UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Maria Lúcia Moraes Vilhena

Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias.

BELÉM

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Maria Lúcia Moraes Vilhena

Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientadora: Prof^a^.Dr^a^.Rúbia Gonçalves Nascimento.

BELÉM

2014

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Maria Lúcia Moraes Vilhena

Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias.

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal do Pará pela seguinte banca examinadora:

Banca Examinadora:

____

Prof^{o}. Dr^{o}.João Cláudio Brandemberg Quaresma

Faculdade de Matemática, UFPA

____

Prof^{o}. Msc. João Batista do Nascimento

Faculdade de Matemática, UFPA

____

Prof^{a}. Dr^{a}. Rúbia Gonçalves Nascimento.
Orientadora
Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ______________________________

Dedico este trabalho à todos que direta ou indiretamente me ajudaram e torceram por mim na realização deste sonho e à Deus, que ao longo desta trajetória fez-se presente em todos os momentos, tornando-me forte para superar os limites e desafios e incansável na busca de conhecimento, a ferramenta imbátivel contra qualquar tipo de preconceito.

"A Matemática por si só é grandiosa e fascinante! E quando usada como ferramenta nas ciências torna-se imbatível, capaz de revolucionar gerações e mudar o mundo."

AGRADECIMENTOS

Ao logo destes anos, uma característica fundamental no êxito desta conquista fez-se presente em minha vida; a persistência, que com o apoio de minha família, amigos, professores e em especial ao meu esposo, que foi um grande parceiro e aliado nesta caminhada, contribuiram de forma decisiva para este momento impar.A s dificuldades que surgiram, foram muitas, mas trouxeram consigo grandes aprendizados, sabedoria e segurança para enfrentar e superar novos desafios.

Agradeço à Deus acima de tudo, pois sei que a vontade de seguir em frente e de superar os desafios esteve sempre ancorada na força divina, pois o homem sem espiritualidade e fé vive uma vida cheia, mas cheia de nada.

À minha família, que não é pequena, aos meus pais; José Carvalho Vilhena e Benedita Moraes Vilhena e irmãos; José José Antônio M. Vilhena, José Lúiz M. Vilhena, José Benedito M. Vilhena, José Marcos M. Vilhena, José Geraldo M. Vilhena, Mª José M. Vilhena, Mª Benedita Vilhena da Cumha, Mª de Jesus M. Vilhena, Mª Izabel M. Vilhena e especialmente ao meu esposo Joel de Jesus Corrêa Silva por estar ao meu lado nos momentos de alegria e principalmente, nos momentos críticos que passei, por torcerem e acreditarem em mim.

Aos professores que contribuiram com o conhecimento adquirido ao longo destes anos, em especial à Professora Drª Rubia Gonçalves Nascimneto, por ter sido mais que uma professora e orientadora, uma amiga! E aos professores Drº José Antônio Vilhena, Drº Marcos Monteiro Diniz, Drª Cristina Lúcia Dias Vaz, Drª Maria de Nazaré Carvalho Bezerra e Msc. Joelma Morbach pelo amor, dedicação e compromisso que vocês demonstram em sala de aula, pois sei que bons professores geram bons alunos.

À todos os amigos que viveram e compartilharam o mesmo sonho; Juliana Matos, Ana Flávia Martins, Elizangela Samara, Ingra Luana Dantas, Felipe Sozinho, Isaías Serra, Sara Silva, Sara Raissa, Tiogo Braga, Karin Neves, Rosâgela Santos, Elisa Martins, Carlos Rodriguês e aos amigos veterânos; Graciethy, Grenthyn, Gilson, Marcia Kelly, Ubiratân, Marlon Serrâo, Andressa Manito,Willian, Marluce, que mesmo distante estiveram torcendo por mim.

Agradeço imensamente á todos por fazerem parte de minha vida, pois "A vida não é o que se viveu, mas sim o que se lembra, e como se lembra de contar isso"de Gabriel Garcia Márquez.

RESUMO

O estudo das equações diferenciais constitui uma parte muito importante da matemática. Além disso, um número bastante apreciável de fenômenos físicos é descrito de alguma forma por algum tipo de equação diferencial. Por isso faremos um estudo introdutório sobre as Equações Diferenciais, mas mantendo o foco e direcionamento nas equaões diferenciais ordinárias de 1ª ordem, neste estudo serão abordados aspectos históricos e teóricos, suas classificações e metódos de resoluções, bem como mostrar algumas de suas aplicações nas ciências.

Palavras-chave: Equações, Ordinária, 1ª Ordem, Soluções, Metódos, Aplicações.

Sumário

Introdução

Em razão da grande importância das Equações Diferenciais, seja do ponto de vista físico, descrevendo de forma quantitativa uma grande quantidade de fenômenos, como matemático, é muito importante conhecer métodos de resolução dessas equações, bem como interpretar fisicamente o que elas significam. No que se segue, começaremos por introduzir um breve histórico das equações diferenciais e as noções íniciais das mesmas; algumas das terminologias habitualmente usada, conceitos, defições e classificções, para só então, nos direcionarmos ao estudo das equações diferenciais ordinarias, tendo como objetivo principal as soluções de algumas equações simples de 1ª ordem, apresentar metódos e técnicas para encontrar as soluções das equações e por fim, mostrar algumas aplicações das equações diferenciais.

Capítulo 1

Um breve Histórico sobre as Equações Diferenciais

As equações diferenciais originaram-se no século XVII, e tiveram um desenvolvimento consideravel na última década deste século, quando Newton, Leibniz e os irmãos Bernoulli resolveram equações oriundas da Geometria e Mecânica. Estes desenvolvimentos íníciais levaram à procura de técnicas de solução de certos casos específicos de equações diferênciais.

O termo equações diferênciais foi usado pela primeira vez por Leibniz, em 1676, para designar a relação entre as diferênciais dx e dy de duas variáveis x e y. Segundo Ince [3], o nascimento das equações diferênciais ocorreu em meados de 1675, quando Leibniz escreveu a relação

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2$$

em que ele não apenas resolveu uma equação diferêncial como também introduziu o poderoso e eterno símbolo de integração $\int$. Ao estabelecer esta última igualdade, Leibniz estava resolvendo, talvez de modo inconsciente, a seguinte equação diferêncial:

Determinar uma função $y = y(x)$ que seja solução da equação diferêncial

$$\frac{dy}{dx} = x$$

Ainda nessa época, Newton estabeleceu uma classificação para as equações diferênciais designadas por ele como *equações fluxionais*.Sua classificação era feita por classes, como segue abaixo:

A primeira classe era composta por dois fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e um fluente x ou y.

Exemplo:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(y)$$

Em notação atual elas são escritas da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dx} = f(y).$$

A segunda classe envolve as equações com dois fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$ e dois fluentes x e y.

Exemplo:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x, y)$$

Em notação atual são escritas da seguinte forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

A terceira classe envolve as equações nas quais figuram mais de dois fluxões e que são conhecidas como equações diferênciais parciais.

Ao longo de seu desenvolvimento surgiram novos e importantes tipos de equações diferenciais, em 1691, Leibniz(1646-1716) implicitamente descobriu o *método de separação de variáveis*, ao provar que a equação diferencial

$$y\frac{dx}{dy} = X(x)Y(y)$$

conhecida por *equação a variáveis separáveis*, pode ser resolvido por quadraturas, ou seja, por um processo de integração de funções. Assim como Leibniz, os irmãos Bernoullis também contribuiram no desenvolvimento das equações diferênciais, em particular James Bernoulli, quando em maio de 1690, publica uma solução para o problema da isócrona, a qual recai na equação diferencial

$$dy\sqrt{b^2y - a^3} = dx\sqrt{a^3}.$$

E foi no trabalho em que James Bernoulli(1655-1705) apresentou a solução desta equação, que surgiu pela primeira vez, o termo *integral*. Jean Bernoulli(1667-1748) em carta endereçada a Leibniz, datada de 20 de maio de 1716, estuda a equação de segunda ordem que, em simbolismo atuais, é representada por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{2y}{x^2}$$

Durante o século XVIII métodos mais sistemáticos de resolução de equações diferenciais foram desenvolvidos por Euler, Lagrange e Laplace, começando a ficar claro que poucas equações diferenciais podiam ser resolvidas por métodos elementares; o que deu origem a uma das grandes preocupações: encontrar condições de existência e unicidade de soluções, e deduzir propriedades da solução através da análise da própria equação diferencial (análise quantitativa).

Foi em meio a este clima de inquietação que surge A.L.Cauchy(1789-1857), caracterizando este período pelo seu grande feito; demonstrou rigorosamente pela primeira vez, e por três métodos diferentes, a existência de soluções para uma vasta classe de Equações Diferenciais.

Apartir do início do século XIX os métodos gerais de resolução explícita das Equações Diferenciais começam a perder sua proeminência e no final do século XIX surge o cálculo operacional de O. Heaviside(1850-1925) e a transformada de Laplace, iniciando assim a teoria qualitativa geométrica representada por H.Poincaré(1854-1912) e A.M. Liapounov(1857-1918) e também a teoria de aproximação analítica(expansão em séries) e aproximação numérica.

Em 1841, Liouville provou que, em certos casos, não é possível obter solução de uma equação diferencial por métodos elementares mesmo sabendo que a solução existe e é única. Daí a importância da análise quantitativa dos métodos numéricos em equações diferenciais.

Vale ressaltar que as *equações diferenciais* constituem uma das aréas mais fecundas da Matématica, tanto por suas aplicações ao mundo físico como por sua contribuição à criação e o desenvolvimento de várias técnicas e teorias centrais para o progresso científico e tecnológico.

Capítulo 2

Noções Iniciais

2.1 Definições e Exemplos

Nesta seção, veremos primeiramente, breves conceitos preliminares como; variável dependente, variável independente, para só então; introduzir a definição de equação diferencial, assim como mostrar alguns exemplos da mesma. Vejamos as definições abaixo:

- **Variável Dependente**

  Definição 2.1. *Quando uma variável depende de outra, ou de outras, ela é chamada de dependente. Ela não pode assumir qualquer valor, pois depende de outras variáveis.*

- **Variável Independente**

  Definição 2.2. *Se uma variável pode assumir qualquer valor, independentemente de outra variável, ela é chamada independente.*

  Exemplo 2.1.

  $$\frac{dx}{dt} = 2x$$

  Na equação diferencial, t é a variável independente e x = x(t) é variável dependente.

  Exemplo 2.2.

  $$\frac{d^3s}{dh^3} + sh^2\frac{ds}{dh} - 2h = cosh$$

  Na equação diferencial, h é a variável independente e s = s(h) é variável dependente.

Exemplo 2.3.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Na equação diferencial, x e y são as variáveis independentes e u = u(x,y), v = v(x,y) são as variáveis dependentes.

Com esses dois conceitos acima, podemos então fazer a seguinte definição:

- **Equação Diferencial**

Definição 2.3. *Chama-se equação diferencial a uma equação em que a incógnita é uma função (variável dependente) de uma ou mais variáveis (independentes), envolvendo derivadas da variável dependente em relação a uma ou mais variáveis independentes.*

Exemplo 2.4.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^4 x}{dt^4} + 5\frac{d^2 x}{dt^2} + 3x = cost$$

$$\frac{d^3 y}{dz^3} + y\frac{d^2 x}{dz^2} = lnz$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

Se observarmos as equações acima, notaremos que existem várias equações diferenciais, cujas classificações se dão quanto ao tipo, ordem e linearidade. Por isso, na seção 2.2 e 2.3 definiremos cada um dos termos, para só então direcionarmos exclusivamente ao estudo das equações diferenciais ordinárias.

2.2 Classificações das Equações Diferenciais

2.2.1 Quanto ao Tipo

Quanto ao tipo as equações diferenciais podem ser classificadas em Equações Diferenciais Ordinárias e Equações Difenciais Parciais, como segue abaixo:

1. **Equações Diferenciais Ordináriais (EDO)**

   Definição 2.4. *Uma equação diferencial que envolve apenas derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a* **uma única** *variável independente, é chamada de* **equação diferencial ordinária (EDO).**

   Exemplo 2.5.

   $$\frac{d^2y}{dx^2} + xy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$$

   A equação diferencial acima, é uma EDO; pois a variável dependente é $y = y(x)$ com relação a **uma única** *variável independente $\underline{x}$.*

   Exemplo 2.6.

   $$\frac{d^4x}{dt^4} + 5\frac{d^2x}{dt^2} + 3x = cost$$

   A equação diferencial acima, é uma EDO; pois a variável dependente é $x = x(t)$ com relação a **uma única** *variável independente $\underline{t}$.*

   Exemplo 2.7.

   $$\frac{d^3y}{dz^3} + y\frac{d^2x}{dz^2} = lnz$$

   A equação diferencial acima, é uma EDO; pois as variáveis dependentes são $x = x(z)$ e $y = y(z)$ com relação a **uma única** *variável independente $\underline{z}$.*

2. **Equações Diferenciais Parciais**

   Definição 2.5. *Uma equação diferencial que envolve derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a* **mais de uma** *variável independente, é chamada de* **equação diferencial parcial (EDP).**

Exemplo 2.8.

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v$$

A equação diferencial acima é uma EDP; pois a variável dependente é $v = v(s,t)$ com relação a **mais de uma** *variável independente, isto é: $\underline{s}$ e $\underline{t}$.*

Exemplo 2.9.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

A equação diferencial acima é uma EDP; pois as variáveis dependentes são $u = u(x,y)$ e $v = v(x,y)$ com relação a **mais de uma** *variável independente, isto é: $\underline{x}$ e $\underline{y}$.*

Exemplo 2.10.

$$a^2\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

A equação diferencial acima é uma EDP; pois a variável dependente é $u = u(x,t)$ com relação a **mais de uma** *variável independente, isto é: $\underline{x}$ e $\underline{t}$.*

2.2.2 Quanto à Ordem e Grau

Definição 2.6. *A ordem de uma equação diferencial é definida pela derivada de maior ordem.*

Definição 2.7. *O grau de uma equação diferencial é o expoente da derivada de mais alta ordem que aparece na equação.*

Exemplo 2.11.

$$\frac{xd^3y}{dx^3} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$$

A equação diferencial é de 3ª ordem e 1º grau.

Exemplo 2.12.

$$3j^2\left(\frac{d^4x}{dj^4}\right)^2 - \frac{1}{j}\frac{d^2x}{dj^2} + jx = je^j$$

A equação diferencial é de 4ª ordem e 2º grau.

Exemplo 2.13.

$$(y'')^3 \ + \ 3y' \ + \ 6y = \ tan(x)$$

A equação diferencial é de 2ª ordem e 3º grau.

Exemplo 2.14.

$$\frac{\partial x}{\partial f} + f\frac{\partial x}{\partial w} + w^3\frac{\partial^6 x}{\partial t^6} = \sqrt[3]{x^3 f w^4 t}$$

A equação diferencial é de 6ª ordem e 1º grau.

2.2.3 Quanto à Linearidade

Quanto a linearidade de uma equação diferencial ela pode ser classificada em Linear e Não-Linear, como segue abaixo:

1. **Equação Diferencial Linear**

   Definição 2.8. *Uma equação diferencial ordinária é denominada linear quando pode ser escrita da seguinte forma*

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

   Observação 2.1. *Uma equação diferencial é chamada de linear se satisfaz as seguintes propriedades:*

   (i) A variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau; isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1.

   (ii) Cada coeficiente depende apenas da variável independente x.

   Exemplo 2.15.

$$xdy \ + \ ydx \ = \ 0$$

   Na equação diferencial acima é linear, pois satisfaz as propriedades (i) e (ii). Ou seja, a equação é do 1º grau e o coeficiente x dependem das variável independente x e 1 é constante.

Exemplo 2.16.

$$x^3\frac{d^3y}{dx^3} \text{ - } \frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$$

A equação diferencial acima é linear, pois satisfaz as propriedades (i) e (ii). Ou seja, a equação é do 1º grau e os coeficientes x^3, $3x$ e e^x dependem da variável independente x e -1, 5 são constantes.

Exemplo 2.17.

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\ \frac{\partial u}{\partial y} = u$$

A equação diferencial acima é linear, pois satisfaz as propriedades (i) e (ii). Ou seja, a equação é do 1º grau e os coeficientes x e y dependem das variáveis independente x e y.

Exemplo 2.18.

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ - } 2\ \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$

A equação diferencial acima é linear, pois satisfaz as propriedades (i) e (ii). Ou seja, a equação é do 1º grau e os coeficientes 1, -2 e 6 são constantes.

Exemplo 2.19.

$$(1-x)y'' \text{ - } 4xy' + 5y = cosx$$

A equação diferencial acima é não-linear, pois não satisfaz as propriedades (i) e (ii). Ou seja, a equação é do 1º grau, os coeficientes 1 e 5 são constantes e $-x$, $-4x$ e $cosx$ dependem da variável independente x.

2. **Equação Diferencial Não-Linear**

Definição 2.9. *Uma equação que não é linear é chamada de não-linear, pois não satisfazem as condições das propriedades.*

Exemplo 2.20.

$$yy'' \text{ - } 2y' = x$$

A equação diferencial acima é não-linear, pois não satisfaz a propriedades (ii). Ou seja, a equação é do 1º grau mas o coeficiente y não depende da variável independente x, mas sim da variável dependente y .

Exemplo 2.21.

$$\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$$

A equação diferencial acima é não-linear, pois não satisfaz as propriedades (i). Ou seja, a equação não é do 1º grau, mas sim do 2º grau.

Exemplo 2.22.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

A equação diferencial acima é não-linear, pois não satisfaz as propriedades (i). Ou seja, a equação não é do 1º grau, mas sim do 2º grau.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^3 + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

A equação diferencial acima é não-linear, pois não satisfaz as propriedades (i). Ou seja, a equação não é do 1º grau, mas sim do 3º grau.

2.3 Equações Diferenciais Ordinárias

2.3.1 Caracterização

Uma equação diferencial Ordinária geral de n-ésima ordem é frequentemente representada pelo simbolismo

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0 \tag{2.1}$$

onde F é uma função de $n + 2$ variáveis.

A equação (2.1) representa a relação entre a variável independente $\underline{x}$ e os valores da função incógnita $\underline{y}$ e suas n primeiras derivadas

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dy^2}{dx^2}, \quad ..., \quad y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$$

Quando pudermos explicitar y^n na Equação (2.1), teremos

$$y^n = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$$

que é denominada *forma normal* da E.D.O de ordem n.

2.3.2 Solucão para uma Equação Diferencial Ordinária

Definição 2.10. *Qualquer função f definida em algum intervalo I, que, quando substituida na equação diferencial, reduz a equação a uma identidade, é chamada de solução para a equação no intervalo.*

Ou seja uma solução para a equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0 \tag{2.2}$$

é uma função f que possui pelo mesnos n derivadas e que satisfaz a equação (2.1), isto é;

$$F(x, f(x), f'(x), ..., f^n(x)) = 0$$

para todo x no intervalo I.

Observação 2.2. *Dependendo do contexto, o intervalo I pode representar um intervalo aberto(a,b), um intervalo fechado[a,b], um intervalo infinito (0,∞) e assim por diante.*

Exemplo 2.23. *A função $y(x) = \dfrac{3e^{x^2} - 1}{2}$ é uma solução para a equação diferencial ordinária $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$ no intervalo (-∞, ∞).*

De fato:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\frac{3e^{x^2} - 1}{2}\right) - 2x\left(\frac{3e^{x^2} - 1}{2}\right) &= x \\ \frac{3e^{x^2}2x}{2} - 3xe^{x^2} + x &= x \\ 3xe^{x^2} - 3xe^{x^2} + x &= x \\ x &= x. \end{aligned}$$

Portanto, a função $y(x) = \dfrac{3e^{x^2} - 1}{2}$ é solução da equação diferencial dada, para todo x real.

Exemplo 2.24. *A função* $y(x) = \sqrt{1+12(x-1)^2}$ *é uma solução para a equação diferencial ordinária* $y' = \dfrac{1-y^2}{(1-x)y}$ *no intervalo (-*∞*,*∞*).*

De fato:

Calculando a derivada $y'(x)$ *temos:*

$$y'(x) = \frac{1}{2}\left(1+12(x+1)^2\right)^{-\frac{1}{2}} 24(x-1)y'(x) = \frac{12(x-1)}{\sqrt{1+12(x-1)^2}}.$$

Agora substituindo a função $y(x)$ *e a derivada* $y'(x)$ *na equação diferencial dada, segue-se que*

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{1-y^2}{(1-x)y} \\
\frac{12(x-1)}{\sqrt{1+12(x-1)^2}} &= \frac{1-\left(\sqrt{1+12(x-1)^2}\right)^2}{(1-x)(\sqrt{1+12(x-1)^2})} \\
\frac{12(x-1)}{\sqrt{1+12(x-1)^2}} &= \frac{1-1-12(x-1)^2}{(1-x)(\sqrt{1+12(x-1)^2})} \\
\frac{12(x-1)}{\sqrt{1+12(x-1)^2}} &= \frac{12(x-1)^2}{(x-1)\sqrt{1+12(x-1)^2)}}
\end{aligned}$$

Observe que

$$\frac{12(x-1)}{\sqrt{1+12(x-1)^2}} = \frac{12(x-1)}{\sqrt{1+12(x-1)^2)}}$$

para todo número real.

Exemplo 2.25. *A função* $y(x) = (x^3+c)e^{-3x}$ *, c constante é uma solução para a equação diferencial ordinária* $\dfrac{dy}{dx} + 3y = 3x^2e^{-3x}$ *no intervalo (*∞*,*∞*) , pois quando substituida na equação resulta uma identidade.*

De fato:

Substituindo a função $y(x)$ *na equação diferencial ordinária dada, temos;*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left((x^3+c)e^{-3x}\right) + 3\left((x^3+c)e^{-3x}\right) &= 3x^2e^{-3x} \\
\frac{d}{dx}\left(x^3e^{-3x}+ce^{-3x}\right) + 3\left(x^3e^{-3x}+ce^{-3x}\right) &= 3x^2e^{-3x} \\
3x^2e^{-3x} - 3x^3e^{-3x} - 3ce^{-3x} + 3x^3e^{-3x} + 3ce^{-3x} &= 3x^2e^{-3x}
\end{aligned}$$

Observe que

$$3x^2e^{-3x} = 3x^2e^{-3x}$$

para todo número real.

Observação 2.3. *Uma solução para uma equação diferencial que é identicamente nula* $y(x) = 0$ *em um intervalo* I *é chamada de* **solução trivial**

2.3.3 Classificação quanto ao tipo de Soluções

Uma solução para uma equação diferencial ordinária depende substancialmente do de entendemos por resolução da equação, ou seja a que processos de construção das soluções estamos nos referindo. Pois assim como o Teorema Fundamental da Álgebra nos afirma que P(x) = 0 tem n soluções, a qual Galois nos alerta que as mesmas não podem ser, em geral, obtidas explicitamente, o Cálculo também é suficiente para resolver através dos chamados teoremas de existência de soluções de equações diferenciais ordináriais "todas" as EDO, mas não de forma explícita.

Explícita

Definição 2.11. *Uma solução na qual a variável dependente é expressa somente em termos da varável independente, ou seja* $y = f(x)$ *e de constantes, e que, quando substituída na equação dierencial, a transforma em uma igualdade é chamada de solução explícita.*

Exemplo 2.26. *A função* $y = xe^x$ *é uma solução explícita da equação diferencial ordinária* $y - 2y' + y = 0$ *no intervalo (-∞,∞), pois a função* $y = f(x)$ *é escrita apenas em função da variável independente* x*.*

De fato:

Substituindo a função na equação dada, temos:

$$\begin{aligned} (xe^x)'' - 2(xe^x)' + xe^x &= 0 \\ (e^x + e^x + xe^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x &= 0 \\ 2e^x + xe^x - 2e^x + 2xe^x + xe^x &= 0 \\ 2xe^x - 2xe^x &= 0 \\ 2xe^x &= 2xe^x \end{aligned}$$

Concluindo o que queriamos mostrar.

Exemplo 2.27. *A função* $y = 5tg5x$ *é uma solução explícita da equação diferencial ordinária* $y' = 25 + y^2$ *, pois a função* $y = f(x)$ *é escrita apenas em função da variável independente* x*.*

De fato, substituindo a função $y(x)$ na equação temos

$$
\begin{aligned}
(5tg5x)' &= 25 + (5tg5x)^2 \\
25sec^2 5x &= 25 + 25tg^2 5x \\
25(tg^2 5x + 1) &= 25 + 25tg^2 5x \\
25tg^2 5x + 25 &= 25 + 25tg^2 5x
\end{aligned}
$$

Concluindo o que queriamos mostrar.

Implícita

Definição 2.12. *Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma solução implícita de uma equação diferencial ordinária, em um intervalo I, se ela define uma ou mais soluções explícitas, que satisfaça a relação e a equação diferencial em I.*

Exemplo 2.28. *A relação*

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = 4$$

é uma solução da equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} \tag{2.3}$$

no intervalo $-5 < x < 5$.

De fato, fazendo $f(x, y) = 0$, temos que

$$\frac{d}{dx} f(x, y) = \frac{d}{dx}(0$$

Por derivação implícita, obtemos

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) &= \frac{d}{dx}(4) \\
2x + 2y\frac{dy}{dx} &= 0
\end{aligned}
$$

reescrevendo a equação em termos da derivada, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

que é a equação inícial dada. Ademais podemos obter da relação $f(x, y) = x^2 + y^2 = 4$, *duas soluções explícitas*

$$f(x) = \pm \sqrt{4 - x^2}$$

definidas no intervalo $-5 < x < 5$ *e que, satisfazem a relação e a equação diferencial dada.*

Observação 2.4. *Toda relação da forma* $x^2 + y^2 - c = 0$ *satisfaz a equação (2.3) formalmente para toda constante c. Porém, deve ser entendido que a relação tem que fazer sentido no conjunto de números reais.*

2.3.4 Classificação quanto ao número de Soluções

Quando estivermos resolvendo uma equação diferencial de ordem n $F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$, estaremos procurando uma **familia de soluções a** n **parâmetros** $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$. Isto significa que uma única equação diferencial tem um número infinito de soluções correspondentes ao número ilimitado de opções dos n parâmetros.

Em particular, se tivermos resolvendo uma uma equação diferencial de primeira ordem $F(x, y, y') = 0$, obteremos usualmente uma solução contendo uma única constante arbitrária ou um parâmetro c, isto é, uma solução contendo uma constate arbitrária representa um conjunto $G(x, y, c) = 0$ de soluções chamado **família de soluções a um parâmetro**.

Solução Geral

Definição 2.13. *Se toda solução de uma equação diferencial ordinária de ordem n* $F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0$ *em um intervalo I puder ser obtida de uma família a* n *parâmetro* $G(x, y, c_1, c_2, ..., c_n) = 0$ *por meio de uma escolha apropriada dos parâmetros* $c_i, i = 1, 2, ..., n$, *dizemos que a família é a solução geral da equação diferencial.*

Exemplo 2.29. *Para qualquer valor de* c, *a função* $y = \dfrac{c}{x} + 1$ *é solução da equação diferencial* $x\dfrac{dy}{dx} + y = 1$ *de primeira ordem no inervalo* $(0, \infty)$.

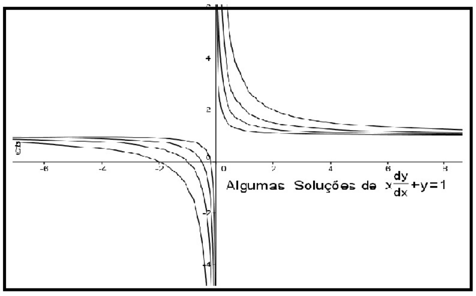
De fato

$$
\begin{aligned}
x\frac{d}{dx}(cx^{-1}+1)+y &= 1\\
x(-cx^{-2})+\frac{c}{x}+1 &= 1\\
x(\frac{-c}{x^2})+(\frac{c}{x}+1) &= 1\\
(\frac{-c}{x}) &= (\frac{c}{x})
\end{aligned}
$$

Assim, concluímos que $y=\dfrac{c}{x}+1$ *é realmente uma solução Geral da equação diferencial dada e mais, que variando o parâmetro c, podemos gerar uma infinidade de soluções ou família de soluções a um parâmetro c.*

Observação 2.5. *A função* $y=\dfrac{c}{x}+1$ *é uma solução da equação diferencial em qualquer inetrvalo que não contenha a origem.*

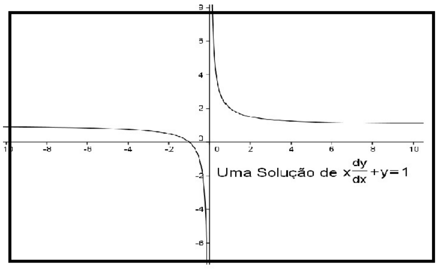
Veja a figura abaixo obtida com a ajuda de um software matemático, ela mostra os gráficos de algumas das soluções nessa família.



Solução Particular

Definição 2.14. *Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários é chamada de* **solução particular**

No exemplo anterior vimos que a função $y=\dfrac{c}{x}+1$ é uma família de solução a um parâmetro c, então se atribuírmos valores para a constante arbitrária c estaremos construindo soluções particulares, ou seja; a função $y=\dfrac{1}{x}+1$ é uma solução particular correspondente a $c=1$ da equação diferencial $x\dfrac{dy}{dx}+y=1$. Veja o gráfico que descreve esta solução particular.



Exemplo 2.30. *A função* $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$ *é uma solução particular para a equação diferencial ordinária* $\frac{dy^2}{dx^2}$ - $4\frac{dy}{dx}$ + $4y = 0$ *no intervalo* (-∞, ∞)*, pois não depende de constante arbitrária ou um parâmetro.*

De fato

Resolvendo a equação diferencial

$$\frac{d}{dx^2}(e^{2x} + xe^{2x}) \text{ - } 4\frac{d}{dx}(e^{2x} + xe^{2x}) + 4(e^{2x} + xe^{2x}) = 0 \tag{2.4}$$

Calculando a primeira e segunda derivada de $y(x)$ *temos:*

$$\begin{aligned} y(x)' &= 3e^{2x} + 2xe^{2x} \\ y(x)'' &= 8e^{2x} + 4xe^{2x}. \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.4) temos:

$$\begin{aligned} 8e^{2x} + 4xe^{2x} - 4(3e^{2x} + 2xe^{2x}) + 4(e^{2x} + xe^{2x}) &= 0 \\ 8e^{2x} + 4xe^{2x} - 12e^{2x} - 8xe^{2x} + 4e^{2x} + 4xe^{2x} &= 0 \end{aligned}$$

portanto a função $y(x) = e^{2x} + xe^{2x}$ *é uma solução particular da equação diferencial dada.*

Solução Singular

Definição 2.15. *Quando uma equação diferencial possuir uma solução que não pode ser obtida atribuindo valores particulares aos parâmentros na família de slučões, esta solução é chamada de* **solução singular**

Exemplo 2.31. *A função* $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$ *é uma solução geral da equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$*. Segue que, quando* $c = 0$*, a solução paricular obtida é* $y(x) = \frac{1}{16}x^4$*. Mas observe que,* $y(x) = 0$ *é uma sulução singular, pois não pertence a família de soluções dada por* $y(x) = \left(\frac{1}{4}x^2 + c\right)^2$*, uma vez que não é possivel obter* $y(x) = 0$ *atribuindo valores a constante c.*

Capítulo 3

Alguns Métodos de Resoluções

Apartir de agora apresentaremos alguns metódos de resolução de equação diferencial ordinária conforme a sua estrutura e nosso objetivo se traduz em defir formalmente cada um dos metódos, afim de torna-los precisos quanto ao conceito e técnicas usadas de forma intuitiva. Mas isso não exclui a utilização heurística para resolver os exemplos, uma vez exposto a sua verdadeira intenção.

3.1 Variáveis Separáveis

Definição 3.1. *Equações diferenciais de primeira ordem que possam ser colocadas na forma*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}, \quad g(y) \neq 0, \tag{3.1}$$

na qual $f :\longrightarrow R$ *e* $g :\longrightarrow R$, *em que* I *e* J *são intervalos abertos, são chamadas equações separáveis ou equações a variáveis separáveis.*

Exemplo 3.1. *Suponhamos que* $y(x) = y$ *seja uma solução da equação (3.1) e seja* $G(y)$ *uma primitiva de* $g(y)$, *isto é,* $G'(y) = g(y)$. *Como* y *é uma função de* x, *segue-se que, usando a regra da cadeia,*

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = G'(y(x))\frac{dy}{dx}$$

do fato de $G'(y(x)) = g(y)$ *temos*

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = g(y)\frac{dy}{dx}$$

da equação (3.1) tem-se

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

segue que

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = f(x)$$

a qual integrando em relação a x resulta em uma solução na forma explicíta.

$$G(y(x)) = \int f(x)dx.$$

Observação 3.1. *Para que tenhamos uma solução explícita a hipótese de que $y = Y(x)$ deve ser uma solução da equação (3.1). Porém, nada foi dito sobre a existência de solução para tal problema.*

Usando a mesma técnica, vamos resolver um problema específico.

Exemplo 3.2. *Determinemos uma curva no plano xy que contenha o ponto $(0, 3)$ e cuja reta tangente em cada um de seus pontos (x, y) possua inclinação $\frac{2x}{y^2}$.*

Sabe-se que a inclinaçõ da reta tangente a uma curva é $y = y(x)$ é a derivda $y'(x)$. Assim,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{y^2}$$

da equação, temos $f(x) = 2x$ e $g(y) = y^2$, pois é uma equação a variável sepáravel. colocando-a na forma

$$y^2\frac{dy}{dx} = 2x.$$

Uma primitiva de $g(x) = y^2$ é $G(y) = \frac{y^3}{3}$, então

$$\frac{d}{dx}(\frac{y^3}{3}) = y^2\frac{dy}{dx}$$

do fato que

$$y^2\frac{dy}{dx} = 2x.$$

temos

$$\frac{d}{dx}(\frac{y^3}{3}) = 2x$$

integrando com relação a x resulta a solução geral implícita

$$\frac{y^3}{3} = x^2 + C. \tag{3.2}$$

Mas o problema nos pede que, dentre todas as curvas representadas pela família de equações em (3.2), determinemos aquela que passa pelo ponto $(0, 3)$.

Assim, quando $x = 0$, deve-se terb $y = 3$, de modo que

$$\frac{3^3}{3} = 0^2 + C$$

onde $C = 9$ e a curva procurada é

$$y^3 = 3x^2 + 27 \tag{3.3}$$

Exemplo 3.3. *Seja a equação diferencial*

$$(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$$

Note que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2} \implies \frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}$$

onde $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ e $g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ assim temos uma equação a variável sepáravel.

segue que

$$\left(\frac{1}{1+y^2}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$$

uma primitiva de $f(y) = \dfrac{1}{1+y^2}$ é $F(y) = arctgy$.
Então

$$\frac{d}{dx}(arctgy) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Integrando os membros

$$arctgy = \int \frac{1}{1+x^2}dx \implies arctgy = arctgx + c$$

o que resulta

$$y(x) = tg(arctgx + c) \implies y(x) = \frac{tg(arctgx) + tgc}{1 - tg(arctgx)tgc}$$

logo,

$$y(x) = \frac{x + tgc}{1 - xtgc}.$$

Fazendo $tgc = C$*, obtemos uma solução geral explicita da equação a variável sepáravel*

$$y(x) = \frac{x + C}{1 - Cx}$$

Exemplo 3.4. *Seja a equação diferencial*

$$(cosy)(senx)\frac{dy}{dx} = (seny)(cosx)$$

equivalentemente temos

$$\left(\frac{cosy}{seny}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{cosx}{senx} \implies (cotgy)\frac{dy}{dx} = cotgx$$

onde $f(x) = \frac{cosx}{senx}$ *ou* $cotgx$ *e* $f(y) = \frac{cosy}{seny}$ *ou* $cotgy$ *assim temos uma equação a variável sepáravel.*

Uma primitiva ou integral indefinida de $f(y) = cotgy$ *é* $F(y) = ln(seny)$ *então*

$$\frac{d}{dx}(ln(seny)) = cotgx.$$

Integrando ambos os membros, obtemos

$$\begin{aligned} ln(seny) &= ln(senx) + c \\ e^{ln(seny)} &= e^{(ln(senx)+c)} \\ seny &= c_1(senx), \quad onde \quad c_1 = e^c. \end{aligned}$$

Assim temos uma solução geral explicita da equação diferencial ordinária

$$y = arcsen(c_1 senx)$$

Agora resoveremos as equações utilizando o argumento heurístico dos usuários da matemática

Exemplo 3.5. *Seja a equação*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+1}{x}$$

reescrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \implies \frac{1}{y+1}dy = \frac{1}{x}dx$$

onde $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *e* $g(y) = \dfrac{1}{y+1}$.

Assim temos uma equação a variável separável. E integrando em ambos os membros

$$\int \frac{1}{y+1}dy = \int \frac{1}{x}dx$$
$$ln|y+1| = lnx + c$$
$$e^{ln|y+1|} = e^{lnx + c}$$
$$|y+1| = x \cdot e^{c}$$

fazendo $e^c = c_1$ *temos*

$$y = \pm (xc_1 - 1)$$

que é uma solução geral dada explicitamente da equação diferencial.

Exemplo 3.6. *Seja a equação diferencial ordinária*

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = 0$$

reescrevendo a equação na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} \implies f(y)dy = g(x)dx \implies \frac{1}{y}dy = \text{-}2xdx$$

onde $f(y) = \dfrac{1}{y}$ *e* $g(x) = -2x$. *Assim temos uma equação a variável separável, e integrando em ambos os membros temos*

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{y}dy &= \int -2xdx \\
ln|y| &= -x^2 + c \\
e^{ln|y|} &= e^{-x^2+c} \\
|y| &= e^{-x^2} \cdot e^c \\
y &= \pm(c_1 \cdot e^{-x^2}), \quad ondec_1 = e^c
\end{aligned}$$

3.2 Equações Homogêneas

Para que definamos formalmente uma equação diferencial homogênea precisamos difinir antes uma função homegênea, e só depois então mostraremos os metódos de resoluções destas equações.

Definição 3.2. *Função Homogênea*
Uma função f é dita homogênea de grau n se ocorrer que

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

Exemplo 3.7. *Seja a função*

$$f(x, y) = x^3 + x^2 y,$$

temos que

$$f(tx, ty) = (tx)^3 + (tx)^2 (ty) \implies f(tx, ty) = t^3 x^3 + t^2 x^2 ty$$

$$f(tx, ty) = t^3 x^3 + t^3 x^2 y \implies f(tx, ty) = t^3 x^3 + t^3 x^2 y$$

$$f(tx, ty) = t^3 (x^3 + x^2 y) \implies f(tx, ty) = t^3 f(x, y)$$

portanto a função f(x, y) é uma função homogênea de grau 3.

Exemplo 3.8. *Seja a função*

$$f(x, y) = \frac{x}{2y} + 4$$

temos que

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{2ty} + 4 \implies f(tx, ty) = \frac{x}{2y} + 4 = t^0 f(x, y)$$

portanto a função e homogênea de grau zero.

Observação 3.2. *Se $f(x, y)$ for uma função homogênea de grau n, poderemos escrever*

$$f(x, y) = x^n f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad e \quad f(x, y) = y^n f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

em que $f\left(1, \frac{y}{x}\right) \quad e \quad f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$ são ambas homogêneaa de grau zero.

Definição 3.3. *Equação Homogênea*

Uma equação diferencial da forma

$$M(x,y)dx \ +N(x,y)dy \ = \ 0 \quad ou \quad \frac{dy}{dx} \ = \ \frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

é chamada de homogênea se ambos os coeficientes M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Metódo de Resolução das Equações Diferenciais Homogêneas

Seja a equação homogênea

$$\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{M(x,y)}{N(x,y)} \tag{3.4}$$

da propriedade de homogeneidade temos que o quociente $\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$ pode ser reescrito como

$$\frac{M(x,y)}{N(x,y)} \ = \ \frac{M(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})}{N(x\cdot 1, x\cdot \frac{y}{x})} \ = \ \frac{x^n}{x^n}\cdot\frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})} \ = \ \frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}$$

reescrevendo a equação (3.4) temos

$$\frac{dy}{dx} \ = \ \frac{M(1,\frac{y}{x})}{N(1,\frac{y}{x})}. \tag{3.5}$$

Fazendo $u = \frac{y}{x} \implies y = xu$ o que resulta

$$\frac{dy}{dx} \ = \ u \ + \ x\frac{du}{dx}$$

substituindo na equação (3.5) temos

$$u \ + \ x\frac{du}{dx} \ = \ \frac{M(1,u)}{N(1,u)}$$

arrumando a equação, temos temos uma equação a variável separável

$$\frac{du}{dx} \ = \ \frac{\dfrac{M(1,u)}{N(1,u)} - u}{x} \quad \implies \quad \frac{N(1,u)du}{M(1,u)+uN(1,u)} \ = \ \frac{dx}{x}.$$

Apartir de então, para resolver a equação diferencial a variável separável faremos o mesmo processo ja estudado e ao final da solução usamos a relação $y = ux$ para fazer a substituição e encontrar o valor de y.

Exemplo 3.9. *Seja a equação*

$$xydx \ + \ (x^2+y^2)dy \ = \ 0.$$

Note que a equação é homogênea de grau 2, assim vamos escrevê-la como

$$\frac{dy}{dx} \ = \ -\frac{xy}{x^2+y^2} \tag{3.6}$$

fazendo $y \ = \ xu$ *e substituindo na equação (3.6) obtemos*

$$\frac{d}{dx}(xu) \ = \ -\frac{x^2u}{x^2+x^2u^2}$$

$$u \ + \ x\frac{du}{dx} \ = \ -\frac{x^2}{x^2}\left(\frac{u}{1+u^2}\right)$$

$$x\frac{du}{dx} \ = \ -\frac{u}{1+u^2}-u$$

$$x\frac{du}{dx} \ = \ -\frac{u(2+u^2)}{1+u^2}.$$

Note que chegamos em uma equação a variável separável, então

$$\frac{dx}{x} \ + \ \frac{1+u^2}{u(2+u^2)}du \ = \ 0.$$

Integrando em ambos os lados obtemos

$$ln|x| \ + \ \int\frac{1+u^2}{u(2+u^2)}du \ = \ c.$$

Para resolver a integral, utilizaremos as frações parciais do tipo

$$\frac{mx^2+nx+p}{(x-\alpha)(ax^2+bx+c)}dx \ = \ \frac{A}{x-\alpha} \ + \ \frac{Bx+C}{ax^2+bx+c}$$

onde ax^2+bx+c *não admite raiz real, isto é* $\Delta \ < \ 0$

$$\frac{1+u^2}{u(2+u^2)} \ = \ \frac{A}{u} \ + \ \frac{Bu+C}{u^2+2} \ = \ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\right) \ + \ \frac{1}{2}\left(\frac{u}{u^2+2}\right)$$

pois $A=1/2, \ \ B=1/2 \ \ e \ \ C= \ \ 0$ *e portanto a integral fica*

$$\int\left[\frac{1+u^2}{u(2+u^2)}\right]du \ = \ \frac{1}{2}\int\frac{1}{u}du \ + \ \frac{1}{2}\int\frac{u}{u^2+2}du$$

agora usaremos uma mudança de variavel na integral da direita e obteremos

$$\int \left[\frac{1+u^2}{u(2+u^2)}\right] du \;=\; \frac{1}{2} ln|u| \;+\; \frac{1}{4} ln(u^2+2).$$

Assim resulta que

$$ln|x| \;+\; \frac{1}{2} ln|u| \;+\; \frac{1}{4} ln(u^2+2) \;=\; c_o$$

chamando $c_0 = ln|c_1|$ *e fazendo simplificações convenientemente, obtemos*

$$ln\left[u^2(u^2+2)\right] \;=\; ln\left(\frac{c_1}{x}\right)^4 \quad ou \quad u^2(u^2+2) \;=\; \left(\frac{c_1}{x}\right)^4$$

sabendo que $u = \dfrac{y}{x}$ *e fazendo as devidas simplificações a solução geral do problema é*

$$y^4 \;+\; 2x^2y^2 \;=\; c_1^4.$$

Exemplo 3.10. *Seja a equação*

$$\frac{dy}{dx} \;=\; \frac{2x^2+y^2}{2xy+3y^2} \tag{3.7}$$

note que o quociente são funções homogeneas de grau 2.

Fazendo $y = ux$*, obtemos* $\dfrac{dy}{dx} \;=\; u + x\dfrac{du}{dx}$ *e substituindo na equação (3.7) temos*

$$u + x\frac{du}{dx} \quad - \frac{2x^2+u^2x^2}{2x(ux)+3(ux)^2} \;=\;=\; -\frac{x^2(2+u^2)}{x^2(2u+3u^2)} \;=\frac{2+u^2}{2u+3u^2}$$

$$x\frac{du}{dx} \;=-\left[\frac{2+u^2}{2u+3u^2}+u\right]$$

$$x\frac{du}{dx} \;=\; -\frac{2+3u^2+3u^3}{2u+3u^2}$$

que é uma equação a variável sepáravel, então separando as variáveis

$$\int \frac{2u+3u^2}{2+3u^2+3u^3}du \;=\; \int -\frac{1}{x}dx$$

e integrando em ambos os membros temos

$$\frac{1}{3}ln|2+3u^2+3u^2| = -ln|x| + lnK$$

Após as devidas simplificações, a solução geral do problem é

$$2x^3+3xy^2+3y^3+C=0$$

3.3 Equações Exatas

Antes de definirmos uma equação diferencial exata precisamos de alguns conceitos preliminares, vejamos a seguir.

Definição 3.4. *Seja f uma função de duas variáveis reais, de forma que f tenha as derivadas parciais primeiras contínuas. A diferencial total (df) da função é definida por*

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy \tag{3.8}$$

Exemplo 3.11. *Considere a função contínua*

$$f(x,y) = x^2y + 3y^3x,$$

calculando suas derivadas parciais temos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 2xy + 3y^3 \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2 + 9y^2x$$

logo a diferencial total é

$$df(x,y) = (2xy + 3y^3)dx + (x^2 + 9y^2x)dy$$

Definição 3.5. *A expressão*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

é chamada uma diferencial exata se existe uma função f(x, y) tal que se verifique

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y).$$

Assim, se a expressão $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ *for uma diferencial exata, a equação diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é chamada uma equação diferencial exata.

O seguinte teorema nos permite saber quando uma diferencial e uma equação diferencial são exatas e sua demostração nos fornece o método de resolução de uma equação diferencial exata.

Teorema 3.1. *A equação diferencial*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é exata se , e somente se, a igualdade for verdadeira

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Demonstração:

Assumiremos por hipótese que a equação diferencial

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

é exata, isso nos garante que existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

E segue desse resultado que

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \qquad e \qquad \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

do fato da ordem das derivadas poder ser invertida, isto é

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$$

temos,

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x},$$

logo provamos a primeira parte do teorema.

Agora provaremos a segunda parte, ou seja, teremos que provar que existe uma função $f(x,y)$ tal que,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

de forma que a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ seja exata. Assim consideremos por hipótese que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

e assumindo a expressão verdadeira

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y)$$

integramos com relação a x, sendo y considerado como uma constante obtemos e o termo $\varphi(y)$ empregado apenas para obter a solução mais geral possível para $f(x,y)$, obtemos

$$f(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \varphi(y). \tag{3.9}$$

Agora, diferenciando com relação a y temos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\varphi(y)}{dy},$$

segue que assumindo também

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y),$$

temos,

$$N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\partial x + \frac{d\varphi(y)}{dy}$$

a qual reorganizando e integrando em função de $\varphi(y)$

$$\frac{d\varphi(y)}{dy} = N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x$$

$$\varphi(y) = \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right] dy$$

substituindo o valor de $\varphi(y)$ na equação (3.9) obtemos

$$f(x,y) = \int M(x,y)\partial x + \int \left[N(x,y) - \int \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}\partial x\right] dy \tag{3.10}$$

que é uma função $f(x,y)$ sujeita às condições

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

assim como também temos

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

portanto a equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ é exata.

Exemplo 3.12. *Seja a equação diferencial*

$$x^2y^3dx \ + \ x^3y^2dy \ = \ 0$$

Solução

1º passo : verificar se a equação diferencial é exata.

Pelo teorema a equação diferencial é exata se, e somente se a igualdade for vedadeira

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

segue da equação que

$$M(x,y) = x^2y^3 \qquad e \qquad N(x,y) = x^3y^2.$$

Calculando as derivadas parciais de M e N com relação a y e x respectivamente, temos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 3x^2y^2 \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^2$$

note que as derivadas parciais de M e N são iguais, logo a equação diferencial é exata.

2º passo: segue do fato da equação ser exata, as seguintes igualdades

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = x^2y^3 \quad (\mathbf{I}) \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x^3y^2 \quad (\mathbf{II})$$

integrando parcialmente **(I)** *com relação a x temos*

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \int M(x,y)\partial x + g(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}\int f(x,y) &= g(y) + \int x^2y^3\partial x \end{aligned}$$

$$f(x,y) = g(y) + \frac{x^3y^3}{3} \qquad (\mathbf{III})$$

segue de **(II)** *que*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = x^3y^2 \tag{3.11}$$

derivando parcialmente **(III)** *em relação a y temos*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g'(y) + \left(\frac{x^3y^3}{3}\right)'.$$

Substituindo em (3.11) temos

$$\begin{aligned} g'(y) + \left(\frac{x^3y^3}{3}\right)' &= x^3y^2 \\ g'(y) + x^3y^2 &= x^3y^2 \end{aligned}$$

integrando $g'(y) = 0$, *resulta* $g(y) = c_0$. *Logo temos*

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{3} + c_0.$$

Como a solução da equação diferencial é dada da forma $f(x,y) = c$, *temos então que*

$$\frac{x^3y^3}{3} = c$$

é uma família a um parâmetro de soluções da equação diferencial dada.

Exemplo 3.13. *Seja a equação diferencial*

$$(seny - ysenx)dx + (cosx + xcosy)dy = 0$$

Solução

1º passo : verificar se a equação diferencial é exata.

Pelo teorema a equação diferencial é exata se, e somente se a igualdade for vedadeira

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

segue da equação que

$$M(x,y) = seny - ysenx \qquad e \qquad N(x,y) = cosx + xcosy.$$

Calculando as derivadas parciais de M *e* N *com relação a* y *e* x *respectivamente, temos*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = cosy - senx \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = cosy - senx.$$

Note que as derivadas parciais de M *e* N *são iguais, logo a equação diferencial é exata.*

2º passo: segue do fato da equação ser exata, as seguintes igualdades

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = seny - ysenx \quad \textbf{(I)} \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = cosx + xcosy - y \quad \textbf{(II)}$$

integrando parcialmente **(I)** *com relação a* x

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int M(x,y)\partial x$$

$$\int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \int (seny - ysenx)\partial x$$

temos

$$f(x,y) = ycosx + g(y) \qquad \textbf{(III)}$$

segue de **(II)** *que*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = cosx + xcosy - y \tag{3.12}$$

derivando parcialmente **(III)** *em relação a y*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g'(y) + \frac{d}{dy}(ycosx)$$

temos,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = g'(y) + cosx.$$

Substituindo em (3.12) temos

$$\begin{aligned} g'(y) + cosx &= cosx + xcosy - y \\ g'(y) &= xcosy - y \end{aligned}$$

integrando em relação a y temos

$$g(y) = xseny - \frac{y^2}{2}$$

logo substituindo em **(III)** *temos*

$$f(x,y) = ycosx + xseny - \frac{y^2}{2} + c_0$$

como a solução da equação diferencial é dada da forma $f(x,y) = c$, temos então que

$$ycosx + xseny - \frac{y^2}{2} = c$$

é uma família a um parâmetro de soluções.

3.4 Equações Lineares

Uma equação diferencial ordinária linear de ordem n tem a seguinte forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

Exemplo: No capitulo (2), definimos que linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Segue que quando $n = 1$ obtemos uma equação linear de primeira ordem.

Definição 3.6. *Uma equação diferencial da forma*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \tag{3.13}$$

é chamada de equação linear.

Quando dividimos a equação diferencial linear (3.13) por $a_1(x)$ obtemos uma forma mais útil de uma equação linear, a forma padrão.

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3.14}$$

Assim procuramos uma solução para (3.14) em um intervalo I no qual as funções $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas.

Exemplo 3.14. *Considere a equação diferencial*

$$x^2\frac{dy}{dx} + (x^4 - 2x + 1)y = \frac{1}{x}$$

note que se dividirmos por x^2 a equação obtemos

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{x^4 - 2x + 1}{x^2}\right)y = \frac{1}{x^3}$$

que é uma equação linear na forma padrão (3.14), em que os coeficientes são funções de x somente e y e sua derivada é de grau 1.

Usando diferenciais, podemos escrever a equação (3.14) como

$$dy + [P(x)y - Q(x)]dx = 0 \tag{3.15}$$

que é uma equação do tipo $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, onde $M = P(x)y - Q(x)$ e $N = 1$. Note que esta equação não é exata, a não ser que $P(x) = 0$, pois temos que $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

No entanto, se utilizamos um fator integrante, ela transforma-se em uma equação diferencial exata.

Fator de Integração

Definição 3.7. *Um fator de integração $\mu(x, y)$ é uma função que, multiplicada pela equação diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

a transforma em uma equação diferencial exata, ou seja, na equação

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{3.16}$$

Exemplo 3.15. *Considere a equação diferencial*

$$ydx + 2xdy = 0.$$

Perceba que ela não é exata, pois $\dfrac{\partial M}{\partial y} \neq \dfrac{\partial N}{\partial x}$, entretanto, se multiplicarmos esta equação por y, teremos

$$y^2dx + 2xydy = 0$$

logo teremos

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

e assim a equação diferencial tornou-se uma equação exata, em que $\mu(x, y) = y$ é seu fator integrante.

Método de Resolução para uma Equação Linear de primeira Ordem

Se utilizarmos fatores integrantes, poderemos resolver a equação diferencial linear $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ através do seguinte teorema:

Teorema 3.2. *A equação diferencial linear*

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

tem um fator integrante na forma

$$\mu(x, y) = e^{\int P(x)}dx$$

e sua solução é dada por

$$y(x) = e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right] \tag{3.17}$$

Demonstração: *Considere a equação diferencial não exata*

$$dy + [P(x)y - Q(x)]dx = 0$$

multilicando-a por um fator integrante $\mu(x)$ *temos*

$$[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)]\, dx + \mu(x)dy = 0$$

que é uma equação diferencial exata, e assim

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\mu(x)P(x)y - \mu(x)Q(x)\right] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x)]$$

que resulta em

$$\mu P(x) = \frac{d\mu}{dx}$$

que é uma equação separável

$$P(x)dx = \frac{d\mu}{\mu}.$$

Logo, integrando-a temos

$$\begin{aligned} ln|\mu| &= \int P(x)dx \\ \mu(x) &= e^{\int P(x)dx} \end{aligned}$$

que é o fator integrante.

Agora multiplicamos a equação diferencial linear $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ *pelo fator integrante, isto é,*

$$e^{\int P(x)dx}\frac{dy}{dx} + e^{\int P(x)dx}P(x)y = e^{\int P(x)dx}Q(x)$$

note que o lado esquerdo da equação é a regra do produto, logo temos a derivada do produto do fator integração e a variável independente y

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right] &= e^{\int P(x)dx}Q(x) \\ d\left[e^{\int P(x)dx}y\right] &= e^{\int P(x)dx}Q(x)dx \end{aligned}$$

integrando em ambos os lados temos

$$\begin{aligned} \int d\left[e^{\int P(x)dx}y\right] &= \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx \\ e^{\int P(x)dx}y &= \int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c \\ y &= e^{-\int P(x)dx}\left[\int e^{\int P(x)dx}Q(x)dx + c\right] \end{aligned}$$

Exemplo 3.16. *Considere a equação*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3}{x}y = 6x^2$$

***Resolução**:*

***1º passo**: Colocar a equação na forma padrão. Note que ela é linear e já estar na forma padrão.*

***2º passo**: Identifique $P(x)$ na forma padrão e então encontre o fator integrante.*

Nesta equação, $P(x) = \frac{3}{x}$, logo temos que o fator integrante é:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{(3ln|x|)} \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = e^{x^3}$$

***3º passo**: Multiplique a forma padrão da equação pelo fator integrante. Isso resulta automaticamente que o lado esquerdo da equação é a derivada do produto do fator integrante por y, ou seja $\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]$.*

Mutiplicando a equação por x^3, temos

$$x^3\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^5.$$

Note que o lado esquerdo é a derivada do produto de x^3 por y, logo temos

$$\frac{d}{dx}(x^3y) = 6x^5$$

$$d(x^3y) = 6x^5dx.$$

***4º passo**: Integre ambos os lados dessa última equação.*

Integrando em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned} \int d(x^3y) &= \int 6x^5dx \\ x^3y &= x^6 + c \end{aligned}$$

e por fim temos uma solução geral para a equação diferencial linear de primeira ordem

$$y = \frac{x^6 + c}{x^3} \quad ou \quad y = x^3 + \frac{c}{x^3}$$

Exemplo 3.17. *Considere a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1}{1+x^2}$$

***Resolução**:*

***1º passo**: Colocar a equação na forma padrão. Note que ela é linear e já estar na forma padrão.*

***2º passo**: Identifique $P(x)$ na forma padrão e então encontre o fator integrante.*

Nesta equação, $P(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$, *logo temos que o fator integrante é:*

$$\mu(x) = e^{\displaystyle\int \frac{2x}{1+x^2}dx} = e^{\left(ln(1+x^2)\right)} \quad \Longrightarrow \quad \mu(x) = 1 + x^2$$

***3º passo**: Multiplique a forma padrão da equação pelo fator integrante. Isso resulta automaticamente que o lado esquerdo da equação é a derivada do produto do fator integrante por y, ou seja* $\dfrac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]$.

Mutiplicando a equação por $1 + x^2$, temos

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx} + (1+x^2)\frac{2x}{1+x^2}y = (1+x^2)\frac{1}{1+x^2}.$$

Note que o lado esquerdo é a derivada do produto de x^3 por y, logo temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[(1+x^2)y] &= 1\\ d[(1+x^2)y] &= dx\end{aligned}$$

***4º passo**: Integre ambos os lados dessa última equação.*

Integrando em ambos os lados, temos

$$\begin{aligned}\int d[(1+x^2)y] &= \int dx\\ (1+x^2)y &= x + c.\\ y + x^2y &= x + c\end{aligned}$$

$$y = \frac{x+c}{1+x^2}$$

que é a solução geral para a equação diferencial linear de primeira ordem.

Capítulo 4

Problema de Valor Inícial

Após os estudos de resolução das equações diferencias ordinárias por meio de técnicas e métodos de resoluções, resolveremos um tipo de equação diferencial sujeita a determinadas condições prescritas, condições estas que são impostas à solução desconhecida $y(x) = y$ e suas derivadas, a qual chamamos de problema de **Problema de Valor inicial (PVI)**.

Problema de Valor Inicial de Ordem n

Definição 4.1. *Um sistema formado por:*
i) Uma equação diferencial Ordinária de ordem n.
ii) com n condições complementres, em um mesmo valor da variável indepedente, a cada função incógnita e suas deivadas é chamado de **valor inicial de ordem n**.

Ou seja, em algum intervalo I contendo x_0, o problema

$$\begin{aligned} Resolver : \frac{d^n}{dx^n} &= f(x, y, y', .., y^{n-1}) \\ Sujeita\ a : y(x_0) &= y_0, y'(x_0) = y_1, ...y^{n-1}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned}$$

onde $y_0, y_1, ...y_{n-1}$ são constantes reais especificadas, é chamado de **problema de valor inicial (PVI)**. *Os vlores de $y(x)$ e suas $n-1$ derivadas em um único ponto $x_0 : y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, ..., y^{n-1}(x_0) = y_{n-1}$, são chamados de condições inícias.*

Em prticular, quando queremos resolver um problema de valor inícial de uma EDO de primeira ordem, geométricamente podemos interpretar que estamos procurando uma solução da EDO no intervalo I que contenha x_0 de tal modo que a curva integral passe pelo ponto (x_0, y_0) prescrito.

Exemplo 4.1.

$$
\begin{aligned}
Resolver : \frac{dy}{dx} &= f(x,y) \\
Sujeita\ \ a : y(x_0) &= y_0
\end{aligned}
$$

Exemplo 4.2. *considere o problema de valor inicial dado pela equação diferencial ordinária*

$$
\begin{cases}
y' = (1-2x)y^2 \\
y(0) = -\dfrac{1}{6}
\end{cases}
$$

reescrevendo a equação diferencial temos

$$\frac{dy}{dx} = (1-2x)y^2.$$

Equivalentemente

$$\frac{1}{y^2}dy = (1-2x)dx,$$

integrando em ambos os membros

$$
\begin{aligned}
\int \frac{1}{y^2} &= \int (1-2x)dx \\
-\frac{1}{y} &= x - x^2 + c \\
y^{-1} &= x^2 - x - c
\end{aligned}
$$

assim chegamos em uma solução geral inversa, mas foi dado um ponto $(0, -1/6)$, *e portanto uma solução para este poblema deve satisfazer a condição inícial, ou seja a solução deve passar pelo ponto* $(0, -1/6)$.

$$y(0)^{-1} = -c \implies \left(-\frac{1}{6}\right)^{-1} = -c \implies c = 6$$

segue que

$$y(x) = x^2 \ - x \ - 6$$

portanto uma solução que satisfaz a condição prescrita ou uma solução particular da equação diferencial é a solução do problema de valor inícial.

Exemplo 4.3. *Considere o seguinte problema de valor inícial dado pela equação diferencial ordinária.*

$$\begin{cases} x\dfrac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2+y^2} \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

reescrevendo a equação diferencial temos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \tag{4.1}$$

onde

$$M(x,y) = \frac{y+\sqrt{x^2+y^2}}{x} \qquad e \qquad N(x,y) = x$$

assim, calculando

$$M(tx,ty) = ty+\sqrt{t^2x^2+t^2y^2} = t(y+\sqrt{x^2+y^2}) \qquad e \qquad N(tx,ty) = tx$$

temos que as funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são homogêneas de grau 1.

Fazendo $y = ux$, obtemos $\dfrac{dy}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$ e substituindo na equação (4.1) temos

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{xu+\sqrt{x^2+x^2u^2}}{x}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{1+u^2}$$

que é uma equação a variável sepáravel, então integrando em ambos os membros

$$\int \frac{1}{u+\sqrt{1+u^2}}du = \int \frac{1}{x}dx,$$

temos,

$$ln(u+\sqrt{1+u^2}) = ln|x| + ln|c_0|, \qquad x > 0$$

Após as devidas simplificações, a solução geral do problema é

$$u+\sqrt{1+u^2} = xc_0.$$

Agora fazendo $u = \frac{y}{x}$, voltamos a trabalhar com as variáveis x e y

$$\frac{y}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = xc_0$$

segue da condição inícial dada que $x = 1$ e $y = 0$, assim temos que

$$\frac{0}{1} + \sqrt{1+\left(\frac{0}{1}\right)^2} = 1c_0 \implies c_0 = 1.$$

Portanto

$$\frac{y}{x} + \frac{x^2+y^2}{x^2} = x$$

ou fazendo simplificações convenientemente temos

$$\begin{aligned} y + \sqrt{x^2+y^2} &= x^2 \\ \sqrt{x^2+y^2} &= x^2 - y \\ x^2+y^2 &= x^4 - 2x^2y + y^2 \\ 1 &= x^2 - 2y \\ y &= \frac{x^2-1}{2} \end{aligned}$$

é a solução para o broblema de de valor nícial

Exemplo 4.4. *considere o problema de valor inícial dado pela equação diferencial ordinária*

$$\begin{cases} 1 \;+\; ye^{xy} \;+\; (2y + xe^{xy})\dfrac{dy}{dx} \;=\; 0 \\ y(0) \;=\; 1 \end{cases}$$

reescrevendo a equação diferencial temos

$$(1 + ye^{xy})dx + (2y + xe^{xy})dy = 0$$

Solução

1º passo*: verificar se a equação diferencial é exata.*

Pelo teorema a equação diferencial é exata se, e somente se a igualdade for verdadeira

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}.$$

Segue da equação que

$$M(x,y) = 1 + ye^{xy} \qquad e \qquad N(x,y) = 2y + xe^{xy}.$$

Calculando as derivadas parciais de M e N com relação a y e x respectivamente, temos

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = yxe^{xy} \qquad e \qquad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = yxe^{xy}.$$

Note que as derivadas parciais de M e N são iguais, logo a equação diferencial é exata.

2º passo*: segue do fato da equação ser exata, que*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = M(x,y) = 1 + ye^{xy} \quad \textbf{(I)} \qquad e \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y + xe^{xy} \quad \textbf{(II)}$$

integrando parcialmente **(I)** *com relação a x temos*

$$\begin{aligned} \int \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \int M(x,y)\partial x + g(y) \\ \frac{\partial}{\partial x}\int f(x,y) &= g(y)\int (1+ye^{xy})\partial x \end{aligned}$$

$$f(x,y) = g(y) + x + e^{xy}. \qquad \textbf{(III)}$$

Segue de **(II)** *que*

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = N(x,y) = 2y + xe^{xy}. \tag{4.2}$$

Derivando parcialmente **(III)** *em relação a y temos*

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= g'(y) + \frac{d}{dy}(x+e^{xy}) \\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= g'(y) + xe^{xy} \end{aligned}$$

Substituindo em (4.2) temos

$$\begin{aligned} g'(y) + xe^{xy} &= 2y + xe^{xy} \\ g'(y) &= 2y + xe^{xy} - xe^{xy} \\ g'(y) &= 2y. \end{aligned}$$

Integrando $g'(y) = 2y$, *resulta* $g(y) = y^2 + c_0$. *Logo temos*

$$f(x,y) = x + e^{xy} + y^2 + c_0$$

e como a solução da equação diferencial é dada da forma $f(x,y) = c$, temos então que

$$x + e^{xy} + y^2 = c, \qquad \textit{onde} \quad c_0 = c$$

é uma família a um parâmetro de soluções da equação diferêncial dada. E segue da condição inícial dada que quando $x = 0$ *e* $y = 1$, *temos* $c = 2$, *logo*

$$x + e^{xy} + y^2 = 2,$$

é a solução para o problema de valor ínicial.

Exemplo 4.5. *considere o problema de valor inícial dado pela equação diferencial ordinária de primeira ordem*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + y &= x \\ y(0) &= 4 \end{cases}$$

Solução: *Note que a equação diferencial é linear.*

1º passo: *Colocar a equação na forma padrão, ou seja* $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$. *Perceba que a equação já estar na forma padrão.*

2º passo: *Identifique* $P(x)$ *na forma padrão e então encontre o fator integrante* $e^{\int P(x)dx}$.

Nesta equação, $P(x) = 1$, *logo temos que o fator integrante é* $\mu(x) = e^{\int dx} = e^x$.

3º passo: *Multiplique a forma padrão da equação pelo fator integrante. Isso resulta automaticamente que o lado esquerdo da equação é a derivada do produto do fator integrante por* y, *ou seja* $\dfrac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx}y\right]$.

Mutiplicando a equação por e^x, *temos*

$$e^x\frac{dy}{dx} + e^x y = e^x x$$

note que o lado esquerdo é a derivada do produto de e^x *por* y, *logo temos*

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = xe^x$$

$$d(e^x y) = xe^x dx$$

4º passo: *Integre ambos os lados dessa última equção.*

integrando em ambos os lados

$$\int d(e^x y) = \int xe^x dx$$

temos

$$e^x y = xe^x - e^x + c$$

simplificando temos

$$y = x - 1 + ce^{-x} \tag{4.3}$$

mas da condição ínicial sabemos que $y = 4$ *quando* $x = 0$. *Logo substituindo na equação (4.3)temos que* $c = 5$, *assim*

$$y = x - 1 + 5e^{-x}$$

é a solução para o problema de valor inicial.

4.1 Teorema de existência e unicidade

No estudo das equações diferenciais de primeira ordem de forma geral

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

onde $f(x, y)$ *é contínua em* (x, y), *dispomos dos teoremas de existência e unicidade de soluções para problemas de valor inícial.*

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= f(x, y) \\ y(x_0) &= y_0 \end{cases}$$

Em geral, estes teoremas se referem à existência e unicidade de soluções locais para o problema, isto é, soluções definidas em algum intervalo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ *na vizinhança do ponto inicial. A continuação desta solução para intervalos de definição maiores é um outro problema e depende da região do plano onde está definida a função* $f(x, y)$ *e do seu comportamento.*

A região de definição de uma equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ *é sempre considerada como um conjunto aberto do plano* $\mathbb{R}^2$. *Um conjunto aberto* A *é aquele em que para todo ponto* $(x_0, y_0) \in A$ *existe um disco* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \varepsilon^2\}$, *contido em* A. *Esta condição nos garante "espaço" para construir a solução local.*

*Estudamos até o momento, varios metódos de resoluções de equações diferenciais, mas em nenhum momento fizemos menção a resultados gerais que garantissem a existência e unicidade de solução para problemas envolvendo tais equações. Esse resultado geral existe e é chamado de teorema de Picard, ele garante que, sob determinadas condições, o problema de valor inícial (*__P.V.I.__*) possui solução única.*

Em razão dos objetivos deste trabalho não demostraremos esse resultado, mas analizaremos um problema bem simples com a equação diferencial fundamental, relacionado com as questões de existência e unicidade.

Considere o problema de valor inícial

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} &= f(x) \\ y(0) &= y_0 \end{cases} \tag{4.4}$$

em que $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é uma função contínua em um intervalo* I *que contém o ponto* 0.

Assim temos que a função

$$y(x) = \int_0^x f(t)dt + C$$

é uma solução da equação diferencial no problema (4.4). Do fato do valor da constante C*, ser obtido da condição inícial* $y(0) = y_0$ *temos que*

$$y(x) = y_0 + \int_0^x f(t)dt$$

é uma solução do problema de volor inícial(P.V.I). Agora nos resta saber se ela é única.

Assim suponhamos que a função

$$Y(x) = Y_0 + \int_0^x f(t)dt$$

seja uma outra solução para o P.V.I. Através de um cálculo simples temos que $y - Y$ *satisfaz o P.V.I.*

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}(y-Y) &= 0 \\ (y-Y)(0) &= 0 \end{cases} \tag{4.5}$$

Como a $\dfrac{d}{dx}(y-Y) = 0$ *no intervalo* I*, a função* $y - Y$ *deve ser identicamente nula nesse intervalo, isso nos garante que* $y(x) - Y(x) = C$*, para todo* $x \in I$*. Da condição inícial dada* $(y-Y)(0) = 0$*, temos* $C = 0$ *e assim*

$$y(x) = Y(x), \textit{ para todo } x \in I$$

Logo temos que a solução do P.V.I não só existe como também é única.

Capítulo 5

Aplicação das Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Este capítulo é uma pequena amostra da grande importância e relevância das equações diferenciais enquanto veículo de transferência e entendimento da linguagem "natural" para a linguagem matemática, assim como suas aplicações no ensino das equações diferenciais como disciplina matemática, pois exerce uma atitude própria da "matemática aplicada", se esta é considerada como uma atitude no estudo da matemática dentro do contexto científico em que ela se desenvolve, e não como uma disciplina isolada e descomprometida.

O desenvolvimento da teoria das equações diferenciais constitui-se em um dos melhores exemplos da interação bem sucedida entre a matemática e a ciência em geral. Um exemplo da utilização imprescindível da teoria das equações diferenciais estar no estudo e ensino da Mecânica Clássica desde o século $XVII$, a qual por sua vez, é de grande importância para o estudo e ensino das equações diferencias. Mas que fique claro que, esta interação transita em meio a biologia, química, economia e engenharia, e não apenas com a física. Observemos a seguir algumas aplicações nestas ciências.

5.1 1ª Aplicação: Desintegração Radioativa

Nas artes, a desintegração radioativa é um método muito ulizado na verificação da autenticidade de um quadro, pois a presença de chumbo radiotivo Pb^{210} *e traços de rádio* Ra^{226} *em pinturas permitem estabelecer se não houve falsificação recente dos quadros. Não diferente acontece na arqueologia, onde é ulizada para datar eventos ocorridos num passado muito distante.*

A atividade de uma susbstância radioativa é medida pelo número de desintegrações por unidade de tempo. Este fenômeno é devido à emissão de três tipos de radioções: partículas α *(núcleo de hélio), partícula* β *(elétrons) e raios* γ *(ondas eletromagnéticas de alta frequencia). Esta compreensão surgiu após muitos experimentos, mas antes disto já se sabia que a atividade é proporcional ao número de átomos radioativos presentes em cada instante. A formulação matemática desta afirmação é bastante simples:*

Se $N = N(t)$ *é o número de átomos radioativos na amostra no instante* t*, e* N_0 *a quantidade inicial destes átomos, ou seja* $N(0) = N_0$*, então*

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

onde $\lambda > 0$ *é a constante de desintegração(o sinal negativo significa que o número de átomos diminui com o passar do tempo e, portanto* $\frac{dN}{dt} < 0$*).*

Note que esta equação é uma equação diferencial fundamental e uma solução particular para esta equação é dada por

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

Levando em conta que $N(t) = \frac{N_A}{A} m$*, onde* A *é o número de massa do elemento radioativo e* N_A *é o número de Avogadro que vale* $6,02 \times 10^{23} mols^{-1}$*, a razão* $\frac{N_A}{A}$ *é constante para cada elemento e mede o número de átomos em um grama deste elemento. Assim, em termos da massa do material radioativo, a lei da atividade pode ser expressa por*

$$m(t) = m_0 e^{-\lambda t}$$

A constante λ *é determinada experimentalmente. Verificamos que durante um tempo* t_1*, determinado elemento decaiu uma porcentagem* α *da quantidade original, logo temos*

$$\left(1 - \frac{\alpha}{100}\right) m_0 = m_0 e^{-\lambda t1}$$

simplificando temos

$$ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)=-\lambda t_1$$

$$\lambda=\frac{-1}{t_1}\,ln\left(1-\frac{\alpha}{100}\right)$$

O tempo necessário para que uma quantidade inicial de material radioativo m_0 decaia para a metade $\frac{m_0}{2}$ é denominado meia-vida do elemento e denotado por $t_{1/2}$. Para calcular $t_{1/2}$ fazemos

$$\frac{m_0}{2}=m_0e^{-\lambda t_{1/2}}$$

simplificando temos

$$e^{\lambda t_{1/2}}=2$$

aplicando a função logarítimo temos

$$\lambda t_{1/2}=ln2 \qquad \Longrightarrow \qquad t_{1/2}=\frac{ln2}{\lambda}$$

A constante de desintegração λ, característica de cada elemento radioativo, permite dizer se este elemento tem vida curta ou longa.

Alguns Exemplos

1. $Urnio \quad U^{238}, \quad t_{1/2}=4,56\times 10^{9}anos \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{238}=0,152\times 10^{-9}ano^{-1}$
2. $Chumbo \quad Pb^{210}, \quad t_{1/2}=22anos \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{210}=0,315\times 10^{-1}ano^{-1}$
3. $Carbono-14 \quad C^{14}, \quad t_{1/2}=5.730anos \quad \Longrightarrow \quad \lambda_{14}=0,121\times 10^{-3}ano^{-1}$

Exemplo 5.1. *Se 100 miligramas de tório^{234} são reduzidas a $97,21$ miligramas em um dia, calcule a taxa de desintegração deste material e sua meia-vida.*

Solução: Seja $m(t)$ a quantidade de tório presente no instante t, como $m_0=100$ e $m_1=97,21$. Note que o tempo é medido em dias, assim temos que a equação que rege este fenômeno é dada por

$$m(t)=m_0e^{-\lambda t} \quad \Longrightarrow \quad m(t_1)=m_0e^{-\lambda\cdot 1} \quad \Longrightarrow \quad 97,21=100e^{-\lambda}$$

simplificando temos $\lambda=-ln\dfrac{97,21}{100}=0,0283\,dias^{-1}$

e agora calcularemos a sua meia-vida, ou seja, $t_1/2=\dfrac{ln2}{0,0283}=24,5dias$

Exemplo 5.2. *Para se poder estimar a época em que foram feitas as pinturas que decoram as paredes da ccaverna de Lauscaux, na França, foi analizada uma amostra do carvão utilizado nos desenhos. Esta ánalise revelou uma atividade de decomposição de* $0,97dpm/g$*(decomposição por minuto em um grama). Semelhante ánalise do carvão produzido da madeira viva mais abundante na região, feita em* 1950*, apresentou um resultado de* $6,68dpm/g$*. Estimar a idade daspinturas.*

Solução:

Sabendo que a meia vida do carbono-14 é $t_{1/2} = 5.730$ *anos*

obemos $\lambda = \dfrac{ln2}{5,730} \cong 0,000121$ *ano*$^{-1}$ *ou* $\lambda = 1,21 \times 10^{-4}$

do poblema temos, $m(t) = 0,97dpm/g$ *e* $m_0 = 6,68dpm/g$

logo obtemos da solução geral $m(t) = m_0e^{-\lambda t}$ *da equação diferencial fundamental* $N(t) = N_0e^{-\lambda t}$ *que descreve a atividade radioativa do carbono-14 em um instante* t*(tempo) a seguinte relação*

$$0,97 = 6,68e^{-1,21\times10^{-4}\cdot t}$$

resolvendo temos

$$ln\frac{0,97}{6,68} = -1,21 \times 10^{-4} \cdot t \quad \Longrightarrow \quad t = 15.947anos$$

Portanto tais pinturas devem ter aproximadamente 16.000 *anos.*

5.2 2ª Aplicação: Absorção de Drogas

Um problema fundamental em farmacologia é saber como cai a concentração de uma droga no sangue dde um paciente. O conhecimento deste fato permite estabelecer qual a dosagem a ser inserida e o intervalo de tempo que cada aplicação deve ser feita.

O modelo mais simples é obtido quando supomos que a taxa de variação da concentração é proporcional à concentração da droga na corrente sanguínea. Em termos matemáticos podemos escrever da seguinte maneira.

$$\frac{dy}{dt} = -ky$$

onde $k > 0$ é uma constante encontrada eexperimentalmente.

Suponhamos que seja dada ao paciente uma dose inicial y_0, absorvida pelo sangue instantaneamente, no instante $t = 0$.(O tempo de absorção da droga é geralmentte muito pequeno, quando comparado com o tempo entre as aplicações das doses.)

A solução da equação é dada, então, por

$$y(t) = y_0 e^{-kt}$$

Suponhamos que depois de um tempo T uma segunda dose de mesma quantidade y_0 seja administrada. Teremos então

$$y(T_-) = y_0 e^{-kt}$$

que é a quantidade de droga no sangue imediatamente antes da segunda dose e

$$y(T_+) = y_0 e^{-kt} + y_0$$

é a quantidade da droga no sangue logo após a aplicação da segunda dose, assim temos

$$y(t) = y_0(1 + e^{-kt})e^{-k(t-T)}$$

que nos dá a quantidade de droga no sangue no instante $t \geq T$

Continuando o tratamento, pela injeção da quantidade y_0 no final de cada intervalo de tempo igual a T, obtemos

$$y(2T_-) = y_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} \qquad e \qquad y(2T_+) = y_0(1 + e^{-kT})e^{-kT} + y_0 = y_0(1 + e^{-kT} + e^{-2kT})$$

e portanto

$$y(t) = y_0(1 + e^{-kt} + e^{-2kT})e^{-k(t-2T)} \qquad para \qquad t \geq 2T$$

Genericamente, depois da n-ésima aplicação, a quantidade de droga no sangue será

$$y(nT_+) = y_0(1 + e^{-kt} + e^{-2kT} + ... + e^{-nkT}), \qquad n = 1, 2, 3, ...$$

Ora, como $1 + e^{-kt} + e^{-2kT} + ... + e^{-nkT}$ é a soma de uma P.G. de $(n+1)$ termos, com o primeiro termo igual a 1 e a razão e^{-kT}, temos

$$y(nT_+) = y_0 \cdot \frac{1 - e^{-(n+1)kT}}{1 - e^{-kT}}$$

Então, quando n cresce, $e^{-(n+1)kT} \to 0$ e, portanto, $y(nT_+)$ tende a

$$y_s = \frac{y_0}{1 - e^{-kT}}$$

que é o nível de saturação da droga

Observação 5.1.

1. *Quando se sabe o valor y_0(quantidade de cada dose) e o nível de saturação y_s, podemos determinar o intervalo de aplicação T*

$$1 - e^{-kT} = \frac{y_0}{y_s} \quad \Longrightarrow \quad e^{-kT} = 1 - \frac{y_0}{y_s} \quad \Longrightarrow \quad T = -\frac{ln\left(\dfrac{y_s - y_0}{y_s}\right)}{k}$$

2. *Quando se tem Y_s e T, podemos obter qual deve ser a dosagem y_0, isto é,*

$$y_0 = y_s\left(1 - e^{-kT}\right)$$

Exemplo 5.3. *Uma dose de $100mg$ de um fármaco será administrada oralmente a um paciente com $70kg$ durante 10 dias, a cada 6 horas, para tratar uma doença. A constante de eliminação do farmaco neste paciente é dada por $k = 12ml/min$. Qual a concentração do farmaco no equilíbrio?*

***Solução**: Sabendo que a dose inicial é de $100mg$ e com aplicação em um intervalo de $6h$, vamos aplicar diretamente na formula do nível de saturação. Então temos*

$$y_s = \frac{y_0}{1 - e^{-kT}} \quad \Longrightarrow \quad y_s = \frac{100}{1 - e^{-72}} \quad = \quad 100mg.$$

Isto resulta numa acumulação do fármaco, em que y_s representa o nível de saturação do farmaco, no qual a taxa média de entrada do fármaco se iguala a taxa média de desaparecimento do fármaco para um intervalo de aplicação.

Exemplo 5.4. *Para um determinado fármaco sabe-se que a concentração no equilíbrio é igual a $5,8mg/ml$. Sabendo que esse mesmo fármaco é eliminado por uma constante $k = 0,2mg/min$, Calcule a dose a administrar por via oral em um intervalo de $8/8h$, durante 14 dias a um paciente de $71kg$.*

***Solução**: Como foi dado $y_s = 5,8mg/ml$, $k = 0,2mg/min$ e o intervalo de aplicação do fármaco, temos*

$$y_0 = y_s\left(1 - e^{-kT}\right) \quad \Longrightarrow \quad y_0 = 5,8\left(1 - e^{-16}\right) = 5,799999437mg/ml$$

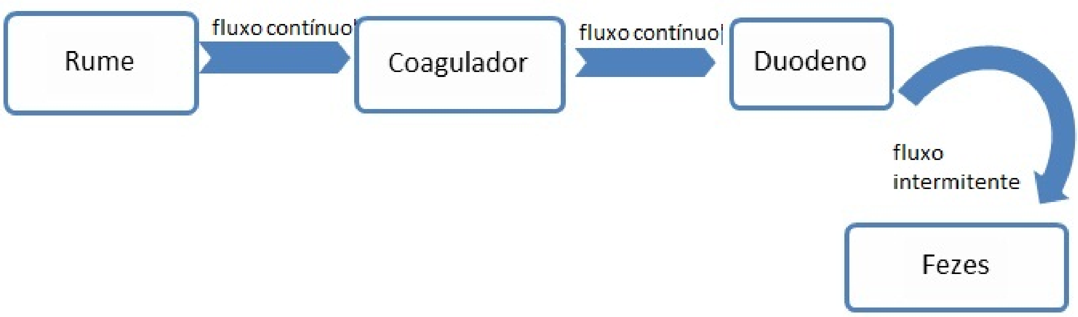
5.3 3ª Aplicação: Digestão de Ruminantes

Os animais ruminantes, tais como carneiro, bode, veado, boi, etc, possuem um mecanismo complicado para realizar sua disgestão. Simplificando, podemos dizer que eles engolem os alimentos sem mastigar, indo para a primeira cavidade do estomago, chamada rume. Após serem ruminados, estes alimentos seguem para o abomaso (coagulador), a quarta cavidade do estômago, onde sao digeridos. Seguem posteriormente para o duodeno, o primeiro segmento do intestino, e em seguida, na forma de fezes sao eliminados de meneira intermitente.

O modelo matemático que descreve a digestão dos rumimnates consiste em estabelecer o valor nutricional de vários alimentos selecionados, assim como sua granulação adquada para serem melhor aproveitados na digestão. Pois a permanência de um alimento no sistema digestivo é um dos fatores responsáveis pelo melhor aproveitamento deste alimento. Assim, uma simples análise gráfica da excreção fecal via modelo matemático pode fornecer um método eficiente na preparação de alimentos.

Sabemos que o fluxo do rume para o abomaso e deste para o duodeno e aproximadamente contínuo.

Em um esquema simplificado temos na Figura abaixo um Sistema digestivo dos animais ruminantes



O modelo matematico, proposto por Blaxter, Graham e Wainman (1956), e o seguinte:

Seja, $x = x(t)$ *a quantidade de alimento no rume, no instante* t*;*

$y = y(t)$ *a quantidade no coagulador, no instante* t*;*

$z = z(t)$ a quantidade que chegou no duodeno ate o instante t;

Se a quantidade de alimento engolida pelo animal no instante t = 0 é q (este alimento vai diretamente para o rume), entao $x(0) = q$, e $y(0) = z(0) = 0$. Isto se aplica para qualquer instante t, isto é, $x(t) + y(t) + z(t) = q$.

As hipóteses formuladas para o fluxo do alimento consistem de duas propostas arbitrárias e análogas:

Primeira, o alimento sai do rume em uma razao proporcional à quantidade de alimento que está nesta cavidade, isto é, a taxa de decrescimento $\dfrac{dx}{dt}$ é proporcional a x.

$$\frac{dx}{dt} = -k_1 x \qquad \text{onde} \quad k_1 > 0 \tag{5.1}$$

Segunda, o alimento sai do coagulador em uma taxa proporcional à quantidade que aí está. Assim, é bastante razoável supor que

$$\frac{dy}{dt} = k_1 x - k_2 y \qquad \text{onde} \quad k_1, k_2 > 0 \tag{5.2}$$

pois no mesmo instante entra $k_1 x$ e sai $k_2 y$.

Resolvendo primeiramente a equação (5.1), temos uma solução $x(t) = ke^{-k_1 t}$, e como $x(0) = q$, vem $x(t) = qe^{-k_1 t}$

Substituindo este valor na Equacao (5.2), temos

$$\frac{dy}{dt} = k_1 q e^{-k_1 t} - k_2 y \tag{5.3}$$

cuja equação linear é não homogênea e a solução ja conhecemos. Usaremos agora, para exemplificar, um outro método de resolução das equações lineares nâo homogêneas: Método da variaçâo de parâmetros.

Supomos que $y(t) = u(t) \cdot v(t)$, onde uma destas funções pode ser arbitrária, enquanto a outra sera determinada da equacão (5.3).

Então,

$$\frac{dy}{dt} = u\frac{dv}{dt} + v\frac{du}{dt}$$

Comparando com a Equação (5.3), procuramos escolher u e v de modo que

$$u\frac{dv}{dt} = k_1 q e^{-k_1 t} \tag{5.4}$$

e

$$v\frac{du}{dt} = -k_2 y = -k_2 uv \quad \Longrightarrow \quad \frac{du}{dt} = -k_2 u \tag{5.5}$$

note que esta última é uma equação á variável separável, logo temos

$$u(t) = c_1 e^{-k_2 t} \qquad onde \;\; c_1 \;\; uma \;\; constante \;\; arbitrria. \tag{5.6}$$

Substituindo isto na Equacão (5.4), resulta

$$c_1 e^{-k_2 t}\frac{dv}{dt} = k_1 q e^{-k_1 t} \qquad ou \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{k_1 q}{c_1} e^{(k_2 - k_1)t}$$

Se $k_1 \neq k_2$, integrando temos

$$v(t) = \frac{k_1 q}{c_1(k_2 - k_1)} e^{(k_2 - k_1)t} + c_2$$

onde c_2 é uma constante de integração, então

$$y(t) = u(t) \cdot v(t) = c_1 e^{-k_2 t} \cdot \left(\frac{k_1 q}{c_1(k_2 - k_1)} e^{(k_2 - k_1)t} + c_2 \right) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = \frac{k_1 q}{k_2 - k_1} e^{-k_1 t} + c_1 c_2 e^{-k_2 t}$$

Usando a condição inicial $y(0) = 0$, temos $c_1 c_2 = -\dfrac{k_1 q}{k_2 - k_1}$*, assim temos*

$$y(t) = \frac{k_1 q}{k_2 - k_1} \cdot \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t} \right) \quad (k_1 \neq k_2) \tag{5.7}$$

Agora se $k_1 = k_2$, integrando temos

$$\frac{dv}{dt} = \frac{k_1 q}{c_1} \qquad \Longrightarrow \qquad v(t) = \frac{k_1 q}{c_1} t + c_2$$

e portanto

$$y(t) = u(t) \cdot v(t) = c_1 e^{-k_2 t} \cdot \frac{k_1 q}{c_1} t + c_2 \;= k_1 q t e^{-k_2 t} + c_1 c_2 e^{-k_2 t} \;=$$

Usando a condição inicial $y(0) = 0$, temos $c_1 c_2 = 0$*, assim temos*

$$y(t) = k_1 q t e^{-k_2 t} = k_1 q t e^{-k_1 t} \quad pois \;\; k_1 = k_2 \tag{5.8}$$

Para calcular a quantidade de alimento que chega no duodeno até o instante t, usamos

$$z(t) = q - (x(t) + y(t)) \tag{5.9}$$

Se $k_1 \neq k_2$, temos

$$z(t) = q - (x(t) + y(t)) \tag{5.10}$$

$$z(t) = q - qe^{-k_1 t} - \frac{k_1 q}{k_2 - k_1} \cdot \left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right)$$

isto é,

$$z(t) = q - \frac{q}{k_2 - k_1} \cdot \left(k_2 e^{-k_1 t} - k_1 e^{-k_2 t}\right) \tag{5.11}$$

E para $k_1 = k_2$, temos

$$z(t) = q - qe^{-k_1 t} - qk_1 t e^{-k_1 t} \tag{5.12}$$

ou seja

$$z(t) = q\left[1 - e^{-k_1 t}\left(1 + k_1\right)\right] \tag{5.13}$$

Observação 5.2. *Quando $t \to \infty, z \to q$, isto é, quando t for suficientemente grande, todo o alimento chega no intestino.*

Contudo, para sabermos o valor nutricional dos alimentos e a granulação adquada para os ruminantes, o método utilizado consiste em medir a excreção fecal, a qual é dada com uma função do tempo depois que o animal foi alimentado com uma quantidade q.

Notemos que quando o alimento chega no intestino ele é excretado depois de um certo tempo. Suponhamos que em média cada excreção se dê em um intervalo de tempo igual a T, ou seja, a quantidade de fezes produzida no instante $t > T$ é, em média, a quantidade de alimentos que chegou no intestino até o tempo $t - T$. Se indicamos por $f(t)$ a quantidade de fezes produzida até o instante t, temos

$$f(t) \cong z(t - T) \qquad para\ todo\ t > T$$

Se $k_1 \neq k_2$, temos

$$f(t) \cong q - \frac{q}{k_2 - k_1} \cdot \left(k_2 e^{-k_1(t-T} - k_1 e^{-k_2(t-T)}\right) \qquad para\ todo\ t \geq T$$

5.4 4ª Aplicação: Resfriamento/Aquecimento de um Corpo - Difusão de Calor

Um corpo que não possui internamente nenhuma fonte de calor, quando deixado em um meio ambiente na temperatura na temperatura T, tende à temperatura do meio ambiente T_a que o cerca. Assim, se a temperatura $T < T_a$, este corpo se aquecerá e, se $T > T_a$ ele esfriará.

De acordo com a Lei de resfriamento enuciada por I. Newton: "A taxa de variação da temperatura de um corpo(sem fonte interna) é proporcional à diferença entre sua temperatura e a do meio ambiente".

Colocando em termos matemáticos

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_a) \qquad ou \qquad \frac{dT}{dt} + kT = kT_a \tag{5.14}$$

onde k constante de proporcionalidade e T_a constante arbitrária, temos uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, onde $k > 0$ pois se $T > T_a$ então $\frac{dT}{dt} < 0$ e se $T < T_a$, $\frac{dT}{dt} > 0$.

Calculando o fator integrante obtemos $\mu(t) = e^{\int k dt} = e^{kt}$, e multiplicando em ambos os lados da equação (5.14), obtemos

$$\frac{dT}{dt}e^{kt} + kTe^{kt} = (kT_a)e^{kt} \quad \Longrightarrow \quad (e^{kt} \cdot T)' = (kT_a)e^{kt} \tag{5.15}$$

Integrando temos

$$\int (e^{kt} \cdot T)'dt = kT_a \int e^{kt}dt \quad \Longrightarrow \quad e^{kt} \cdot T = kT_a \left(\frac{e^{kt}}{k}\right) + c \quad \Longrightarrow \quad T(t) = \frac{T_a \cdot e^{kt} + c}{e^{kt}}$$

portanto

$$T(t) = T_a + ce^{-kt} \qquad onde \;\; c \in \mathbb{R} \tag{5.16}$$

é a solução geral da equação diferencial. Usando $T(0) = T_0$, obtemos $c = T_0 - T_a$, temos

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \tag{5.17}$$

Observação 5.3. *Neste modelo matemático, a temperatura do corpo só atinge a temperatura T_a no limite em que $t \to +\infty$, entretanto, na realidade, a temperatura ambiente é atingida em um tempo finito. Assim podemos chamar de t_∞ o tempo necessário para que T atinja 99 por cento de T_a. Em termos númericos, isto significa que se o erro relativo for de 1 por cento ou menos, podemos considerar $T(t)$ como sendo praticamente T_a. Assim,*

$$\pm\frac{99}{100}T_a = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt-\infty} \quad \Longrightarrow \quad e^{-kt_\infty} = \left|\frac{1}{100} \cdot \frac{t_a}{(T_a - T_0)}\right| \quad \Longrightarrow$$

$$-kt_\infty = ln\left|\frac{t_a}{100(T_a - T_0)}\right| \quad \Longrightarrow \quad t_\infty = \frac{1}{k}ln\left|\frac{100(T_a - T_0)}{T_a}\right|$$

Exemplo 5.5. *Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega, 2 horas depois da chamada, examina o cadáver. Uma hora depois o detetive prende a secretária. Por quê?*

***Solução**: A temperatura do escritório era de 20^0C. Quando a polícia chegou, mediu a temperatura do cadáver, que era de 35^0C; 1 hora depois, mediu novamente obtendo $34,2^0C$. Supondo que a temperatura normal de uma pessoa viva seja constante e igual a $36,5^0C$,temos*

$T(a) = 20$*: temperatura do meio ambiente*

$T(0) = 36,5$*: temperatura da vitíma no instante da morte*

$T(t) = 35$*: temperatura da vitíma decorrida desde o instante t da morte, ou seja a hora que a polícia chegou*

$T(t+1) = 34,2$*: temperatura da vitíma no instante t da morte mais 1 hora depois que a polícia chegou*

Substituindo estes dados na equação de resfriamento, temos

$$T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad 35 = 20 + (36,5 - 20)e^{-kt} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-kt} = \frac{15}{16,5}$$

análogamente para $T(t+1)$

$$T(t+1) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt} \quad 34,2 = 20 + (36,5 - 20)e^{-k(t+1)} \qquad \Longrightarrow \qquad e^{-k(t+1)} = \frac{14,2}{16,5}$$

assim temos

$$\begin{cases} e^{-kt} = \dfrac{15}{16,5} \\ e^{-k(t+1)} = \dfrac{14,2}{16,5} \end{cases}$$

resolvemos este sistema, dividindo membro a membro as equações, obtendo

$$\frac{15}{14,2} = \frac{1}{e^{-k}} \qquad \Longrightarrow \qquad e^k = \frac{15}{14,2} \qquad \Longrightarrow \qquad e^k = 1.056.338 \quad onde \;\; k = 0.05481$$

portanto

$$e^{-kt} = \frac{15}{16,5} \quad \Longrightarrow \quad -kt = ln\left(\frac{15}{16,5}\right) \quad \Longrightarrow \quad t = \frac{-ln\left(\dfrac{15}{16,5}\right)}{k} = 1,73898h.$$

Podemos concluir que o assassinato ocorreu "exatamente"1 hora, 44 minutos e 20 segundos antes de a polícia chegar; portanto, quando a secretária telefonou, seu chefe ainda estava vivo!

Observação 5.4. *Este é um problema de ficção policial muito interessante e realmente impossível, pois os dados colhidos pelo legista estão completamente fora da realidade, uma vez que neste caso, o tempo necessário para o corpo atingir a temperatura de* $19,8^0C$*(equivalente a* 99 *por cento da temperatura ambiente) seria* $t_\infty = 80,5$ *horas, quando o valor normal para* t_∞ *é aproximadamente* 6 *horas. Concluindo, nem sempre um problema com respostas convenientes está baseado em dados reais.*

Então para uma melhor aproximação da realidade as medidas seriam obtidas da sequinte maneira.

Tomamos $t_\infty = 6$ *e obtemos* λ *da fórmula*

$$6 = \frac{1}{\lambda} ln \left| \frac{100(20 - 36,5)}{20} \right| \quad \Longrightarrow \quad \lambda = 1,36.$$

Se quisermos obter $t = 1,7389$*, fazemos*

$$\begin{cases} T(t) = 20 + (36,5 - 20)e^{-kt} = 20 + 16,5e^{-1,36 \cdot 1,7389} \cong 21,55^0C \\ T(t+1) = 20 + (36,5 - 20)e^{-k(t+1)} = 20 + 16,5e^{-1,36 \cdot 2,7389} \cong 20,39^0C \end{cases}$$

Considerações finais

Este trabalho foi desenvolvido com o intuito de mostrar a importância das equações diferenciais e sua vasta aplicações nas ciências, em particular na física, química e biologia. Mas o interesse e esforço estão muito além, e conseguir dispertar o interesse e a vontadede de outros alunos a saber mais à respeito deste assunto é sem dúvida o maior objetivo deste trabalho.

Atentei em detalhar e simplificar ao máximo todos os capítulos, focando sempre em exemplos variados para um melhor entendimento do assunto, pois como se trata de um estudo introdutório a respeito das equações diferenciais, tive o cuidado de conceituar e exemplificar um a um termos envolvidos.

Espero que este material possa servir de apoio nas pesquisas de alunos que buscam conhecimentos à respeito das equações diferenciais, em especial das equações diferenciais ordinárias. Pois o ato de compartilhar conhecimento promove a universalização do conhecimento, e este por sua vez, é a principal arma contra o preconceito, a discriminação e a desigualdade em uma sociedade.

Referências Bibliográficas

[1] BASSANEZI, Rodney Carlos, JR, Wilson C. Ferreira; Equações Diferenciais com Aplicações, Editora HARBRA ltda, São Paulo, 1988.

[2] CORRÊA, Francisco J. S. de Araújo - Equações Diferenciais Ordinárias, Universidade Federal do Pará, Faculdade de Matemática.

[3] INCE, E.L - Ordnary Differential Equations, Dover Publications, Inc. New York, 1956

[4] MACHADO, Kleber Daum; Equações Diferenciais Aplicadas à Física, 3ª Edição, Editora UEPG, 2004.

[5] MÁRQUEZ, Gabrriel Garcia

[6] ZILL, Dennis G., CULLEN, Michael R.; Equações Diferenciais, vol.1, 3ª Edição, Editora Pearson Makron Books, São Paulo, 2001.

[7] ZILL, Dennis G.;Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem, Pioneira Thomson Learning. São Paulo, 2003.