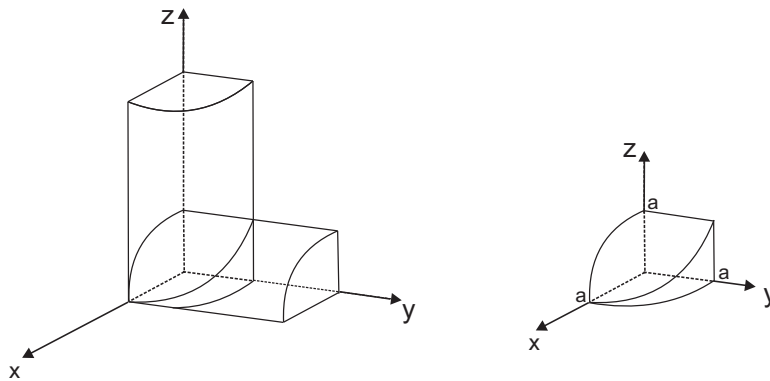
$$\iint_B (x + 2y) dx dy = \frac{21}{20} + \frac{7}{2} + \frac{8}{3} = \frac{433}{60} u.v.$$

A imagem abaixo mostra canos de tubulação. Nossa visão permite-nos a ver isso como intersecção entre dois cilindros:



Vamos, então, a aplicação: Calcular o volume do sólido limitado pelos cilindros $x^2 + z^2 = a^2$ e $x^2 + y^2 = a^2$.

Modelo Matemático:

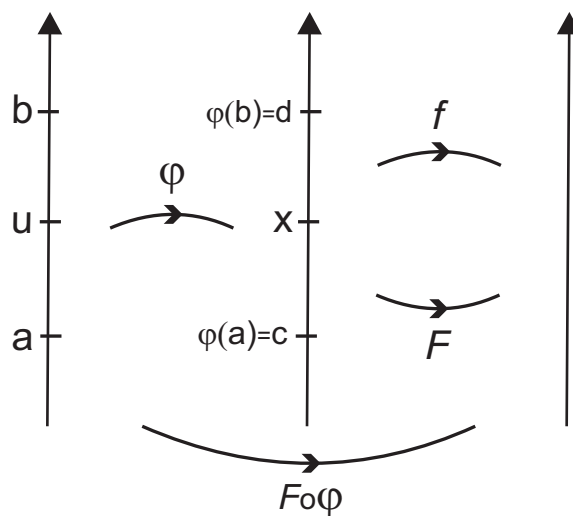


Solução:

$$\begin{aligned}
V &= 8 \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy dx = \\
&= 8 \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \sqrt{a^2-x^2} dy \right] dx \\
&= 8 \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \left[y \Big|_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \right] dx \\
&= 8 \int_0^a a^2 - x^2 dx \\
&= 8 \left(a^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^a \\
&= 8 \left(\frac{2a^3}{3} \right) \\
&= \frac{16a^3}{3}
\end{aligned}$$

5.4 Mudanças de variáveis em integrais duplas

Na integração de funções de uma variável, a fórmula de mudanças de variável é usada para transformar uma integral dada em outra mais simples. Digamos que queremos calcular a integral $\int_c^d f(x) dx$ em que f é uma função contínua em $[c, d]$. Suponhamos que exista uma função $\varphi : [a, b] \rightarrow [c, d]$ de classe C^1 e inversível, com $\varphi(a) = c$ e $\varphi(b) = d$ e seja, ainda, F uma primitiva de f em $[c, d]$.



Temos,

$$[F(\varphi(u))]' = F'(\varphi(u))\varphi'(u) = f(\varphi(u))\varphi'(u)$$

onde inferimos que $F(\varphi(u))$ é uma primitiva de $f(\varphi(u))\varphi'(u)$. logo,

$$\int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du = [F(\varphi(u))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = F(x)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx$$

Portanto,

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Queremos obter uma fórmula de mudança de variável na integral dupla. Primeiramente, observemos alguns fatos necessários para esta finalidade.

Se $f(x)$ é uma função derivável em x_0 , então,

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Tomando $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ e $\Delta x = x - x_0$,

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

então,

$$\frac{df}{dx}\Big|_{x=x_0} \cong \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Essa aproximação é tanto melhor quanto for a diferença $x - x_0$. Podemos, portanto, escrever:

$$f'(x_0) \cong \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

ou ainda

$$\Delta f \cong f'(x_0)\Delta x \tag{5.1}$$

Seja f uma função contínua em um intervalo I e a um ponto fixo de I . Definimos a função g em I por:

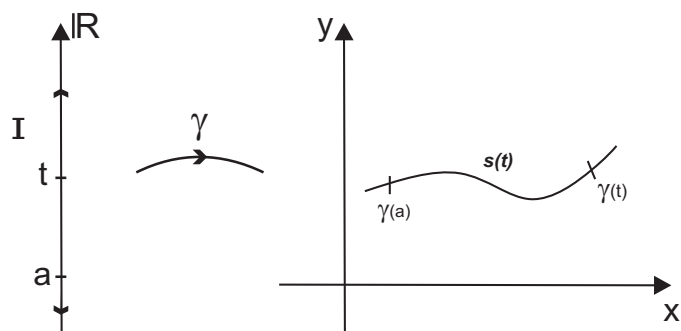
$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad t \in I$$

Se F é uma primitiva de f , então $g(x) = F(x) - F(a)$.

Logo, $g'(x) = F'(x)$, assim $g'(x) = f(x)$. Portanto,

$$\frac{d}{dx} \left[\int_a^x f(t)dt \right] = f(x) \tag{5.2}$$

Consideremos uma curva $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida em um intervalo I , de classe C^1 e, ainda, $a \in I$ um ponto fixo.



a função s que associa a cada $t \in I$ o comprimento do arco de curva de extremidade $\gamma(a)$ e $\gamma(t)$ é dada por:

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\| du$$

Assim, por 5.2:

$$s'(t) = \|\gamma'(t)\|$$

Portanto, por 5.1, segue que:

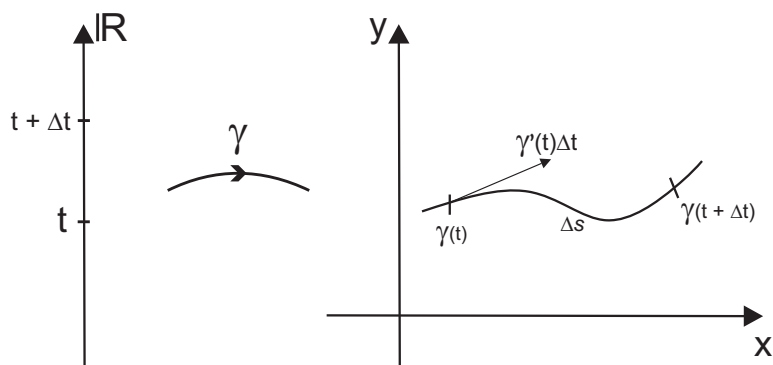
$$\Delta s \cong \|\gamma'(t)\| \Delta t$$

Essa aproximação é tanto melhor quanto menor for Δt .

Note que o vetor $\gamma'(t)$ é tangente à curva no ponto $\gamma(t)$. Como $\Delta t > 0$, o vetor $\gamma'(t)\Delta t$ tem a mesma direção e sentido de $\gamma'(t)$. Logo é, também, tangente à curva em $\gamma(t)$ e seu comprimento é:

$$\|\gamma'(t)\Delta t\| = \|\gamma'(t)\| \Delta t$$

Esse comprimento é, aproximadamente, igual ao comprimento do arco de curva de extremidades $\gamma(t)$ e $\gamma(t + \Delta t)$.



A fim de obtermos a fórmula da mudança de variável na integral dupla, precisamos considerar funções da forma:

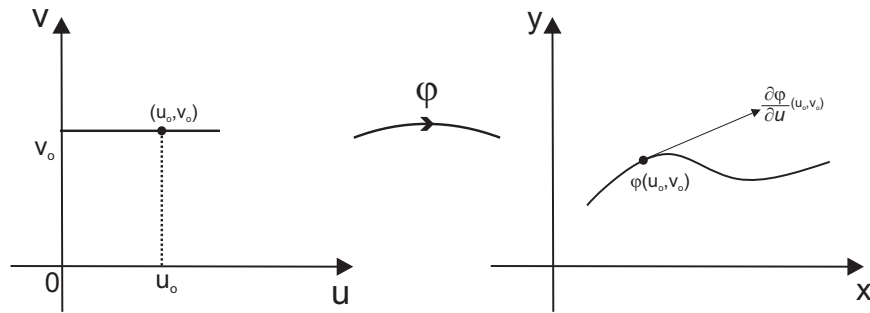
$$\begin{aligned} \varphi: \Omega \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u, v) &\longmapsto \varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \end{aligned}$$

A função $\varphi(u, v)$ será contínua, diferenciável e de classe C^1 se as funções $x(u, v)$ e $y(u, v)$ forem, respectivamente, contínuas, diferenciáveis e de classe C^1 .

As derivadas parciais de φ são definidas por:

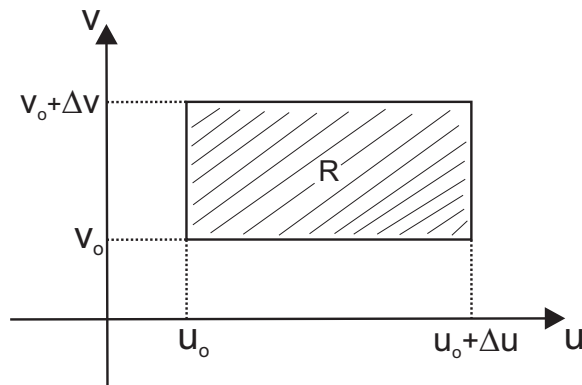
$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) \right)$$

Geometricamente, a derivada parcial $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)$ de φ no ponto (u_0, v_0) pode ser interpretado como sendo o vetor tangente à curva $\alpha(u) = \varphi(u, v_0)$ no ponto $\alpha(u_0) = \varphi(u_0, v_0)$.

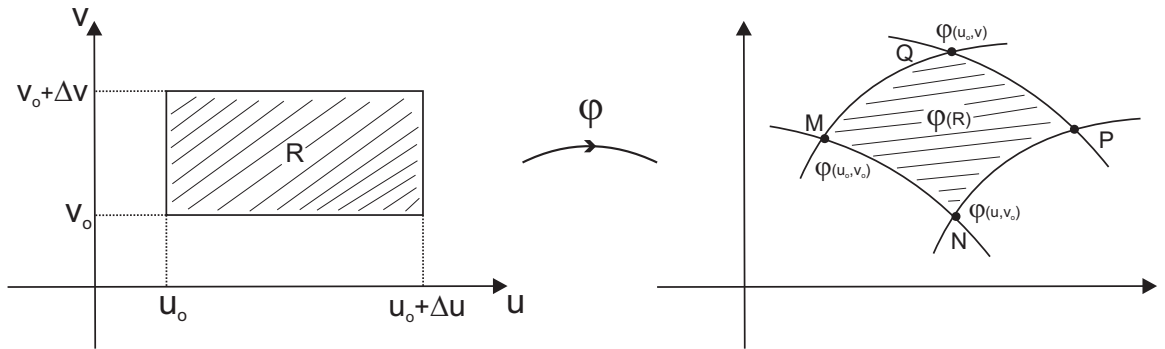


De maneira análoga, a derivada parcial $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$ pode ser vista como o vetor tangente à curva $\beta(v) = \varphi(u_0, v)$ no ponto $\beta(v_0) = \varphi(u_0, v_0)$.

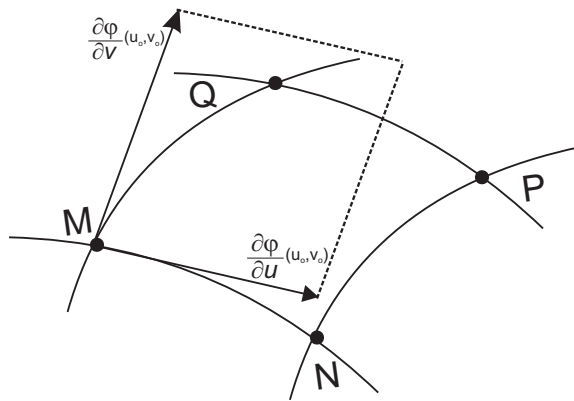
Consideremos, agora, o retângulo R mostrado na figura abaixo:



e $\varphi(R)$ a imagem de R pela função φ .



Sabemos que o comprimento do vetor $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$ é, aproximadamente, igual o comprimento do arco de curva \widehat{MN} e que o comprimento do vetor $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$ é, aproximadamente, igual ao comprimento do arco de curva \widehat{MQ} .



Portanto, a área do paralelogramo determinado pelos vetores $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$ é, aproximadamente, a área de $\varphi(R)$.

A área do paralelogramo mencionado é igual a norma do produto vetorial de $\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u$ por $\frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v$, ou seja,

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0)\Delta u \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)\Delta v \right\| = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta u \Delta v$$

Portanto, temos:

$$\text{Area de } \varphi(R) \cong \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta u \Delta v$$

Suponhamos que φ seja de classe C^1 , ou seja, as derivadas parciais $\frac{\partial \varphi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial v}$ existem e são contínuas, então, se (\bar{u}, \bar{v}) é um ponto do retângulo R , temos:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) \cong \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) \cong \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

e, portanto, obtemos:

$$\text{Area de } \varphi(R) \cong \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}, \bar{v}) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}, \bar{v}) \right\| \Delta u \Delta v$$

Segue de

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u} \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v} \right)$$

que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right) \vec{k} \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \vec{k} \end{aligned} \tag{5.3}$$

O determinante da matriz 5.3 é chamado determinante Jacobiano da função $\varphi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ e é denotado por $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

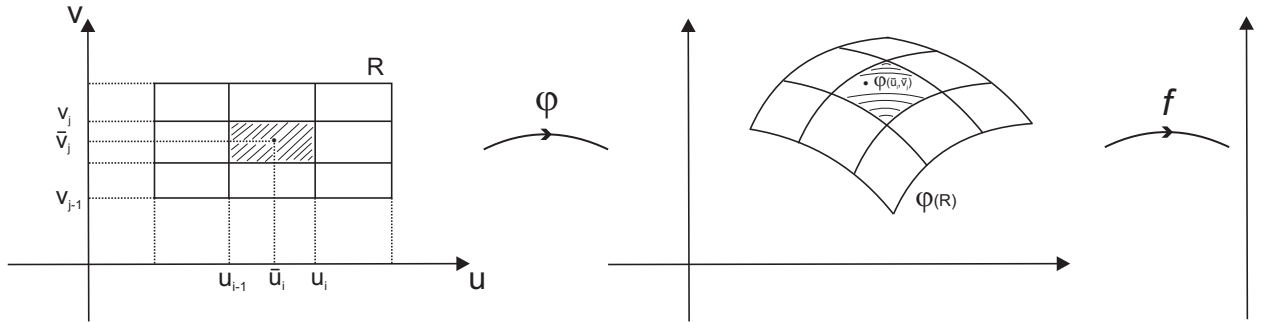
Temos

$$\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) \right\| = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$$

e, portanto,

$$\text{Area de } \varphi(R) \cong \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\bar{u}, \bar{v}) \right| \Delta u \Delta v$$

Sejam, $f(x, y)$ uma função contínua em $\varphi(R)$,
 $\mathcal{P} = \{(u_i, y_j) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ uma partição do retângulo R e
 $A = \{(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n \text{ e } j = 0, 1, 2, \dots, m\}$ um conjunto admissível a partição \mathcal{P} .



Seja, ainda, R_{ij} um sub-retângulo da partição \mathcal{P} e denotamos por A_{ij} a área de $\varphi(R_{ij})$.
 Então, temos que

$$\begin{aligned}
 \iint_{\varphi(R)} f(x, y) dx dy &\cong \sum_1^n \sum_1^m f(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) A_{ij} \\
 &\cong \sum_1^n \sum_1^m f(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \right\| \Delta u_i \Delta v_j \\
 &\cong \sum_1^n \sum_1^m f(\varphi(\bar{u}_i, \bar{v}_j)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(\bar{u}_i, \bar{v}_j) \right| \Delta u_i \Delta v_j \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Calculando o limite dessa Soma quando $\|\mathcal{P}\| \rightarrow 0$, obtemos:

$$\iint_{\varphi(R)} f(x, y) dx dy = \iint_R f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| \Delta u \Delta v du dv$$

Esta fórmula, também, é válida para outros conjuntos que não são necessariamente retângulos.

$$\iint_{\varphi} f(x, y) dx dy = \iint_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| \Delta u \Delta v du dv$$

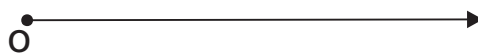
Determina-se B_{uv} no plano uv de tal modo que $B = \varphi(B_{uv})$. Tomando, portanto, $B = \varphi(B_{uv})$, segue:

$$\iint_B f(x, y) dx dy = \iint_{B_{uv}} f(\varphi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}(u, v) \right| \Delta u \Delta v du dv$$

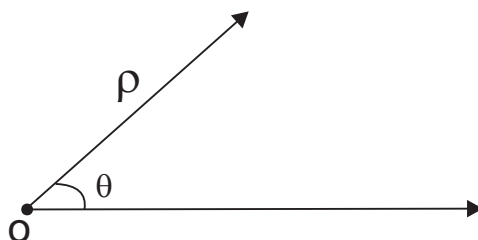
5.4.1 Coordenadas polares

Em geral, é mais conveniente descrever a fronteira de algumas regiões D_{xy} do plano em coordenadas polares (ρ, θ) do que em coordenadas cartesianas (x, y) . Por exemplo, círculos, elipses, cardeóides, trevos, etc. Nestes casos, podemos facilitar os cálculos da integral duplas $\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy$ efetuando uma mudança de coordenadas.

Coordenadas polares são pares de números que se destinam a localizar pontos do plano de uma maneira distinta de como é feito para coordenadas cartesianas. As coordenadas polares são determinadas a partir de um ponto O do plano chamado de polo e de um semi-eixo com origem em O , e geralmente, desenhado na horizontal, chamado de eixo polar.



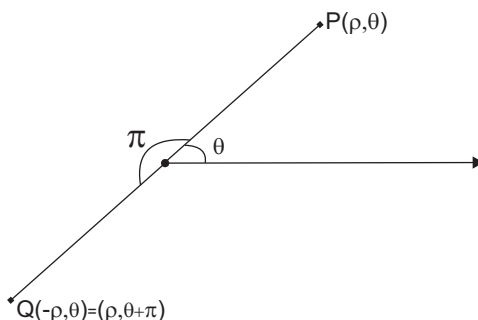
Todo ponto P do plano fica, então, determinado pela distância ρ a O e pelo ângulo θ entre o eixo polar e o segmento \overrightarrow{OP} .



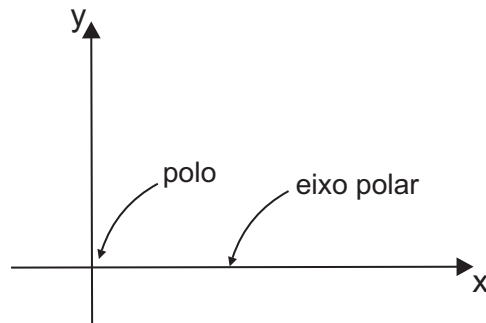
Os números ρ e θ são as coordenadas polares do ponto P e dizemos que P é dado pelo par (ρ, θ) , ou seja, $P(\rho, \theta)$.

$P(x, y)$	\longrightarrow coordenadas cartesianas
$P(\rho, \theta)$	\longrightarrow coordenadas polares

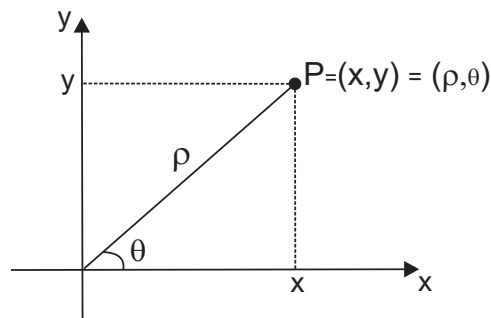
Convencionamos que os valores positivos de θ correspondem a ângulos medidos no sentido anti-horário e valores negativos a ângulos medidos no sentido horário. Se $P(\rho, \theta)$ com $\rho > 0$, então o ponto $Q(-\rho, \theta)$ é aquele que é, também, representado por $(\rho, \theta + \pi)$.



É possível converter coordenadas cartesianas em coordenadas polares e vice-versa, localizando o sistema de coordenadas polares sobre o sistema de coordenadas, de modo que o polo do primeiro sistema coincida com a origem do segundo, e o eixo polar coincida com o semi-eixo positivo do eixo x .



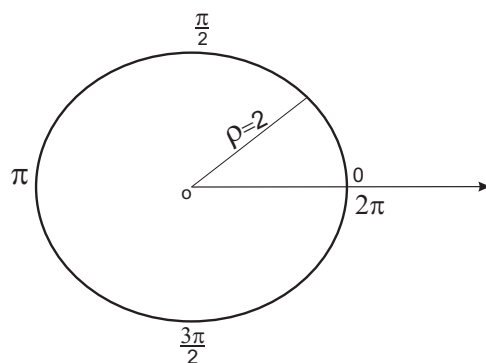
Seja P um ponto do plano de modo que (x, y) são suas coordenadas cartesianas e (ρ, θ) suas coordenadas polares.



Assim,

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

Exemplo 3. O conjunto dos pontos do plano dado por $(2, \theta); 0 \leq \theta \leq 2\pi$ é constituído pelos pontos da circunferência de centro no polo e raio 2.



Dizemos que $\rho = 2$ é a equação dessa circunferência em coordenadas polares. Segue de $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ que a equação dessa circunferência em coordenadas é

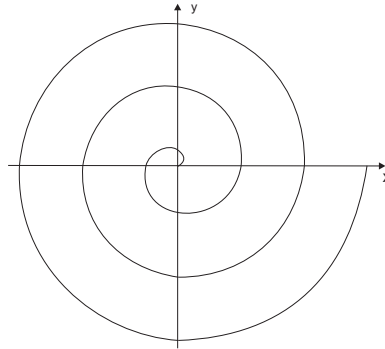
$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

De modo geral, a equação $\rho = C$, com C constante, representa a circunferência de centro no polo e raio C . A equação dessa circunferência em coordenadas cartesianas é

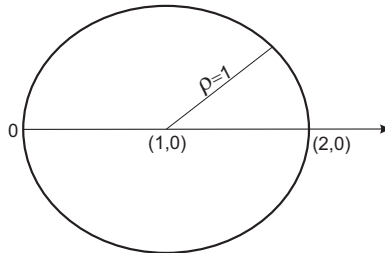
$$x^2 + y^2 = C^2$$

Outro exemplos:

(1) $\rho = \theta$, espiral



Exemplo 4. Seja $\rho = 2 \cos(\theta)$, circunferência de centro $(1,0)$ e raio 1.



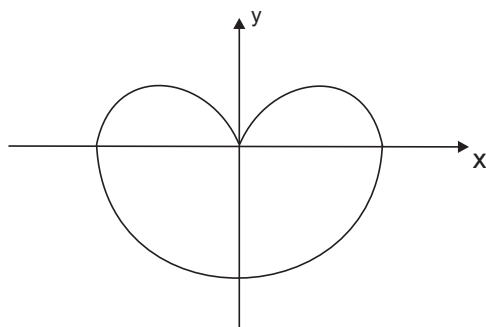
Observemos que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ e que

$$x = \rho \cos(\theta) \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \Rightarrow \cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

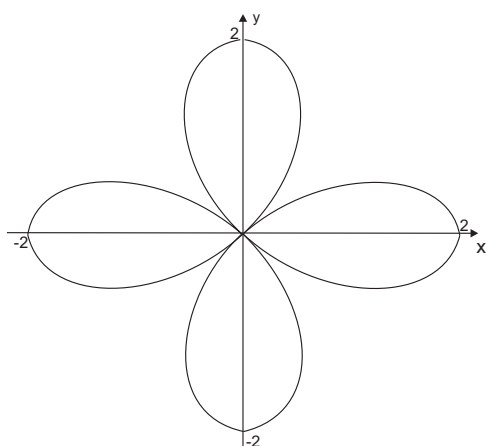
Como $\rho = 2 \cos(\theta)$ então $\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

Logo, $x^2 + y^2 = 2x \Rightarrow x^2 - 2x + y^2 = 0$ Portanto, $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1$

(2) $\rho = 1 + \sin(\theta)$, Cardióide.

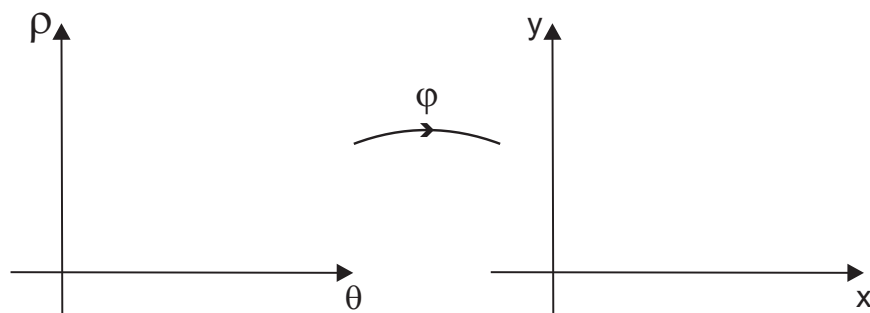


(3) $\rho = 2 \cos(2\theta)$, Rosácea de quatro pétalas.



Nosso interesse em coordenadas polares no momento reside no fato de fazermos mudança (ou substituição) de variável na integral dupla $\iint_{D_{xy}} f(x,y) dx dy$ utilizando a função

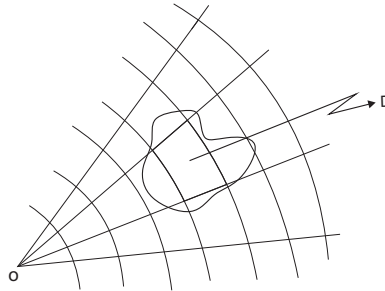
$$\varphi(\theta, \rho) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$$



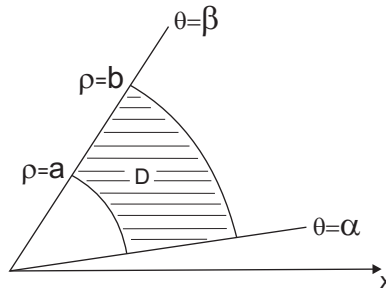
Este processo é chamado de mudança de variáveis para coordenadas polares na integral dupla.

Para efetuarmos uma mudança das coordenadas cartesianas para polares na integral dupla, em geral, deveremos substituir as coordenadas de $f(x, y)$ e o elemento de área $dx dy$.

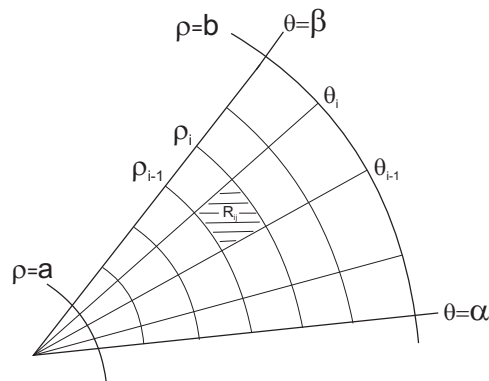
O integrando $f(x, y)$ é, relativamente, fácil e é dado por $f(x, y) = f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) = f(\rho, \theta)$. Ao definirmos a integral dupla usamos partições dadas por retângulos. Ao trabalharmos em coordenadas polares usaremos o processo análogo ao sub-dividirmos a região D em vários círculos centrados na origem ($\rho = \text{constante}$) e várias retas passando pela origem ($\theta = \text{constante}$) como mostra a seguinte figura:



Assim, considere a região D limitada pelas retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$ e os círculos concêntricos $\rho = a$ e $\rho = b$.



Seja \mathcal{P} uma partição de D obtida traçando-se n retas θ_i e n círculos concêntricos ρ_i como mostra a seguinte figura.



Consideremos, nesse momento, os novos “retângulos” R_i o qual chamaremos de “retângulos polares” da partição \mathcal{P} e seja, ainda, $|\mathcal{P}|$ o diâmetro do R_i . Como a área do setor circular de raio ρ e ângulo θ é dada por $\frac{1}{2}\rho^2\theta$, temos que a área de R_i é a diferença entre os dois

setores circulares, ou seja,

$$\begin{aligned} \text{Area } R_i &= \frac{1}{2}\rho_i^2(\theta_i - \theta_{i-1}) - \frac{1}{2}\rho_{i-1}^2(\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\rho_i^2 - \rho_{i-1}^2)(\theta_i - \theta_{i-1}) \\ &= \frac{1}{2}(\rho_i + \rho_{i-1})(\rho_i - \rho_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1}) \end{aligned}$$

Escrevendo $\bar{\rho}_i = \frac{\rho_i + \rho_{i-1}}{2}$, tem-se

$$\text{Area } R_i = \Delta R_i = \bar{\rho}_i(\rho_i - \rho_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1})$$

Escolhendo o ponto $(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)$ com $\theta_{i-1} \leq \bar{\theta}_i \leq \theta_i$ em R_i podemos considerar a soma de Riemann $\sum_1^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)\bar{\rho}_i(\rho_i - \rho_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1})$.

Se f é integrável em D , então podemos definir a seguinte integral:

$$\iint_D f(\rho, \theta) dR = \lim_{|\mathcal{P}| \rightarrow 0} \sum_1^n f(\bar{\rho}_i, \bar{\theta}_i)\bar{\rho}_i(\rho_i - \rho_{i-1})(\theta_i - \theta_{i-1})$$

Em contra partida, como $\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \end{cases}$

então, o Jacobiano é dado por:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) \end{vmatrix}$$

Temos, portanto, $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \rho(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) = \rho$

Logo,

$$\iint_D f(\rho, \theta) dR = \iint_D f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

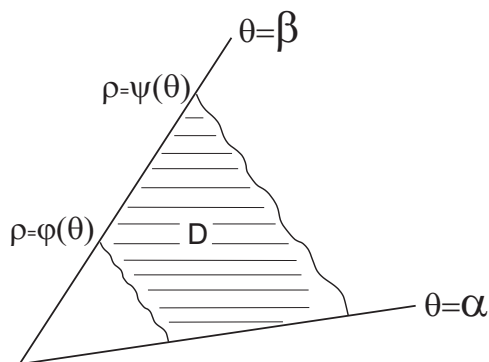
Portanto, temos a mudança desejada para coordenadas polares:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta)) \rho d\rho d\theta = \int_\alpha^\beta \int_a^b f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

onde $dR = \rho d\rho d\theta$ e o Jacobiano de f é ρ , com $\rho > 0$ e $0 \leq \theta \leq 2\pi$

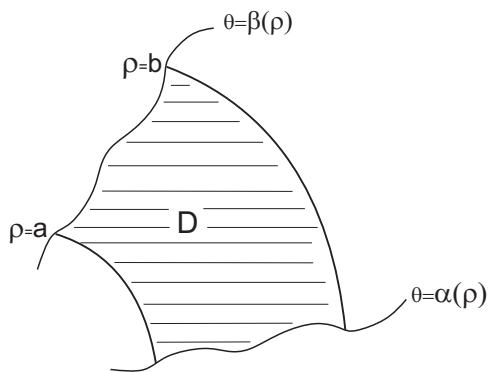
5.4.2 Regiões mais gerais

Já vimos casos em que a região D é um retângulo. Vimos, também, casos em que é convenientes usar coordenadas polares. No entanto, há regiões D que podem ser mais gerais, por exemplo, limitada pelas curvas $\rho = \varphi(\theta)$ e $\rho = \psi(\theta)$ e as retas $\theta = \alpha$ e $\theta = \beta$, com φ e ψ funções contínuas tais que $\varphi(\theta) \leq \psi(\theta)$ em $[a, b]$.



Neste caso, temos que
$$\iint_D f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{\varphi(\theta)}^{\psi(\theta)} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

Por outro lado, pode acontecer de a região D ser limitada pelas curvas $\theta = \alpha(\rho)$ e $\theta = \beta(\rho)$ e os círculos concêntricos $\rho = a$ e $\rho = b$ com $\alpha(\rho)$ e $\beta(\rho)$ são funções contínuas tais que $\alpha(\rho) \leq \beta(\rho)$ em $[a, b]$.



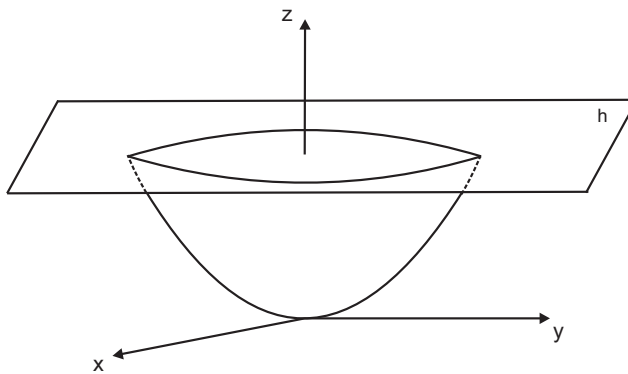
Neste caso, tem-se
$$\iint_D f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta = \int_a^b \int_{\alpha(\rho)}^{\beta(\rho)} f(\rho, \theta) \rho d\rho d\theta$$

A ilustração a seguir é um reservatório de água:



Com interesse de calcular a medida do volume, segue a aplicação: Calcular o volume do sólido situado acima do plano xy e limitado pelos gráficos $z = x^2 + y^2$ e $z = h$.

Modelo Matemático:



Solução:

$$V = \iint_{xy} x^2 + y^2 dx dy$$

Por coordenadas polares, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \rho \leq \sqrt{h}$.

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \rho^2 \rho d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{h}} \rho^3 d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left[\rho^4 \Big|_0^{\sqrt{h}} \right] d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} h^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2} \pi h^2 \end{aligned}$$

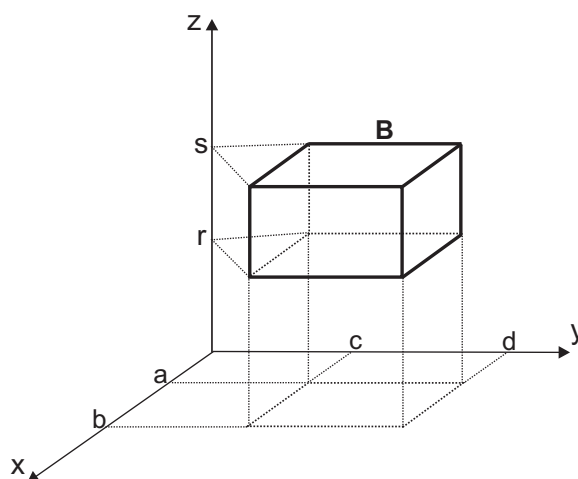
Capítulo 6

Integral Tripla

Assim como existem as integrais simples (ou unidimensionais) para funções de uma variável e as integrais duplas para funções de duas variáveis, existem as *integrais triplas* que, por sua vez, são para funções de três variáveis. Apresentaremos, nesse momento, as integrais triplas, onde o integrando é uma função de três variáveis definida sobre uma região do espaço tridimensional. As idéias de integrais triplas são definidas segundo uma analogia com a definição de integrais duplas aplicadas em regiões do plano xy .

Inicialmente, definiremos as integrais triplas de uma função $f(x, y, z)$ sobre um paralelepípedo retângulo.

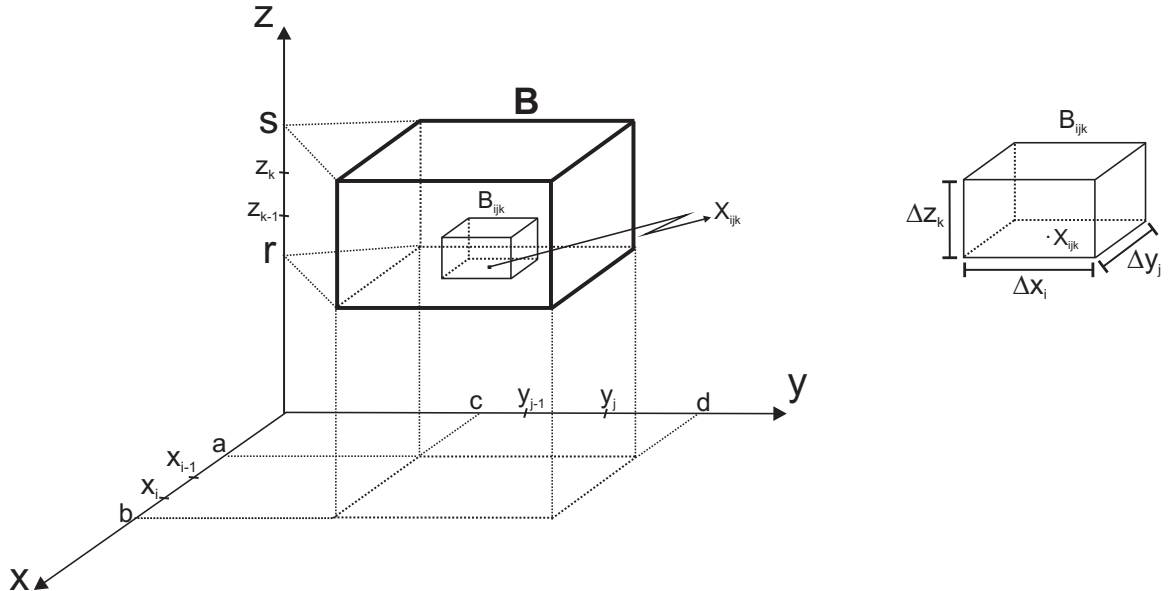
$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, r \leq z \leq s\}$$



Sejam $P_1 : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ uma partição em $[a, b]$.
 $P_2 : c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_{m-1} < y_m = d$ uma partição em $[c, d]$ $P_3 : r = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_{l-1} < z_l = s$ uma partição em $[r, s]$.

O conjunto $\mathcal{P} = \{(x_i, y_j, z_k) \mid i = 0, 1, 2, \dots, n, j = 0, 1, 2, \dots, m, k = 0, 1, 2, \dots, l\}$ é uma partição do paralelepípedo retângulo B . Essa partição de B determina uma subdivisão de B em paralelepípedos menores da forma:

$$B_{ijk} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k]$$



Em cada sub-paralelepípedo B_{ijk} escolhemos um ponto $X_{ijk} = (\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$. O conjunto \mathcal{X} dos pontos X_{ijk} é chamado de conjunto admissível à partição \mathcal{P} .

A soma

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

é chamada de Soma de Riemann de $f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k)$ relativa a partição \mathcal{P} e ao conjunto admissível \mathcal{X} e denotaremos por $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{X})$.

Portanto, temos:

$$S(f, \mathcal{P}, \mathcal{X}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

Consideremos o número $|\Delta|$ a norma da partição \mathcal{P} , definida como o comprimento da maior diagonal de B_{ijk} . Dizemos que um número real finito L é o limite da soma de Riemann $S(f, \mathcal{P}, \mathcal{X})$, quando $|\Delta| \rightarrow 0$, se para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda partição \mathcal{P} com $|\Delta| < \delta$ e para todo conjunto \mathcal{X} admissível à \mathcal{P} , temos

$$|S(f, \mathcal{P}, \mathcal{X}) - L| < \epsilon$$

Quando tal limite existe, e é único, chamamos L de integral tripla de $f(x, y, z)$ em B e é denotado por:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz \quad \text{ou por} \quad \iiint_B f(x, y, z) dV$$

Deste modo,

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k$$

O cálculo da integral tripla é feito via o Teorema de Fubini, isto é, se $f(x, y, z)$ é contínua em um paralelepípedo $B = [a, b] \times [c, d] \times [r, s]$, então

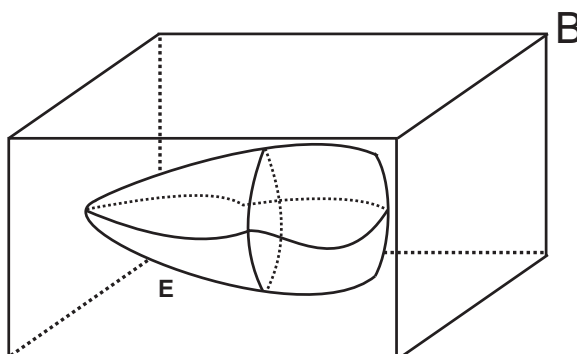
$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz$$

Observe que se fizermos mudanças na ordem de integração obtemos cinco outras integrais iteradas.

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \int_r^s \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \int_c^d \int_a^b \int_r^s f(x, y, z) dz dx dy \\ &= \int_a^b \int_r^s \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx \\ &= \int_c^d \int_r^s \int_a^b f(x, y, z) dx dz dy \\ &= \int_r^s \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz \\ &= \int_a^b \int_c^d \int_r^s f(x, y, z) dz dy dx \end{aligned}$$

Todas essas integrais iteradas fornecem o mesmo valor.

Sejam, agora, $f(x, y, z)$ uma função e E um sólido do espaço \mathbb{R}^3 , para o qual existe um paralelepípedo tal que $E \subset B$ e $B \subset D_f$.



Consideremos a função $F(x, y, z)$ definida em B por:

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{se } (x, y, z) \in E \\ 0 & \text{se } (x, y, z) \notin E \end{cases}$$

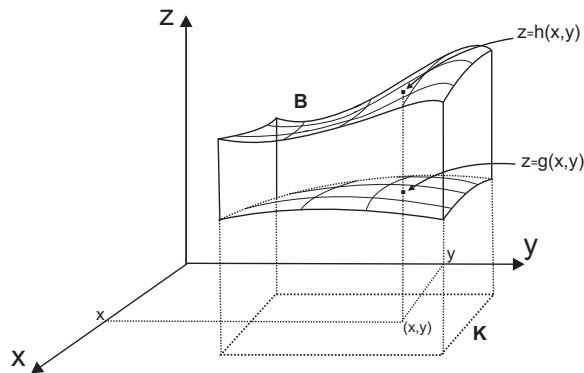
Assim, temos que

$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_B F(x, y, z) dx dy dz$$

Vamos considerar somente três conjuntos sobre os quais o cálculo da integral tripla recai em uma integral dupla.

- (i) Sejam $z = g(x, y)$ e $z = h(x, y)$ funções de duas variáveis definidas em um conjunto K com $g(x, y) \leq h(x, y)$, para todo $(x, y) \in K$. Consideremos B o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in K \text{ e } g(x, y) \leq z \leq h(x, y)\}$$

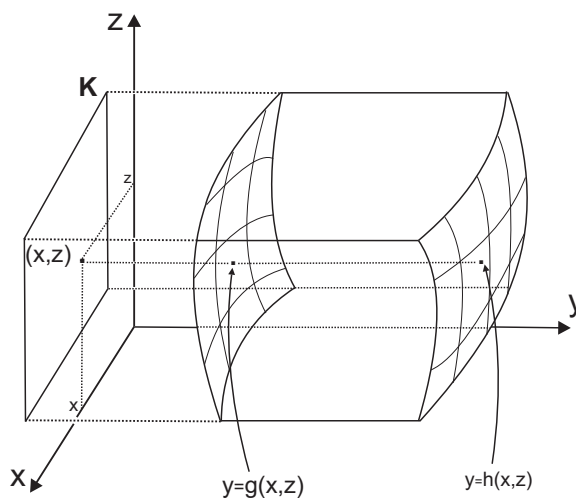


Neste caso, a integral tripla de $f(x, y, z)$ sobre B é dado por:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iint_K \left[\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

- (ii) Sejam $y = g(x, z)$ e $y = h(x, z)$ funções definidas em um conjunto K com $g(x, z) \leq h(x, z)$, para todo $(x, z) \in K$. Consideremos B o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, z) \in K \text{ e } g(x, z) \leq y \leq h(x, z)\}$$

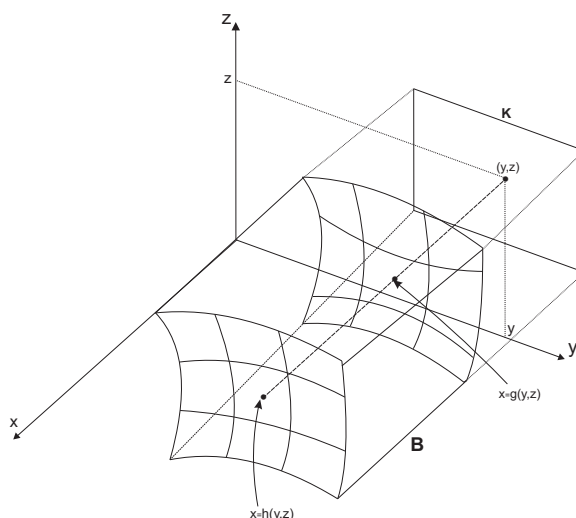


Neste caso, a integral tripla de $f(x, y, z)$ sobre B é dado por:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iint_K \left[\int_{g(x,z)}^{h(x,z)} f(x, y, z) dy \right] dx dz$$

- (iii) Sejam $x = g(y, z)$ e $y = h(y, z)$ funções definidas em um conjunto K com $g(y, z) \leq h(y, z)$, para todo $(y, z) \in K$. Consideremos B o conjunto

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y, z) \in K \text{ e } g(y, z) \leq x \leq h(y, z)\}$$



Neste caso, a integral tripla de $f(x, y, z)$ sobre B é dado por:

$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iint_K \left[\int_{g(y,z)}^{h(y,z)} f(x, y, z) dx \right] dy dz$$

Teorema 20 (Fubini para integrais triplas). *Seja D_{xy} um subconjunto fechado e limitado do plano xy . Sejam $Z_1(x, y)$ e $Z_2(x, y)$ funções contínuas em D_{xy} com $Z_1(x, y) \leq Z_2(x, y)$ em D_{xy} e $D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy} \text{ e } Z_1 \leq Z \leq Z_2\}$. Se f é integrável em D_{xy} , então,*

$$\begin{aligned} \iiint_B f(x, y, z) dx dy dz &= \iint_{D_{xy}} \left[\int_{Z_1(x, y)}^{Z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy \\ &= \iint_{D_{xy}} F(x, y) dx dy \end{aligned}$$

com $F(x, y) = \int_{Z_1(x, y)}^{Z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$

Definição 10. *Quando, em particular, $f(x, y, z) = K$, com K constante, em $D \subset \mathbb{R}^3$ temos que a integral tripla*

$$\iiint_D K dx dy dz = K \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^l \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k = K \iiint_D dx dy dz$$

torna-se a medida do volume de $D \subset \mathbb{R}^3$

6.1 Mudanças de variáveis em integrais triplas

Notamos que a convenção para coordenadas polares pode resultar em integrais duplas mais fáceis de serem calculadas. Do mesmo modo, a conversão para coordenadas cilíndricas ou esféricas pode ser vantajoso no cálculo de integrais triplas.

$$I = \iiint_T F(x, y, z) dx dy dz$$

Introduzindo novas variáveis de integração u, v, w por meio das equações:

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$$

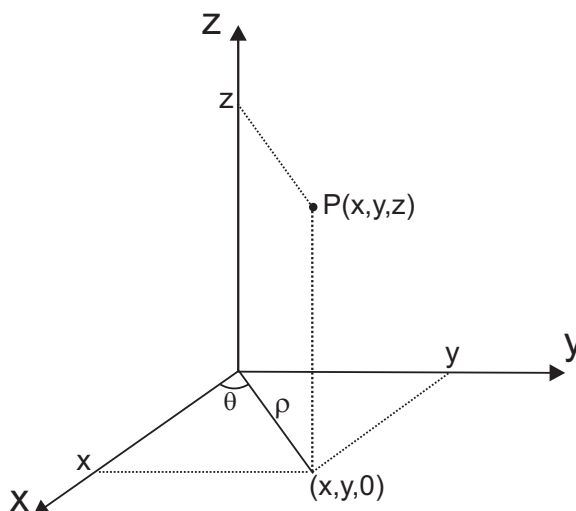
Deste modo, podemos expressar

$$I = \iiint_{T'} F(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

onde T' é a correspondente região no espaço uvw e $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ é o determinante Jacobiano de x, y e z em relação a u, v e w

6.1.1 Coordenadas Cilíndricas

As coordenadas cilíndricas de um ponto $P(x, y, z)$ no espaço são determinadas pelos números ρ, θ, z em que z é o mesmo “z” das coordenadas cartesianas e ρ e θ são as coordenadas polares da projeção de P sobre o plano xy , ou seja, ρ é a distância da origem ao ponto $(x, y, 0)$ e θ é o ângulo medido no sentido anti-horário entre o eixo x e o segmento de reta de extremidade na origem e no ponto $(x, y, 0)$.



$P(x, y, z)$	\rightarrow coordenadas cartesianas
$P(\rho, \theta, z)$	\rightarrow coordenadas cilíndricas

Temos que

$$\cos(\theta) = \frac{x}{\rho} \quad \text{e} \quad \sin(\theta) = \frac{y}{\rho}$$

Portanto, as coordenadas cartesianas e as coordenadas cilíndricas estão relacionadas pelas equações:

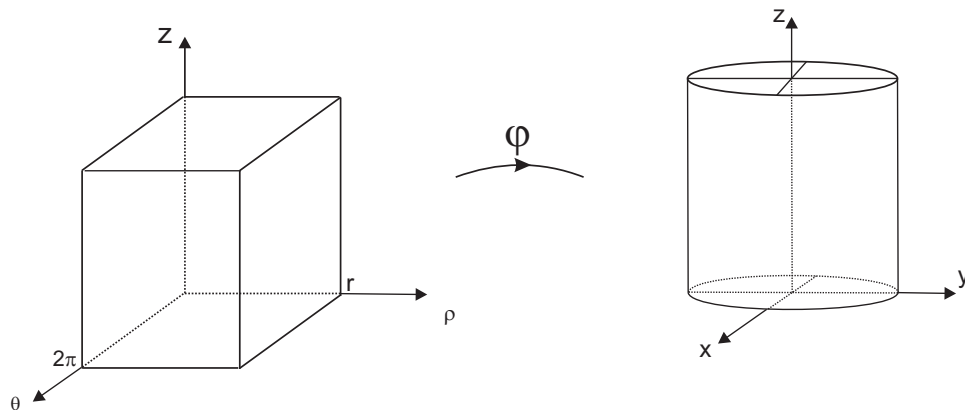
$$\begin{cases} x = \rho \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\theta) \\ z = z \end{cases}$$

A função $\varphi(\rho, \theta, z) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z)$ leva o paralelepípedo

$$B_{\rho\theta z} = \{(\rho, \theta, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \rho \leq r, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq z \leq h\}$$

no cilindro

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ e } 0 \leq z \leq h\}$$



O determinante Jacobiano da função φ é dado por:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -\rho \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \rho \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \cos^2(\theta) + \rho \sin^2(\theta) = \rho$$

Portanto, a mudança de variável desejada na integral tripla de uma função $f(x, y, z)$ sobre um conjunto B para coordenadas cilíndricas é

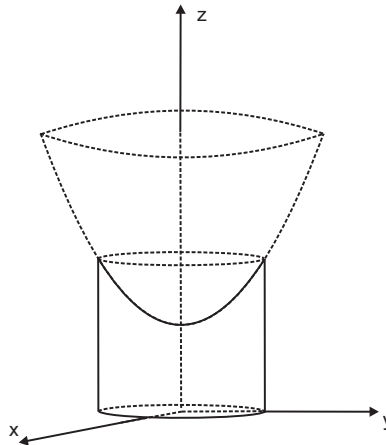
$$\iiint_B f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{B_{\rho\theta z}} f(\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta), z) \rho d\rho d\theta dz$$

A imagem abaixo ilustra uma panela conhecido como cuscuzeira.



Calcular o Volume do sólido acima do plano xy limitado pelos sólidos $x^2 + y^2 = a^2$ e $z = 1 + x^2 + y^2$.

Modelo Matemático:



Solução:

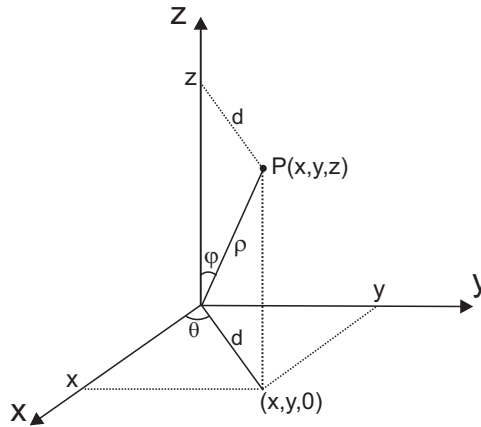
$$0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq z \leq 1 + x^2 + y^2$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{1+\rho^2} \rho dz d\rho d\theta$$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^a \int_0^{1+\rho^2} \rho dz d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho \left[z \Big|_0^{1+\rho^2} \right] d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_0^a \rho + \rho^3 \right] d\rho d\theta \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (2a^2 + a^4) d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} (2a^2 + a^4) \end{aligned}$$

6.1.2 Coordenadas Esféricas

Seja $P(x, y, z)$ um ponto do espaço \mathbb{R}^3 em que x, y e z são as coordenadas cartesianas de P . As coordenadas esféricas de P são os números θ, ρ e φ em que θ é o ângulo medido no sentido anti-horário entre o semi-eixo positivo Ox e o segmento de extremidade em $(0, 0, 0)$ e $(x, y, 0)$, ρ é a distância entre os pontos $(0, 0, 0)$ e P e φ é o ângulo medido no sentido anti-horário entre o semi-eixo positivo Oz e o segmento de extremidade em $(0, 0, 0)$ e P .



Denotando por d a distância entre a origem e o ponto $(x, y, 0)$, temos que:

$$\sin(\varphi) = \frac{d}{\rho} \implies d = \rho \sin(\varphi)$$

$$\cos(\theta) = \frac{x}{d} \implies x = d \cos(\theta)$$

$$\therefore x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta)$$

Em seguida,

$$\sin(\theta) = \frac{y}{d} \implies y = d \sin(\theta)$$

$$\therefore y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta)$$

E, finalmente,

$$\cos(\varphi) = \frac{z}{\rho} \implies z = \rho \cos(\varphi)$$

Portanto, as coordenadas cartesianas e coordenadas esféricas se relacionam como segue

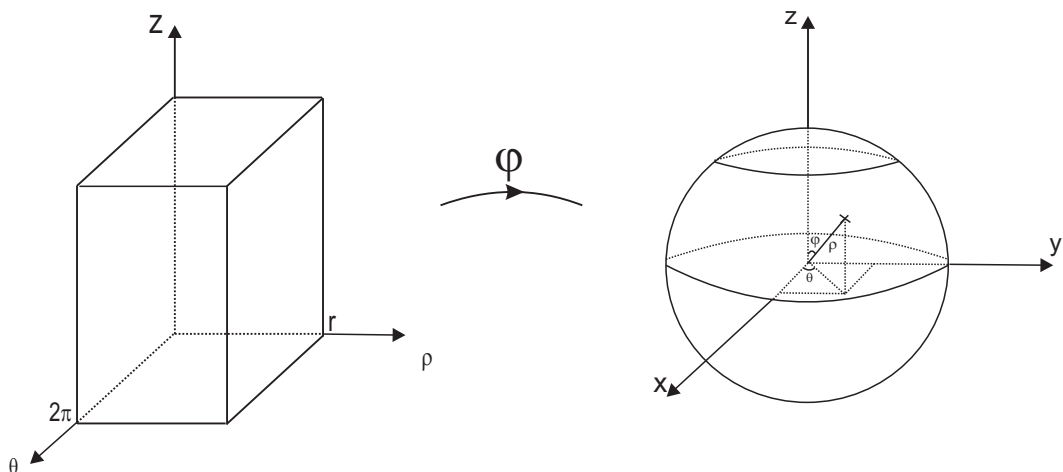
$$\begin{cases} x = \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ y = \rho \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ z = \rho \cos(\varphi) \end{cases}$$

Considerando $\varphi(\theta, \rho, \varphi) = (\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi))$ e o conjunto

$$E_{\theta\rho\varphi} = \{(\theta, \rho, \varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$$

em que $r \geq 0$

A função φ leva o paralelepípedo $E_{\theta\rho\varphi}$ na esfera E de centro na origem e raio r .



O determinante Jacobiano da função φ é dado por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, \varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} -\rho \sin(\varphi) \sin(\theta) & \sin(\varphi) \cos(\theta) & \rho \cos(\varphi) \cos(\theta) \\ \rho \sin(\varphi) \cos(\theta) & \sin(\varphi) \sin(\theta) & \rho \sin(\theta) \cos(\varphi) \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \end{vmatrix} \\
 &= \rho^2 \sin(\varphi) [\sin^2(\varphi) \sin^2(\theta) + \sin^2(\theta) \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \cos^2(\theta) + \cos^2(\varphi) \cos^2(\theta)] \\
 &= \rho^2 \sin(\varphi) [\sin^2(\varphi) + \cos^2(\varphi)] \\
 &= \rho^2 \sin(\varphi)
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\theta, \rho, \varphi)} = \rho^2 \sin(\varphi)$$

Assim, aplicando-se coordenadas esféricas à fórmula de mudanças de variáveis na integral tripla, obtemos:

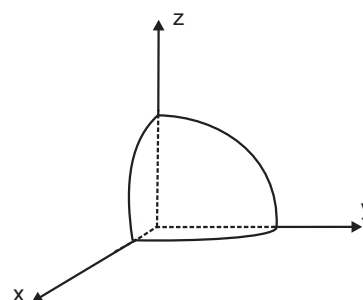
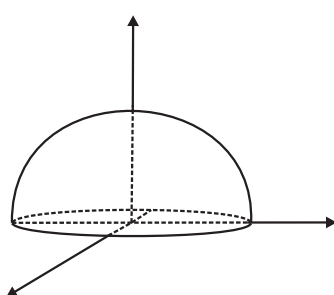
$$\iiint_E f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{E_{\theta\rho\varphi}} f(\rho \sin(\varphi) \cos(\theta), \rho \sin(\varphi) \sin(\theta), \rho \cos(\varphi)) \rho^2 \sin(\varphi) d\theta d\rho d\varphi$$

Em nossa região, as cujas são bastante conhecidas. Veja a imagem:



Desta forma, criamos, então, a seguinte aplicação: Calcular o volume do sólido limitado por uma esfera de raio a centrado na origem e acima do plano xy .

Modelo Matemático:



$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq a, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$4 \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi d\rho$$

Solução:

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin(\varphi) d\theta d\varphi d\rho \\ &= 4 \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin(\varphi) \left[\theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] d\varphi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \rho^2 \sin(\varphi) d\varphi d\rho \\ &= 2\pi \int_0^a \rho^2 \left[-\cos(\varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \right] d\rho \\ &= 2\pi \int_0^a \rho^2 d\rho \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(\rho^3 \Big|_0^a \right) \\ &= \frac{2}{3} \pi a^3 \end{aligned}$$

Considerações Finais

Com este trabalho, podemos conhecer melhor sobre o tema nele exposto. Vimos que as fórmulas para o cálculo de volume podem ser deduzidas de várias maneiras diferentes, como por exemplo, empregando os métodos da geometria espacial clássica, usando integrais simples para calcular o volume de sólidos de revolução e usando integrais duplas para o cálculo de volume de sólidos em forma de prismas retos ou curvilíneos, ou ainda, via integrais triplas. Tivemos oportunidade de ver o quão o cálculo de volume está presente no dia-a-dia, conforme mostramos em diversas partes do trabalho. E com isso, o objetivo desejado do trabalho foi alcançado.

Bibliografia

- [1] Anton H. ; Bivens I. ; Davis S. , *Cálculo*, Vol 1, 8ª edição, Editora Bookman, 2007.
- [2] Anton H. ; Bivens I. ; Davis S. , *Cálculo*, Vol 2, 8ª edição, Editora Bookman, 2007.
- [3] Guidorizzi H. L., *Um curso de Cálculo*, Vol 1, 5ª edição, Editora LTC.
- [4] Thomas G. B. , *Cálculo*, Vol 1, 10ª edição, Editora PEARSON.
- [5] Thomas G. B. , *Cálculo*, Vol 2, 10ª edição, Editora PEARSON.
- [6] Munem M. A. ; Foulis D. J. , *Cálculo*, Vol 1, Editora LTC, 2011.
- [7] Munem M. A. ; Foulis D. J. , *Cálculo*, Vol 2, Editora LTC, 2011.
- [8] Leithold L. , *O Cálculo com geometria Analítica*, Vol 1, 3ª edição.
- [9] Leithold L. , *O Cálculo com geometria Analítica*, Vol 2, 3ª edição.
- [10] Swokowski E. W. , *O Cálculo com geometria Analítica*, Vol 1, 2ª edição, Editora Makron Books, 1994.
- [11] Swokowski E. W. , *O Cálculo com geometria Analítica*, Vol 2, 2ª edição, Editora Makron Books, 1994.
- [12] Flemming D. M. ; Gonçalves M. B. , *Cálculo A, funções, limite, derivação e integração*, 6ª edição, Editora PEARSON.
- [13] Flemming D. M. ; Gonçalves M. B. , *Cálculo B, funções de várias variáveis, integrais múltiplas, integral curvilínea e de superfície*, 2ª edição, Editora PEARSON.
- [14] Dolce O. ; Pompeo J. N. , *Fundamentos de matemática, Geometria Espacial e métrica*, 6ª edição, Atual Editora.
- [15] Iezzi G. ; Murakami C. ; Machado N. , *Fundamentos de matemática, limite, derivadas e noções de integral*, 6ª edição, Atual Editora.
- [16] Hughes-Hallet D. ; Gleason A. ; McCallum W. , *Cálculo de uma variável*, 3ª edição, Editora LTC.

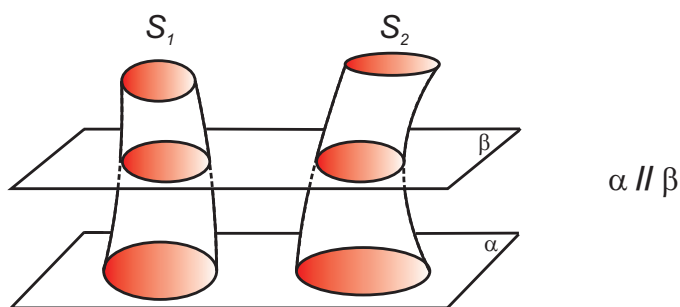
Apêndice

Apresentamos a seguir o *Princípio de Cavalieri*, que é utilizado, principalmente, para determinar o volume de um sólido dado a partir de outro sólido cujo volume é conhecido. *Bonaventura Cavalieri* foi um Famoso matemático Italiano do século *XVI*. Estudou as obras de Euclides e Arquimides, e durante 4 anos que viveu em Pisa, foi discípulo de Galileu. Cavalieri, criou um método capaz de determinar volume de sólidos com facilidade e é o que veremos a seguir.

Princípio de Cavalieri. *Dados dois planos α e β horizontais e paralelos. Considere o plano β secante a dois sólidos S_1 e S_2 cujas bases estão contidas em α . O plano β determinará nos sólidos secções transversais $\beta \cap S_1$ e $\beta \cap S_2$. Se para qualquer plano β' horizontal e paralelo a α ocorrer:*

$$\text{Area}(\beta' \cap S_1) = \text{Area}(\beta' \cap S_2)$$

então os volumes dos sólidos S_1 e S_2 são iguais.



A aplicação do Princípio de Cavalieri, em geral, implica a colocação dos sólidos com bases em um mesmo plano paralelo ao qual estão as secções de áreas iguais. Vejam a imagem um exemplo prático desta aplicação.

