



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

José Luiz Solon Sampaio

**Estudo e implementação de métodos
numéricos para equações diferenciais
parciais elementares**

BELÉM - PA

2013



UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

José Luiz Solon Sampaio

Estudo e implementação de métodos numéricos para equações diferenciais parciais elementares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado
à Faculdade de Matemática da Universidade
Federal do Pará como requisito parcial para
obtenção do título de Licenciado Pleno em
Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Manoel Silvino Batalha de Araújo.

BELÉM - PA

2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

JOSÉ LUIZ SOLON SAMPAIO

Estudo e implementação de métodos numéricos para equações diferenciais parciais elementares

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

Orientador : Prof. Dr. Manoel Silvino Batalha de Araújo.
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Dilberto da Silva Almeida Júnior
Faculdade de Matemática, UFPA

Prof. Dr. Hermínio Simões Gomes
Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: ____ / ____ / ____

CONCEITO: _____

Dedicatória

*Dedico este trabalho a todos que
acreditaram em mim.*

Agradecimentos

Agradeço a Deus por toda força e discernimento para chegar até aqui.

Agradeço a minha família que sempre me apoiou e me auxiliou.

Agradeço a meu orientador, Prof. Dr. Manoel Silvino, que sempre trabalhou junto a mim em minhas pesquisas, soube sempre sanar minhas dúvidas e indicar próximo passo no caminho da produção deste trabalho.

Agradeço a meus amigos que sempre estiveram presentes nos momentos bons e difíceis.

Agradeço a meus professores por me darem a instrução necessária.

Por fim, agradeço a todos quer direta ou indiretamente auxiliaram em minha vida estudantil.

Resumo

Este trabalho apresenta duas técnicas para resolver algumas equações diferenciais parciais, uma analítica e uma numérica aproximada. As soluções analíticas utilizam o *método das características* e o método de *separação de variáveis* juntamente com as séries de Fourier. Para a solução numérica usamos o método de diferenças finitas, que se baseia na série de Taylor para aproximar as derivadas e assim poderemos aproximar as EDPs. Com esta aproximação e programação em *linguagem C* criamos códigos que calculam a solução aproximada e as representa graficamente. Por fim analisamos sobre quais condições os métodos numéricos produzem aproximações estáveis.

Palavras-chave: EDP, Método das Características, Séries de Fourier, Diferenças Finitas, Estabilidade de von-Neumann.

Conteúdo

Introdução	1
1 Soluções Analíticas de EDPs	3
1.1 Equação de Convecção	4
1.1.1 Introdução ao Método das Características	4
1.1.2 Solução da equação de convecção	5
1.2 Equação do calor	7
1.2.1 Solução da equação do calor	7
1.2.2 Introdução às Séries de Fourier	11
1.2.3 Determinação dos coeficientes de Fourier	12
1.3 Equação da onda	14
1.3.1 Solução da equação da Onda	14
2 Métodos numéricos para EDPs	18
2.1 O método de diferenças finitas	18
2.1.1 Aproximações por diferenças finitas	19
2.2 Solução numérica da equação de Convecção	21
2.2.1 FTFS - Avançado no Tempo e no Espaço	21
2.2.2 FTBS - Avançado no Tempo e Atrasado no Espaço	22
2.2.3 FTCS - Avançado no Tempo e Centrado no Espaço	23

2.2.4	Lax-Wendroff	24
2.3	Solução numérica da equação calor	25
2.3.1	Método Explícito	25
2.3.2	Método Implícito	26
2.4	Solução numérica da equação da onda	31
3	Análise de Estabilidade	33
3.1	Introdução	33
3.1.1	Consistência	33
3.1.2	Convergência	34
3.1.3	O teorema de equivalência de Lax	35
3.2	Estabilidade	35
3.3	Análise de estabilidade a partir da transformada de Fourier discreta.	36
3.3.1	Equação de Convecção	37
3.3.2	Equação do Calor	41
3.4	Análise de von Neumann	44
3.4.1	Equação de Convecção	44
3.4.2	Equação do Calor	50
	Considerações Finais	55
	Referências Bibliográficas	56

Introdução

Métodos numéricos para solução de equações diferenciais parciais constituem uma área de estudo importante tanto na Matemática quanto nas ciências exatas de um modo geral. Em particular as engenharias têm forte interesse em desenvolver técnicas computacionais para a solução de seus problemas. No curso de graduação em Matemática da UFPA, em Belém, o currículo não contempla nada sobre métodos numéricos, ficando os alunos interessados nessa área restritos a orientações individuais dos professores de trabalho de conclusão de curso ou de iniciação científica, quando possível. Foi o que ocorreu no caso deste trabalho, no qual os estudos foram desenvolvidos a partir da orientação de iniciação científica oportunizada pelo projeto Integrando a Amazônia, da Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), nos anos de 2012 e 2013.

Este trabalho de conclusão está dividido em três capítulos. No capítulo 1, apresentamos um resumo teórico sobre equações as diferenciais parciais elementares que trabalharemos, com ênfase nas técnicas para a obtenção das suas soluções analíticas. No capítulo 2, desenvolvemos a discretização das equações elementares usando o método de diferenças finitas. Neste capítulo também são mostrados os resultados obtidos a partir da implementação computacional em linguagem c de alguns métodos. No capítulo 3, fazemos o estudo de estabilidade de alguns esquemas numéricos utilizando transformada

de Fourier discreta e o critério de von Neumann. Também neste capítulo, os resultados obtidos a partir das implementações mostradas no capítulo 2 ilustram graficamente o que acontece ao não se respeitar as condições de estabilidade.

Capítulo 1

Soluções Analíticas de EDPs

Uma equação diferencial parcial(EDP) consiste em uma equação cuja solução é uma função de mais de uma variável e que envolve uma ou mais derivadas dessa função solução. Muitos fenômenos físicos, como por exemplo, a condução do calor em uma barra, a vibração de uma corda ou ainda o movimento de fluidos são modelados por EDPs.

Neste trabalho de conclusão de curso estamos especialmente interessados nas equações diferenciais de convecção, do calor e da onda, que apresentamos a seguir.

- Equação de convecção:

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

- Equação do calor :

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

- Equação da onda:

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in (0, L), \quad t > 0.$$

Quando impomos condições iniciais(CI) às equações temos um problema de valor inicial. Se, além disso, impusermos condições de contorno, temos um problema de valor inicial e de contorno.

Para a resolução da equação de convecção usaremos o método das características e para a solução das equações do calor e da onda usamos a técnica de separação de variáveis juntamente com o estudo de Séries de Fourier.

1.1 Equação de Convecção

1.1.1 Introdução ao Método das Características

Consideremos o seguinte problema de valor inicial,

$$\text{EDP: } a(x, t)u_x + b(x, t)u_t + c(x, t)u = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \quad (1.1)$$

$$\text{CI: } u(x, 0) = \phi(x) \quad -\infty < x < \infty$$

A solução para esta equação está baseada no fato físico, da distribuição inicial em relação ao ponto x se propagar ao longo de uma linha (curva) no plano $x \times t$ (chamada de característica).

A idéia do método das características parte em introduzir duas novas coordenadas s e τ (no lugar de x e t) com as seguintes propriedades:

s varia ao longo da curva característica.

τ varia ao longo da condição inicial ($t = 0$).

Primeiro, consideremos a nova coordenada s . Se considerarmos s de forma que (1.1) se torne a EDO

$$\frac{du}{ds} + c(x, t)u = 0,$$

fica claro, que a questão torna-se encontrar essa curva característica. Tomemos a curva característica $\{[x(s), t(s)]; 0 < S < \infty\}$ tal que

$$\frac{du}{ds} = a(x, t) \quad \text{e} \quad \frac{dt}{ds} = b(x, t),$$

com isto, fica claro que

$$\frac{du}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = a(x, t)u_x + b(x, t)u_t,$$

em outras palavras, ao longo da curva $\{[x(s), t(s)]; 0 < S < \infty\}$, a EDP origina uma EDO.

$$\text{EDO: } \frac{du}{ds} + c[x(s, \tau), t(s, \tau)]u = 0 \quad 0 < s < \infty,$$

$$\text{CI: } u(0) = f(\tau),$$

Perceba que substituímos também os valores de x e t por termos de s e τ no coeficiente c .

Depois de resolver a EDO (com condição inicial), temos a solução $u(s, \tau)$. Agora mudemos a solução de s e τ para x e t (a partir das mudanças de variáveis do início) e encontraremos a solução $u(x, t)$.

1.1.2 Solução da equação de convecção

Usaremos o método das características para resolver a equação de convecção com condição inicial e de contorno:

$$u_t + au_x = 0, \quad x \in (0, L), \quad t > 0, \quad (1.2a)$$

$$u(0, t) = u(L, t), \quad t > 0, \quad (1.2b)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, L). \quad (1.2c)$$

Considerando o que foi descrito anteriormente, faremos uma mudança de variável da forma

$$\frac{dx}{ds} = a \text{ e } \frac{dt}{ds} = 1, 0 < s < \infty.$$

Resolvendo as equações temos

$$x = as + c_1 \text{ e } t = s + c_2.$$

Para calcular c_1 e c_2 fazemos $p = 0$, onde

$$x(0) = \tau, \quad t(0) = 0.$$

Portanto $c_1 = \tau$ e $c_2 = 0$. Assim, nossa reta característica é

$$x = as + \tau \text{ e } t = s.$$

Podemos eliminar s da equação com

$$x - at = \tau.$$

Usando as novas coordenadas temos a seguinte EDO com condição de inicial

$$\begin{aligned} \frac{du}{ds} &= 0, \\ u(0, \tau) &= f(\tau). \end{aligned}$$

Resolvendo a EDO

$$u(s, \tau) = f(\tau).$$

Retornando às variáveis iniciais concluímos que

$$u(x, t) = f(x - at).$$

Assim, observamos que a solução da equação é constante ao longo da curva característica. Essa propriedade é importante e deve ser levada em consideração no desenvolvimento de métodos numéricos.

1.2 Equação do calor

1.2.1 Solução da equação do calor

Considere uma barra retilínea, de seção uniforme, homogênea de comprimento L (Fig.1.1).

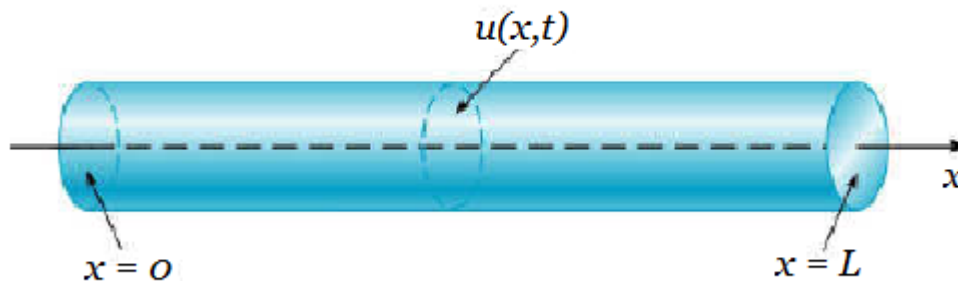


Figura 1.1: Barra condutora.

Vamos supor que a superfície lateral desta barra esteja termicamente isolada. Além disso vamos considerar que o comprimento desta barra seja muito maior que o seu diâmetro, de modo que a temperatura em cada seção transversal possa ser considerada constante. Nestas condições podemos

modelar a temperatura na posição x e instante t como uma função de duas variáveis $u(x, t)$. Supondo definidas as temperaturas T_1 e T_2 nas extremidades da barra, a temperatura após um determinado tempo t na posição x obedece a seguinte EDP,

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}, x \in (0, L), t > 0 \quad (1.3a)$$

$$u(0, t) = T_1 \quad u(L, t) = T_2, \quad t > 0 \quad (1.3b)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in (0, L) \quad (1.3c)$$

A solução deste problema parte de um caso específico, onde as condições de contorno são $T_1 = T_2 = 0$.

O método que utilizaremos para resolução da EDP 1.3a será o de separação de variáveis. Neste método assumimos que solução pode ser escrita como produto de funções de apenas uma variável. Vamos supor

$$u(x, t) = X(x)T(t), \forall x \in [0, L], \forall t \geq 0. \quad (1.4)$$

Comparando com as condições de contorno temos

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (1.5)$$

Caso contrário $T(t)$ seria nulo para todo t e teríamos a solução trivial $u(x, t) = 0$. Substituindo (1.4) em (1.3a) temos:

$$X(x)T'(t) = \alpha^2 X''(x)T(t),$$

o que é equivalente a

$$\frac{1}{\alpha^2} \frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\sigma,$$

onde σ é uma constante. O sinal negativo é introduzido por conveniência. Obtemos assim duas equações diferenciais ordinárias:

$$X''(x) + \sigma X(x) = 0, \quad (1.6)$$

$$T'(t) + \sigma\alpha^2 T(t) = 0. \quad (1.7)$$

Vamos resolver (1.6) considerando três possibilidades para σ : $\sigma < 0$, $\sigma = 0$, $\sigma > 0$.

Para $\sigma < 0$ vamos considerar $\sigma = -\lambda^2$ onde $\lambda > 0$. Substituindo em (1.6) obtemos

$$X''(x) - \lambda^2 X(x) = 0,$$

cuja solução geral é

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x},$$

onde c_1 e c_2 são constantes. Considerando (1.5) teremos apenas a solução trivial para o caso $\sigma < 0$.

Se $\sigma = 0$ a equação (1.6) se reduz a

$$X''(x) = 0,$$

cuja solução geral é dada por

$$X(x) = c_1 x + c_2.$$

Também neste caso teremos apenas a solução trivial.

Para $\sigma > 0$ vamos considerar $\sigma = \lambda^2$ ($\lambda > 0$). Substituindo em (1.6) obtemos

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Neste caso a solução geral é dada por

$$X(x) = c_1 \cos \lambda x + c_2 \sin \lambda x.$$

Considerando a condição (1.5) concluímos que

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ onde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{n\pi}{L} \text{ onde } n = 1, 2, 3\dots \\ \sigma_n &= \frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ onde } n = 1, 2, 3\dots\end{aligned}\tag{1.9}$$

Assim, a equação (1.7) assume a forma

$$T'(t) + \frac{n^2\pi^2\alpha^2}{L^2}T(t) = 0,$$

que tem como solução

$$T_n(t) = e^{\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}\right)} \text{ onde } n = 1, 2, 3\dots\tag{1.10}$$

Portanto segue de (1.4) que

$$u_n(x, t) = e^{\left(\frac{-n^2\pi^2\alpha^2 t}{L^2}\right)} \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ onde } n = 1, 2, 3\dots$$

Em particular, qualquer combinação linear finita dessas soluções particulares também é solução de (1.3), ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m c_n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L},$$

é solução de (1.3) para qualquer m fixo. A solução ideal seria que o somatório fosse ampliado para o infinito na forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{\frac{-n^2\pi^2 t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}.\tag{1.11}$$

Temos agora que mostrar que a série (1.11) converge e determinar quem são seus coeficientes c_n .

Para satisfazer a condição inicial devemos ter

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi x}{L}.\tag{1.12}$$

Agora resta saber para que funções $f(x)$ a série acima é convergente, o que veremos na próxima seção.

1.2.2 Introdução às Séries de Fourier

A série (1.12) é um caso particular de uma **série de Fourier**, que tem forma geral dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (1.13)$$

Os coeficientes a_n e b_n são chamados de coeficientes de Fourier e sua determinação está relacionada com a função f .

Portanto uma questão central para a obtenção de solução para a EDP (1.3) é saber em que condições a série de Fourier é convergente. A resposta para essa questão é dada pelo Teorema de Fourier (para mais detalhes veja ref. [4]):

Teorema de Fourier: *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável¹ e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f , converge, em cada ponto x , para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,*

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right),$$

onde usamos a notação

$$f(a_j + 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^+} f(x), \quad f(a_j - 0) = \lim_{x \rightarrow a_j^-} f(x).$$

Concluimos assim que a solução (1.11) da equação do calor (1.3) converge apenas se a condição inicial (1.3c) for seccionalmente diferenciável. O problema que encontramos agora é determinar o valor dos coeficientes.

¹uma função $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ será seccionalmente diferenciável se f e f' têm apenas um número finito de discontinuidades em qualquer intervalo limitado.

1.2.3 Determinação dos coeficientes de Fourier

Se a função puder ser escrita como uma série de Fourier, temos agora que determinar os coeficientes a_0 , a_n e b_n , $n = 1, 2, 3, \dots$.

Determinação a_0

Primeiramente integramos a igualdade (1.13) de $-L$ até L .

$$\int_{-L}^L f(x)dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right),$$

usando,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0,$$

temos

$$\int_{-L}^L f(x)dx = La_0,$$

e portanto

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x)dx. \quad (1.14)$$

Determinação dos coeficientes a_m , $m = 1, 2, \dots$

Para encontrar o coeficiente a_m multiplicamos a igualdade (1.13) por $\cos \frac{m\pi x}{L}$ e integramos com relação a x de $-L$ até L .

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

Usando

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx = 0,$$

e as relações de ortogonalidade

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \text{ se } n, m \geq 1;$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0 & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases}$$

temos

$$\int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx = La_m,$$

e portanto,

$$a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx. \quad (1.15)$$

Determinação dos coeficientes b_m , $m = 1, 2, \dots$

Para determinar o coeficiente b_m multiplicamos a igualdade (1.13) por $\sin \frac{m\pi x}{L}$ e integramos com relação a x de $-L$ até L .

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right), \end{aligned}$$

usando

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0,$$

e as relações de ortogonalidade

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0 \text{ se } n, m \geq 1;$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L & \text{se } n = m \geq 1 \\ 0 & \text{se } n \neq m, n, m \geq 1 \end{cases}$$

temos

$$\int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx = Lb_m,$$

e portanto

$$b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx \quad (1.16)$$

Coefficientes na solução geral da equação do calor

Comparando a série (1.12) com a série de Fourier (1.13) observamos que os coeficientes c_n são dados por

$$c_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Que são os coeficientes da solução geral (1.11) da equação (1.3a) com condição inicial dada por (1.3c).

1.3 Equação da onda

1.3.1 Solução da equação da Onda

Considere uma corda com extremidades fixas, de comprimento L e uma vibração inicial (Fig. 1.2), por exemplo uma corda de um violão.

Considerando que sua espessura seja pequena o suficiente, podemos modelar a vibração da corda no ponto x e no instante t como uma função de duas variáveis $u(x, t)$ que obedece a EDP

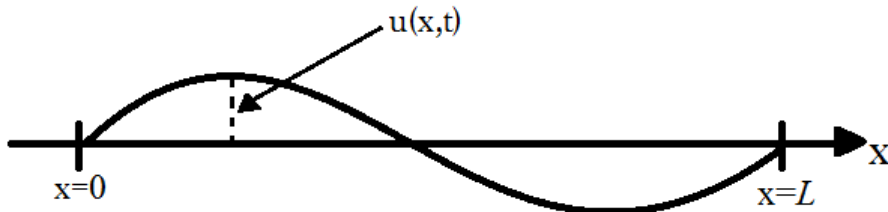


Figura 1.2: Corda vibrante

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, x \in (0, L), t > 0 \quad (1.17a)$$

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, t > 0 \quad (1.17b)$$

$$u(x, 0) = f(x), x \in (0, L) \quad (1.17c)$$

$$u_t(x, 0) = g(x), x \in (0, L) \quad (1.17d)$$

Nesta equação, como feito no caso da equação do calor (1.3), usaremos o método de separação de variáveis e posteriormente as séries de Fourier. Portanto, como explicado na seção 1.2.1, vamos procurar soluções de (1.17) na forma :

$$u(x, t) = X(x)T(t). \quad (1.18)$$

Comparando com as condições de contorno (1.17b) temos

$$X(0) = X(L) = 0. \quad (1.19)$$

Caso contrário $T(t) = 0$ para todo t e teríamos a solução trivial $u(x, t) = 0$. Substituindo (1.18) em (1.17a) temos:

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t),$$

o que é equivalente a

$$\frac{1}{c^2} \frac{T''(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \sigma,$$

onde σ é uma constante. Obtemos assim duas equações diferenciais ordinárias:

$$X''(x) - \sigma X(x) = 0, \quad (1.20)$$

$$T''(t) - \sigma c^2 T(t) = 0. \quad (1.21)$$

A resolução de (1.20) é dada por (1.8), ou seja,

$$X(x) = \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ onde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.22)$$

$$\sigma = -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \text{ onde } n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.23)$$

Assim, a equação (1.21) assume a forma

$$T''(t) - \frac{n^2\pi^2 c^2}{L^2} T(t) = 0,$$

que tem como solução

$$T(t) = a_n \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi ct}{L}, \quad (1.24)$$

onde a_n e b_n são constantes arbitrárias. Portanto segue de (1.18) que

$$u(x, t) = a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L}.$$

Em particular, qualquer combinação linear finita dessas soluções particulares também é solução de (1.17), ou seja,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^m \left[a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right]$$

é solução de (1.17) para qualquer m fixo. Novamente a solução ideal seria que o somatório fosse ampliado para o infinito na forma:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi ct}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{n\pi ct}{L} \right]. \quad (1.25)$$

Considerando (1.25) e utilizando a condição inicial (1.17c) temos que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (1.26)$$

Obtendo $u_t(x, t)$ a partir de (1.25) e utilizando a condição inicial (1.17d) obtemos

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi c}{L} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (1.27)$$

Assim, para que haja solução da equação da onda (1.17), as condições iniciais (1.17c) e (1.17d) devem poder ser escritas como as séries de Fourier (1.26) e (1.27) respectivamente, em que os coeficientes de Fourier são dados por

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad (1.28)$$

$$b_n = \frac{1}{n\pi c} \int_{-L}^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}. \quad (1.29)$$

Capítulo 2

Métodos numéricos para EDPs

Algumas EDPs não possuem uma solução analítica, para estes casos usa-se uma aproximação através de métodos numéricos, que se inicia pela transformação do domínio contínuo em um domínio computacional onde posteriormente são aproximadas as derivadas, transformando a EDP em uma equação algébrica na qual as variáveis são as soluções em cada ponto do domínio discretizado. No presente trabalho fizemos aproximações das equações utilizando o método de diferenças finitas. Os resultados são comparados com as soluções analíticas para observar se as técnicas são eficientes.

2.1 O método de diferenças finitas

A resolução numérica pelo método de diferenças finitas parte da discretização das equações no domínio espacial, em pontos de intervalo $\Delta x = \frac{L}{i_{max}}$ (onde $i_{max} + 1$ é a quantidade de pontos no domínio espacial), e no domínio temporal em intervalos $\Delta t = \frac{t_f}{n_{max}}$ (onde $n_{max} + 1$ é a quantidade de pontos no domínio temporal). Usaremos como notação $u(i\Delta x, n\Delta t) = u(x_i, t_n) = u_i^n$. A ferramenta matemática utilizada para a discretização

das equações é a série de Taylor. Neste caso as EDPs são substituídas por expressões algébricas que são processadas computacionalmente. Estas expressões são denominadas *equação de diferenças finitas*(EDF) e levam em consideração as condições iniciais e de contorno também discretizadas. Ao resolver a EDF obtemos uma *solução aproximada do problema* em cada ponto.

2.1.1 Aproximações por diferenças finitas

Para a discretização das EDPs faremos a aproximação das derivadas através da série de Taylor dada por [5, 2] :

$$f(x + \Delta x) = f(x) + (\Delta x) \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \dots \quad (2.1)$$

Expandido em série de Taylor em torno de um ponto x_n obtemos, (usando a notação $f(x_n) = f_n$)

$$f_{n+1} = f_n + (\Delta x) \left. \frac{df}{dx} \right|_n + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_n + \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_n + \dots$$

Assim podemos aproximar a derivada no ponto x_n por

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_n = \frac{f_{n+1} - f_n}{\Delta x} + \left[-\frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_n - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_n - \dots \right].$$

A esta aproximação denominamos *diferença progressiva*. O termo entre colchetes representa a distância entre a solução real e a solução aproximada para $\frac{df}{dx}$ no ponto x_n e é denominado *erro local de truncamento*(ELT).

De forma análoga,

$$f(x - \Delta x) = f(x) - (\Delta x) \frac{df(x)}{dx} + \frac{(\Delta x)^2}{2!} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} - \frac{(\Delta x)^3}{3!} \frac{d^3 f(x)}{dx^3} + \dots, \quad (2.2)$$

e portanto

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_n = \frac{f_n - f_{n-1}}{\Delta x} + \left[\frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_n - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_n - \dots \right].$$

A esta aproximação denominamos *diferença regressiva*, cujo erro local de truncamento é dado por

$$ELT = \left[\frac{(\Delta x)}{2!} \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_n - \frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_n - \dots \right]$$

Utilizando as expansões anteriores, podemos subtrair (2.2) de (2.1) obtendo

$$f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x) = 2\Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_n + 2 \frac{(\Delta x)^3}{3!} \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_n + \dots$$

Desta forma obtemos uma outra aproximação para a derivada, dada por:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_n = \frac{f_{n+1} - f_{n-1}}{2\Delta x} - \left[\frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_n + \frac{(\Delta x)^4}{5!} \left. \frac{d^5 f}{dx^5} \right|_n + \dots \right].$$

A esta aproximação denominamos *diferença centrada*, cujo erro local de truncamento é dado por

$$ELT = \left[\frac{(\Delta x)^2}{3!} \left. \frac{d^3 f}{dx^3} \right|_n + \frac{(\Delta x)^4}{5!} \left. \frac{d^5 f}{dx^5} \right|_n + \dots \right].$$

Para obter uma aproximação para a segunda derivada efetuamos a soma de (2.1) com (2.2):

$$f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x) = f(x) + 2 \frac{(\Delta x)^2}{2!} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_n + 2 \frac{(\Delta x)^4}{4!} \left. \frac{d^4 f(x)}{dx^4} \right|_n + \dots$$

Portanto

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_n = \frac{f_{n+1} - f_n + f_{n-1}}{(\Delta x)^2} + ELT,$$

com

$$ELT = \left[-2 \frac{(\Delta x)^2}{4!} \left. \frac{d^4 f}{dx^4} \right|_n - \dots \right].$$

Neste caso dizemos que o erro local de truncamento é da ordem Δx^2 ($O(\Delta x^2)$), para informar que o termo dominante em ELT é $(\Delta x)^2$. Assim, poderíamos escrever

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_n = \frac{f_{n+1} - f_n + f_{n-1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2).$$

De um modo geral, dizer que o erro é da "ordem Δx^n " ($O(\Delta x^n)$) significa que existe uma constante K tal que

$$|\text{ELT}| \leq K \Delta x^n.$$

2.2 Solução numérica da equação de Convecção

Apresentaremos quatro esquemas de discretização da equação de convecção (1.2):

- FTFS (*forward in time and forward in space*): avançado no tempo e no espaço;
- FTBS (*forward in time and backward in space*): avançado no tempo e atrasado no espaço;
- FTCS (*forward in time and central in space*): avançado no tempo e centrado no espaço ;
- Lax-Wendroff.

2.2.1 FTFS - Avançado no Tempo e no Espaço

Nesta técnica as aproximações são avançadas no espaço e no tempo.

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.4)$$

substituindo (2.3) e (2.4) em (1.2a)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x} + O(\Delta x, \Delta t).$$

Isolando u_i^{n+1} e desconsiderando o erro local de truncamento, obtemos

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_{i+1}^n - u_i^n) \quad (2.5)$$

2.2.2 FTBS - Avançado no Tempo e Atrasado no Espaço

Nesta técnica a aproximação da derivada com relação a x será recuada, enquanto a derivada com relação a t será aproximada de forma progressiva.

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} = \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.7)$$

substituindo (2.6) e (2.7) em (1.2a)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{\Delta x} + O(\Delta x, \Delta t).$$

Isolando u_i^{n+1} e desconsiderando o Erro Local de Truncamento, obtemos

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x}(u_i^n - u_{i-1}^n) \quad (2.8)$$

Durante o estudo ao relacionar a solução aproximada e a curva característica podemos perceber que os esquemas FTFS e FTBS servem para $a < 0$ e $a > 0$ respectivamente, então criamos um código em *linguagem C* que utiliza o método correto a partir do valor de a representado na figura (Fig. 2.1).

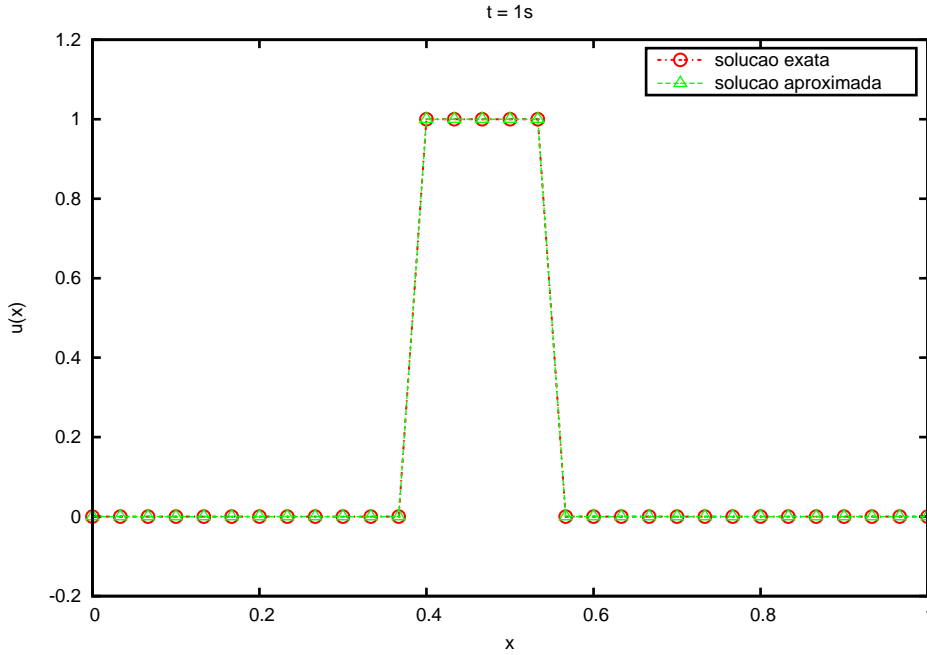


Figura 2.1: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação de convecção usando o esquema FTBS com 30 pontos no espaço.

2.2.3 FTCS - Avançado no Tempo e Centrado no Espaço

Nesta técnica a aproximação da derivada com relação a x será centrada, enquanto a derivada com relação a t continua progressiva.

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial x} = \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x), \quad (2.10)$$

substituindo (2.9) e (2.10) em (1.2a)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + O(\Delta x, \Delta t)$$

Isolando u_i^{n+1} e desconsiderando o erro local de truncamento, obtemos

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) \quad (2.11)$$

2.2.4 Lax-Wendroff

Esta técnica inicia derivando ambos os lados da equação (1.2a) em relação a t ,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right).$$

Assumindo que as derivadas mistas são iguais invertemos sua ordem do lado direito da equação e substituímos o termo $\frac{\partial u}{\partial t}$ por $-a \frac{\partial u}{\partial x}$ de acordo com (1.2a).

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (2.12)$$

Fazendo a expansão da série de Taylor em relação ao tempo temos

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) + \frac{\Delta t^2}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) + O(\Delta t^3).$$

Substituindo as derivadas de acordo com (1.2a) e (2.12) e desconsiderando o erro local de truncamento obtemos

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \Delta t \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\Delta t^2}{2} \left(a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right).$$

Aplicando as aproximações centrais nas derivadas em x temos

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a \Delta t \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right) + \frac{a^2 \Delta t^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right) \quad (2.13)$$

A principal vantagem desta aproximação em relação à FTFS e FTBS, consiste que ela resolve aproximadamente para qualquer valor de a . A figura (Fig. 2.2) mostra o gráfico gerado pelo código em *linguagem C* que foi criado para aproximar a equação através do método de Lax-Wendroff comparando com a solução encontrada na forma analítica.

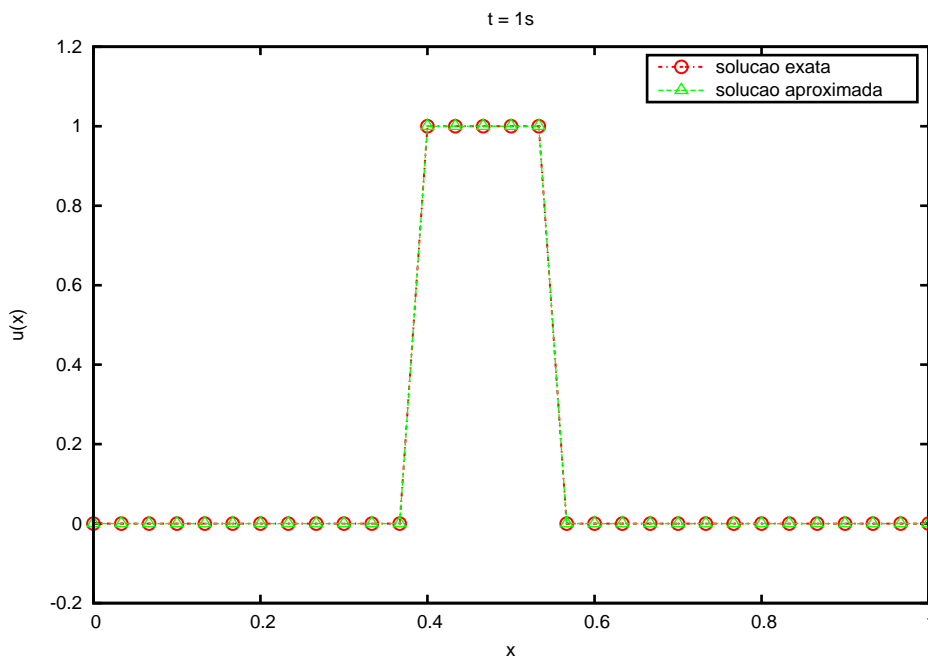


Figura 2.2: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação de convecção usando Lax Wendroff com 30 pontos no espaço.

2.3 Solução numérica da equação calor

Para a solução numérica da equação do calor a série de Taylor será utilizada para a aproximação das derivadas e montagem do esquema de diferenças finitas, tal montagem será feita por dois métodos: Método explícito e método implícito.

2.3.1 Método Explícito

O método explícito consiste na aproximação das derivadas no tempo t_n , com diferença progressiva na aproximação da derivada temporal.

$$\frac{\partial u(x_i, t_n)}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (2.15)$$

substituindo (2.14) e (2.15) em (1.3a)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t).$$

Isolando u_i^{n+1} e desconsiderando o erro local de truncamento, obtemos

$$u_i^{n+1} = \left(1 - 2\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_i^n + \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n + u_{i-1}^n) \quad (2.16)$$

Ao determinarmos a aproximação pelo método explícito pudemos criar um código em *linguagem C* que a reproduz graficamente comparando com a solução analítica (Fig. 2.3).

2.3.2 Método Implícito

O método implícito consiste na aproximação das derivadas no tempo t_{n+1} e diferença regressiva na aproximação da derivada temporal.

$$\frac{\partial u(x_i, t_{n+1})}{\partial t} = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + O(\Delta t), \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_{n+1})}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (2.18)$$

substituindo (2.17) e (2.18) em (1.3a)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = \alpha^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t).$$

Arrumando e desconsiderando o erro local de truncamento, obtemos

$$-\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} u_{i+1}^{n+1} + \left(1 + 2\frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}\right) u_i^{n+1} - \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2} u_{i-1}^{n+1} = u_i^n \quad (2.19)$$

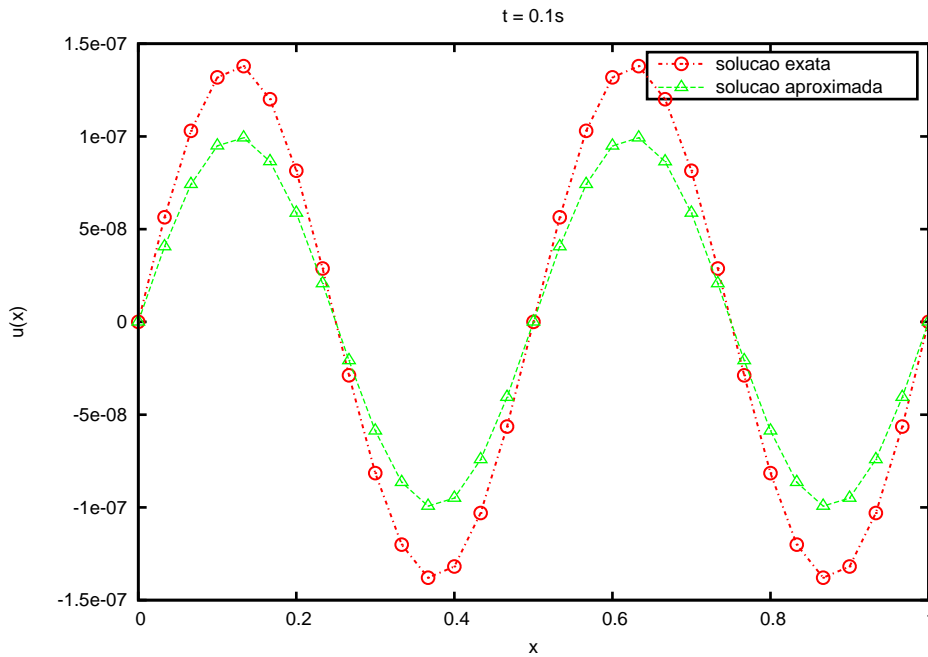


Figura 2.3: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação do calor usando o método explícito com 30 pontos no espaço.

Este método resultará em um sistema de equações acopladas, que na forma matricial é dado por

$$\begin{bmatrix} 1 + 2R & -R & 0 & \cdots & 0 \\ -R & 1 + 2R & -R & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & -R & 1 + 2R & -R \\ 0 & \cdots & 0 & -R & 1 + 2R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{IM-1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1^n + Ru_0^{n+1} \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{IM-1}^n + Ru_{IM}^{n+1} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Onde, $R = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$

Esta equação matricial pode ser resolvida pelo algoritmo de Thomas ([3]).

Algoritmo de Thomas

O algoritmo de Thomas, também conhecido como TDMA, consiste em uma técnica computacional para resolução de sistemas de equações na forma $Ax = r$, onde A é uma matriz tridiagonal,

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

A matriz A pode ser reescrita como o produto de duas matrizes bidiagonais L e U , uma de banda superior e outra inferior respectivamente (eq. 2.22) ,

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_N & \beta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \gamma_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

Comparando os dois membros da equação (2.22) concluímos que

$$\beta_1 = b_1 \quad \gamma_1 = \frac{c_1}{\beta_1} \quad (2.23)$$

$$\text{Para: } 2 \leq i \leq N-1: \quad \alpha_i = a_i \quad \beta_i = b_i - a_i \gamma_{i-1} \quad \gamma_i = \frac{c_i}{\beta_i} \quad (2.24)$$

$$\alpha_N = a_N \quad \beta_N = b_N - a_N \gamma_{N-1} \quad (2.25)$$

Com essa mudança de matrizes $Ax = r \Rightarrow (LU)x = r \Rightarrow L(Ux) = r \Rightarrow Ls = r$, onde s será uma matriz de apenas uma coluna, que contém nossas novas incógnitas s_i .

$$\begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_{N-1} & \beta_{N-1} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_N & \beta_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{N-1} \\ s_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_{N-1} \\ r_N \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Podemos resolver s da forma:

$$s_1 = \frac{r_1}{\beta_1} \quad (2.27)$$

$$\text{Para } i = 2, 3, \dots, N-1, N: \quad s_i = \frac{r_i - \alpha_i s_{i-1}}{\beta_i} \quad (2.28)$$

calculados os valores de s resolvemos outra equação $Ux = s$

$$\begin{bmatrix} 1 & \gamma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \gamma_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{N-1} \\ s_N \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

por fim calculamos então os valores de x

$$x_N = s_N \quad (2.30)$$

$$\text{Para } i = N - 1, N - 2, \dots, 2, 1: \quad x_i = s_i - \gamma_i x_{i+1} \quad (2.31)$$

resolvendo então o sistema.

Para realização das operações do algoritmo de Thomas (TDMA) criamos um código em *linguagem C* que nos gera a solução aproximada, representada juntamente com a solução analítica na Fig. 2.4.

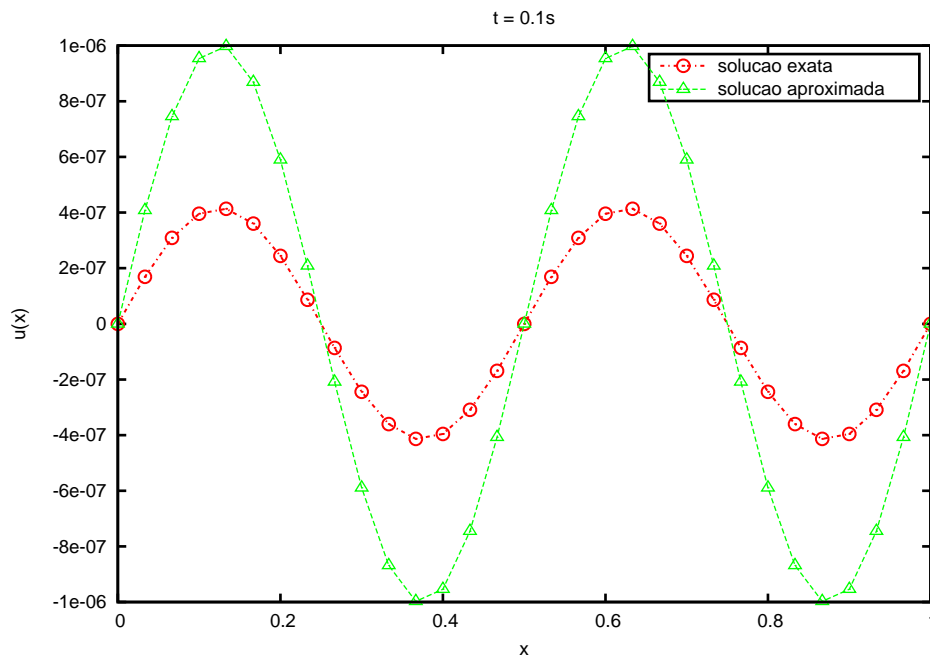


Figura 2.4: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação do calor usando o método implícito com 30 pontos no espaço.

2.4 Solução numérica da equação da onda

A série de Taylor será utilizada novamente para a aproximação das derivadas e montagem do esquema de diferenças finitas.

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial t^2} = \frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} + O(\Delta t^2), \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_n)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2), \quad (2.33)$$

substituindo (2.32) e (2.33) em (1.17a)

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\Delta t^2} = c^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2)$$

Isolando o termo u_i^{n+1} e desconsiderando o erro local de truncamento.

$$u_i^{n+1} = 2u_i^n + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) - u_i^{n-1}$$

Esta discretização possui um problema, pois para $n = 0$ é exigido o valor do ponto u_i^{-1} . Para resolver este problema utilizaremos a segunda condição inicial.

$$u_t(x, 0) = g(x)$$

Tomando a aproximação centrada no tempo.

$$u_t(x_i, t_n) = \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t}$$

Fazendo $t = 0$

$$u_t(x_i, 0) = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t}$$

$$g(x_i) = g_i = \frac{u_i^1 - u_i^{-1}}{2\Delta t}$$

$$2\Delta t(g_i) = u_i^1 - u_i^{-1}$$

$$u_i^{-1} = u_i^1 - 2\Delta t(g_i)$$

Portanto para $n = 0$

$$u_i^1 = 2u_i^0 + \frac{c^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} (u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0) - u_i^1 + 2\Delta t(g_i)$$

$$u_i^1 = u_i^0 + \frac{c^2 \Delta t^2}{2\Delta x^2} (u_{i+1}^0 - 2u_i^0 + u_{i-1}^0) + \Delta t(g_i)$$

E assim resolvemos o problema. Comparando graficamente temos (Fig. 2.5)

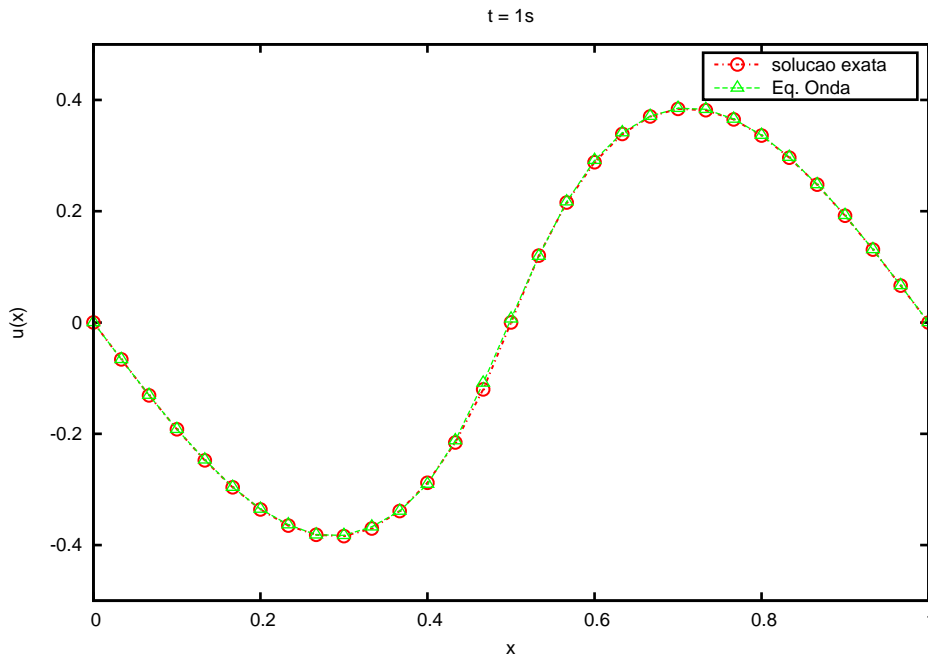


Figura 2.5: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação da onda com 30 pontos no espaço

Capítulo 3

Análise de Estabilidade

3.1 Introdução

Ao estudarmos métodos numéricos buscamos que a solução da equação de diferenças finitas se aproxime a solução da equação diferencial parcial que ela descreve, quando tal fenômeno ocorre dizemos que a equação de diferenças finitas converge. Neste capítulo apresentaremos formalmente a definição de convergencia e também duas definições que a auxiliaram, consistência e estabilidade. Por fim estudaremos a estabilidade dos esquemas numéricos propostos no capítulo anterior.

3.1.1 Consistência

Um esquema de diferenças finitas é consistente se descrever exatamente a equação diferencial parcial desejada, para determinarmos se uma equação de diferenças finitas é consistente fazemos a expansão em serie de Taylor dos pontos da equação em relação ao ponto u_i^n e aplicamos o limite com Δt e Δx tendendo a zero. Por exemplo a discretização de Lax-Wendroff para a equação de convecção é dada por:

$$u_i^{n+1} = u_i^n - a\Delta t \left(\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} \right) + \frac{a^2\Delta t^2}{2} \left(\frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{\Delta x^2} \right). \quad (3.1)$$

Aplicando a série de Taylor

$$\begin{aligned} u_i^n + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t} + O(\Delta t^2) &= u_i^n - a\Delta t \left(\frac{u_i^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} - u_i^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + O(\Delta x^3)}{2\Delta x} \right) + \\ &+ \frac{a^2\Delta t^2}{2} \left(\frac{u_i^n + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} - 2u_i^n + u_i^n - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x} + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(\Delta x^4)}{\Delta x^2} \right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Simplificando,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + O(\Delta t) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t\Delta x^2). \quad (3.3)$$

Aplicando o limite com Δt e Δx tendendo a 0 temos,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}. \quad (3.4)$$

Portanto o esquema é consistente com a equação de convecção.

3.1.2 Convergência

Como dito, durante o estudo de métodos numéricos buscamos que a solução aproximada convirja para a solução da equação diferencial parcial, quando isso ocorre denominamos que o esquema é convergente, na forma matemática:

Definimos uma partição no intervalo, com uma distribuição uniforme de pontos da malhas por um incremento Δx . Vamos considerar uma sequência $\{\Delta x_j\}, j = 1, 2, \dots$ tal que $\Delta x \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$. X_j denota um

espaço linear normado de diferença finita contendo a solução associada com o incremento Δx , e denotamos a norma de X_j por $\|\cdot\|_j$.

Um esquema de diferenças que aproxima um problema de valor inicial e de contorno contínuo, é convergente no tempo t se para toda sequência de partições $\{\Delta x_j\}$, com $(n+1)\Delta t \rightarrow t$,

$$\|\mathbf{u}^n - \mathbf{v}^n\|_j \rightarrow 0$$

com $j \rightarrow \infty$ e $\Delta t \rightarrow 0$.

3.1.3 O teorema de equivalência de Lax

Além da forma proposta anteriormente, existe outra forma de determinarmos se um esquema de diferenças finitas é convergente, é o teorema de equivalência de Lax, tal teorema utiliza a definição de estabilidade que será apresentada posteriormente.

TEOREMA DE EQUIVALÊNCIA DE LAX: Um esquema de diferenças consistente é convergente se, e somente se, este é estável.

3.2 Estabilidade

Assumiremos que os esquemas de diferenças finitas trabalhados até agora são todos consistentes, para determinarmos se estes são convergentes, analisaremos se são estáveis. A idéia da estabilidade está relacionada a ampliação ou anulação de erros de arredondamentos e de aproximações, quando um esquema anula tais erros não afetando a solução dizemos que o esquema é estável, entretanto quando tais erros são ampliados fazendo a solução divergir da solução real (denomina-se explodir a solução) dizemos que o esquema é instável. Os esquemas são divididos em três grupos quando analisamos a

estabilidade:

- Condicionalmente estável: o esquema é dito *condicionalmente estável* se este for estável para condições específicas (parâmetros da malha).
- Incondicionalmente estável: o esquema se mantém estável sobre quaisquer condições é denominado *incondicionalmente estável*.
- Incondicionalmente instável: o esquema se mantém instável sobre quaisquer condições é denominado *incondicionalmente instável*.

Faremos agora a análise da estabilidade de alguns esquemas expostos anteriormente, afim de classificá-los como condicionalmente estável, incondicionalmente estável ou incondicionalmente instável. Em específico no caso de condicionalmente estável determinaremos as condições de estabilidade.

3.3 Análise de estabilidade a partir da transformada de Fourier discreta.

Vamos considerar o estudo de esquemas numéricos que podem ser escritos como

$$\mathbf{u}^{n+1} = Q\mathbf{u}^n, \quad n \geq 0, \quad (3.5)$$

em que usamos os conjuntos $\ell_2 = \left\{ \mathbf{u} = (\dots, u_{-1}, u_0, u_1, \dots)^T : \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty \right\}$.

Dizemos que o esquema (3.5) é *estável* em relação à norma $\|\cdot\|$ se existirem constantes positivas Δx_0 e Δt_0 e constantes não negativas K e β tais que

$$\|\mathbf{u}^{n+1}\| \leq Ke^{\beta t} \|\mathbf{u}^0\| \quad (3.6)$$

para $0 \leq t = (n+1)\Delta t$, $0 < \Delta x < \Delta x_0$ e $0 < \Delta t \leq \Delta t_0$

A análise de estabilidade dos esquemas numéricos foi feita primeiramente considerando os problemas como problemas de valor inicial. Desse modo a técnica utilizada foi a transformada de Fourier discreta de $\mathbf{u} \in \ell_2$, que é a função $\hat{u} \in L_2[-\pi, \pi]$ definida por

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\xi} u_m \quad (3.7)$$

para $\xi \in [-\pi, \pi]$. Onde

$$L_2(R) = \left\{ v : R \rightarrow C : \int_R |v(x)|^2 dx < \infty \right\}$$

A utilização de (3.7) juntamente com a identidade de Parseval, $\|\hat{u}\|_2 = \|\mathbf{u}\|_2$, nos fornece as condições necessárias para o estudo da estabilidade.

3.3.1 Equação de Convecção

Faremos a análise nos esquemas montados a partir da equação (1.2) para isso usaremos $R = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$.

FTFS

Aplicando (3.7) em (2.5) temos,

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - R(\hat{u}^n e^{i\xi} - \hat{u}^n)$$

$$\hat{u}^{n+1} = [1 - R(e^{i\xi} - 1)]\hat{u}^n$$

aplicando a fórmula de Euler

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (1 + R - R \cos \xi - iR \sin \xi)\hat{u}^n(\xi)$$

Aplicando a resultado acima $n + 1$ vezes obtemos

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (\rho(\xi))^{n+1}\hat{u}^0(\xi)$$

onde $\rho(\xi) = 1 + R - R \cos \xi - iR \sin \xi$.

Agora, se escolhermos R de modo que $|\rho(\xi)|^2 < 1 \Rightarrow |\rho(\xi)| < 1$, teremos

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq \|\hat{u}^0\|_2 \quad (3.8)$$

Com esses resultados segue que escolhendo R de modo que $|1 + R - R \cos \xi - iR \sin \xi|^2 \leq 1$ poderemos fazer $K = 1$ e $\beta = 0$ em (3.6). Assim, concluímos que o esquema é condicionalmente estável e a condição necessária para a estabilidade do esquema (2.5) é

$$-1 \leq R \leq 0 \quad (3.9)$$

FTBS

Aplicando (3.7) em (2.8) temos,

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - R(\hat{u}^n - \hat{u}^n e^{-i\xi})$$

Colocando \hat{u}^n em evidencia,

$$\hat{u}^{n+1} = [1 - R(1 - e^{-i\xi})]\hat{u}^n$$

Aplicando a fórmula de Euler

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (1 - R + R \cos \xi - iR \sin \xi)\hat{u}^n(\xi)$$

Aplicando a resultado acima $n + 1$ vezes obtemos

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (\rho(\xi))^{n+1} \hat{u}^0(\xi)$$

onde $\rho(\xi) = 1 - R + R \cos \xi - iR \sin \xi$.

Agora, se escolhermos R de modo que $|\rho(\xi)|^2 < 1 \Rightarrow |\rho(\xi)| < 1$, teremos

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq \|\hat{u}^0\|_2 \quad (3.10)$$

Com esses resultados segue que escolhendo R de modo que $|1 - R + R \cos \xi - iR \sin \xi|^2 \leq 1$ poderemos fazer $K = 1$ e $\beta = 0$ em (3.6). Assim, concluímos que o esquema é condicionalmente estável e a condição necessária para a estabilidade do esquema (2.8) é

$$0 \leq R \leq 1 \quad (3.11)$$

FTCS

Aplicando (3.7) em (2.11) temos,

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - R \left(\frac{\hat{u}^n e^{i\xi} - \hat{u}^n e^{-i\xi}}{2} \right)$$

$$\hat{u}^{n+1} = \left[-R \left(\frac{1e^{i\xi} - e^{-i\xi}}{2} \right) \right] \hat{u}^n$$

aplicando a fórmula de Euler

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \left[1 - R \left(\frac{\cos \xi + i \sin \xi - \cos \xi + i \sin \xi}{2} \right) \right] \hat{u}^n(\xi)$$

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (1 - iR \sin \xi) \hat{u}^n(\xi)$$

Aplicando a resultado acima $n + 1$ vezes obtemos

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (\rho(\xi))^{n+1} \hat{u}^0(\xi)$$

onde $\rho(\xi) = 1 - iR \sin \xi$.

Agora, se escolhermos R de modo que $|\rho(\xi)|^2 < 1 \Rightarrow |\rho(\xi)| < 1$, teremos

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq \|\hat{u}^0\|_2 \quad (3.12)$$

Com esses resultados segue que escolhendo R de modo que $|1 - iR \sin \xi|^2 \leq 1$ poderemos fazer $K = 1$ e $\beta = 0$ em (3.6). Assim, uma condição necessária para a estabilidade do esquema (2.11) é

$$R = 0 \quad (3.13)$$

Entretanto $R = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$, ou seja, nunca pode ser 0, portanto o esquema (2.11) é incondicionalmente instável.

Lax-Wendroff

Aplicando (3.7) em (2.13) temos,

$$\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n - \frac{R}{2}(\hat{u}^n e^{i\xi} - \hat{u}^n e^{-i\xi}) + \frac{R^2}{2}(\hat{u}^n e^{i\xi} - 2\hat{u}^n + \hat{u}^n e^{-i\xi}) \quad (3.14)$$

$$\hat{u}^{n+1} = \left[1 - \frac{R}{2}(e^{i\xi} - e^{-i\xi}) + \frac{R^2}{2}(e^{i\xi} - 2 + e^{-i\xi}) \right] \hat{u}^n$$

Aplicando a fórmula de Euler

$$\hat{u}^{n+1} = \left[1 - \frac{R}{2}(\cos \xi + i \sin \xi - \cos \xi + i \sin \xi) - R^2 + \frac{R^2}{2}(\cos \xi + i \sin \xi + \cos \xi - i \sin \xi) \right] \hat{u}^n$$

$$\hat{u}^{n+1} = \left[1 - R^2 - \frac{R}{2}(2i \sin \xi) + \frac{R^2}{2}(2 \cos \xi) \right] \hat{u}^n$$

$$\hat{u}^{n+1} = (1 - R^2 - iR \sin \xi + R^2 \cos \xi) \hat{u}^n$$

Substituindo $(\cos \xi)$ por $(1 - 2 \sin^2 \frac{\xi}{2})$

$$\hat{u}^{n+1} = (1 - R^2 + R^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{\xi}{2}\right) - iR \sin \xi) \hat{u}^n$$

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (1 - 2R^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - iR \sin \xi) \hat{u}^n(\xi)$$

Aplicando a resultado acima $n + 1$ vezes obtemos

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (\rho(\xi))^{n+1} \hat{u}^0(\xi)$$

onde $\rho(\xi) = 1 - 2R^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - iR \sin \xi$.

Agora, se escolhermos R de modo que $|\rho(\xi)|^2 < 1 \Rightarrow |\rho(\xi)| < 1$, teremos

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq \|\hat{u}^0\|_2 \quad (3.15)$$

Com esses resultados segue que escolhendo R de modo que $|1 - 2R^2 \sin^2 \frac{\xi}{2} - iR \sin \xi|^2 \leq 1$ poderemos fazer $K = 1$ e $\beta = 0$ em (3.6). Assim, concluímos que o esquema é condicionalmente estável e a condição necessária para a estabilidade do esquema (2.8) é

$$|R| \leq 1$$

3.3.2 Equação do Calor

Analisaremos a partir de agora os esquemas montados a partir de (1.3), para isso usaremos $R = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$.

Método Explícito

Aplicando (3.7) no esquema (2.16) resulta em

$$\hat{u}^{n+1} = (1 - 2R)\hat{u}^n + R(\hat{u}^n e^{i\xi} + \hat{u}^n e^{-i\xi})$$

usando a fórmula de Euler

$$\hat{u}^{n+1} = [1 - 2R + R(\cos \xi + i \sin \xi + \cos \xi - i \sin \xi)]\hat{u}^n$$

$$\hat{u}^{n+1} = (1 - 2R + 2R \cos \xi)\hat{u}^n$$

substituindo $\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$

$$\hat{u}^{n+1} = (1 - 2R + 2R - 4R \sin^2 \frac{\xi}{2})\hat{u}^n$$

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (1 - 4R \sin^2 \frac{\xi}{2})\hat{u}^n(\xi) \quad (3.16)$$

Aplicando a resultado acima $n + 1$ vezes obtemos

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (\rho(\xi))^{n+1}\hat{u}^0(\xi) \quad (3.17)$$

onde $\rho(\xi) = 1 - 4R \sin^2 \frac{\xi}{2}$.

Agora, se escolhermos R de modo que $|\rho(\xi)| < 1$, teremos

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq \|\hat{u}^0\|_2 \quad (3.18)$$

Com esses resultados segue que escolhendo R de modo que $|1 - 4R \sin^2 \frac{\xi}{2}| \leq 1$ poderemos fazer $K = 1$ e $\beta = 0$ em (3.6). Assim, concluímos que o esquema (2.16) gerado no método explícito é condicionalmente estável e a condição necessária para a estabilidade é

$$R = \frac{\nu \Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.19)$$

Método Implícito

Aplicando (3.7) no esquema (2.19) resulta em

$$-R\hat{u}^{n+1}e^{i\xi} + (1 + 2R)\hat{u}^{n+1} - R\hat{u}^{n+1}e^{-i\xi} = \hat{u}^n$$

usando a fórmula de Euler

$$[1 + 2R - R(\cos \xi + i \sin \xi + \cos \xi - i \sin \xi)]\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n$$

$$(1 + 2R - 2R \cos \xi)\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n =$$

substituindo $\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$

$$(1 + 2R - 2R + 4R \sin^2 \frac{\xi}{2})\hat{u}^{n+1} = \hat{u}^n$$

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = \frac{1}{1 + 4R \sin^2 \frac{\xi}{2}} \hat{u}^n(\xi) \quad (3.20)$$

Aplicando a resultado acima $n + 1$ vezes obtemos

$$\hat{u}^{n+1}(\xi) = (\rho(\xi))^{n+1} \hat{u}^0(\xi) \quad (3.21)$$

onde $\rho(\xi) = \frac{1}{1 + 4R \sin^2 \frac{\xi}{2}}$.

Agora, se escolhermos R de modo que $|\rho(\xi)| < 1$, teremos

$$\|\hat{u}^{n+1}\|_2 \leq \|\hat{u}^0\|_2 \quad (3.22)$$

Com esses resultados segue que escolhendo R de modo que $|\frac{1}{1 + 4R \sin^2 \frac{\xi}{2}}| \leq 1$ poderemos fazer $K = 1$ e $\beta = 0$ em (3.6). Como todo valor que R puder assumir satisfaz a inequação, concluimos que o esquema (2.19) gerado no método implícito é incondicionalmente estável.

3.4 Análise de von Neumann

Os esquemas anteriores também foram estudados segundo a análise da estabilidade de Von Neumann, que consiste essencialmente em admitir soluções na forma

$$u_k^n = \xi^n e^{ijk\pi\Delta x} \quad (3.23)$$

A ideia neste caso é aproximar a função $u^n(x)$ definida nos pontos x_0, x_1, \dots, x_L por uma série de Fourier discreta

$$u^n(x) = \sum_{j=k_0}^{k_0+\theta} c_j e^{ijx}$$

onde $c_j = \frac{\langle f, \phi_j \rangle}{\langle \phi_j, \phi_j \rangle}$, $\theta = 0$ e $k_0 = \frac{L}{2}$ se L é par e $\theta = 1$ e $k_0 = \frac{L-1}{2}$ se L é ímpar.

3.4.1 Equação de Convecção

Novamente faremos a análise nos esquemas montados a partir da equação (1.2) para isso usaremos $R = \frac{a\Delta t}{\Delta x}$.

FTFS

Aplicando (3.23) em (2.5) temos,

$$\xi^{n+1} e^{ijk\pi\Delta x} = \xi^n e^{ijk\pi\Delta x} - R(\xi^n e^{ij(k+1)\pi\Delta x} - \xi^n e^{ijk\pi\Delta x}) \quad (3.24)$$

Simplificando por $\xi^n e^{ijk\pi\Delta x}$,

$$\xi = 1 - R(e^{ij\pi\Delta x} - 1)$$

assim

$$\xi = 1 + R - R \cos j\pi\Delta x - iR \sin j\pi\Delta x \quad (3.25)$$

Utilizando o valor encontrado em (3.25) para calcular $|\xi|^2$ temos,

$$|\xi|^2 = (1 + R - R \cos j\pi\Delta x)^2 + (R \sin j\pi\Delta x)^2$$

$$|\xi|^2 = 1 + 2R + R^2 - 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x + R^2 \cos^2 j\pi\Delta x + R^2 \sin^2 j\pi\Delta x$$

$$|\xi|^2 = 1 + 2R + R^2 - 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x + R^2$$

Fazendo $|\xi| \leq 1$ para obtermos o critério de estabilidade, temos

$$1 + 2R + R^2 - 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x + R^2 \leq 1$$

$$2R + 2R^2 - 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x \leq 0$$

$$2(R + R^2) - 2 \cos j\pi\Delta x (R + R^2) \leq 0$$

Simplificando por 2 e colocando $(R + R^2)$ em evidencia

$$(1 - \cos j\pi\Delta x)(R + R^2) \leq 0$$

Como $(1 - \cos j\pi\Delta x)$ é sempre positivo, para que a inequação seja verdadeira

$$R + R^2 \leq 0$$

Assim nossa condição de estabilidade é $-1 \leq R \leq 0$, coincidindo com o encontrado anteriormente.

FTBS

Aplicando (3.23) em (2.8) temos,

$$\xi^{n+1} e^{ijk\pi\Delta x} = \xi^n e^{ijk\pi\Delta x} - R(\xi^n e^{ijk\pi\Delta x} - \xi^n e^{ij(k-1)\pi\Delta x}) \quad (3.26)$$

Simplificando por $\xi^n e^{ijk\pi\Delta x}$,

$$\xi = 1 - R(1 - e^{-ij\pi\Delta x})$$

assim

$$\xi = 1 - R + R \cos j\pi\Delta x - iR \sin j\pi\Delta x \quad (3.27)$$

Utilizando o valor encontrado em (3.27) para calcular $|\xi|^2$ temos,

$$|\xi|^2 = (1 - R + R \cos j\pi\Delta x)^2 + (R \sin j\pi\Delta x)^2$$

$$|\xi|^2 = 1 - 2R + R^2 + 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x + R^2 \cos^2 j\pi\Delta x + R^2 \sin^2 j\pi\Delta x$$

$$|\xi|^2 = 1 - 2R + R^2 + 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x + R^2$$

Fazendo $|\xi| \leq 1$ para obtermos o critério de estabilidade, temos

$$1 - 2R + R^2 + 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x + R^2 \leq 1$$

$$-2R + 2R^2 + 2R \cos j\pi\Delta x - 2R^2 \cos j\pi\Delta x \leq 0$$

$$2(-R + R^2) + 2 \cos j\pi\Delta x (R - R^2) \leq 0$$

Simplificando por 2 e colocando $(R - R^2)$ em evidencia

$$(1 - \cos j\pi\Delta x)(R - R^2) \leq 0$$

Como $(1 - \cos j\pi\Delta x)$ é sempre positivo, para que a inequação seja verdadeira

$$R - R^2 \leq 0$$

Assim nossa condição de estabilidade é $0 \leq R \leq 1$, coincidindo com o encontrado anteriormente, vemos graficamente ao distanciamento à solução real quando aplicamos R fora da condição de estabilidade. Mostramos na figura (Fig. 3.1) o que acontece quando não obedecemos a condição de estabilidade.

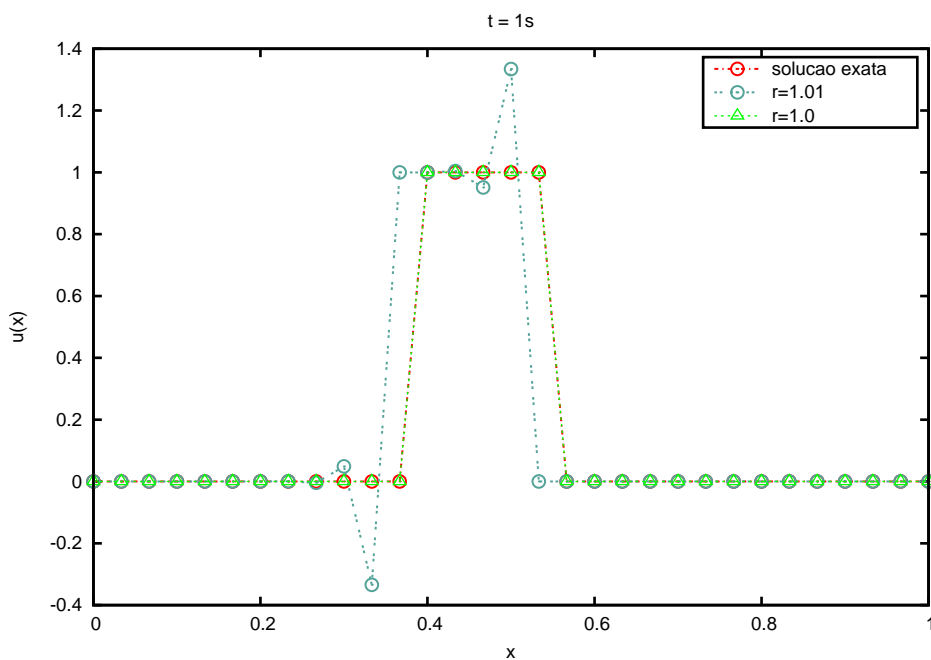


Figura 3.1: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação de convecção usando a técnica FTBS com 30 pontos no espaço em duas condições: $R = 1$ e $R = 1,01$

FTCS

Aplicando (3.23) em (2.11) temos,

$$\xi^{n+1} e^{ijk\pi\Delta x} = \xi^n e^{ijk\pi\Delta x} - \frac{R}{2} (\xi^n e^{ij(k+1)\pi\Delta x} - \xi^n e^{ij(k-1)\pi\Delta x}) \quad (3.28)$$

Simplificando por $\xi^n e^{ijk\pi\Delta x}$,

$$\xi = 1 - \frac{R}{2} (e^{ij\pi\Delta x} - e^{-ij\pi\Delta x})$$

$$\xi = 1 - \frac{R}{2} (\cos j\pi\Delta x + i \sin j\pi\Delta x - \cos j\pi\Delta x + i \sin j\pi\Delta x)$$

$$\xi = 1 - Ri \sin j\pi\Delta x \quad (3.29)$$

Utilizando o valor encontrado em (3.29) para calcular $|\xi|^2$ temos,

$$|\xi|^2 = (1)^2 + (R \sin j\pi\Delta x)^2$$

$$|\xi|^2 = 1 + R^2 \sin^2 j\pi\Delta x$$

Fazendo $|\xi| \leq 1$ para obtermos o critério de estabilidade, temos

$$1 + R^2 \sin^2 j\pi\Delta x \leq 1$$

$$R^2 \sin^2 j\pi\Delta x \leq 0$$

Como $(\sin^2 j\pi\Delta x)$ é sempre positivo, para que a inequação seja verdadeira

$$R^2 \leq 0$$

O que é impossível, pois $R \in \mathbb{R}$ e $R \neq 0$, logo concluímos novamente que o esquema é incondicionalmente instável.

Lax-Wendroff

Aplicando (3.23) em (2.13) temos,

$$\begin{aligned} \xi^{n+1} e^{ijk\pi\Delta x} &= \xi^n e^{ijk\pi\Delta x} - \frac{R}{2} (\xi^n e^{ij(k+1)\pi\Delta x} - \xi^n e^{ij(k-1)\pi\Delta x}) + \\ &+ \frac{R^2}{2} (\xi^n e^{ij(k+1)\pi\Delta x} - 2\xi^n e^{ijk\pi\Delta x} + \xi^n e^{ij(k-1)\pi\Delta x}) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Simplificando por $\xi^n e^{ijk\pi\Delta x}$,

$$\xi = 1 - \frac{R}{2} (e^{ij\pi\Delta x} - e^{-ij\pi\Delta x}) + \frac{R^2}{2} (e^{ij\pi\Delta x} - 2 + e^{-ij\pi\Delta x})$$

$$\begin{aligned}
\xi &= 1 - \frac{R}{2}(\cos j\pi\Delta x + i \sin j\pi\Delta x - \cos j\pi\Delta x + i \sin j\pi\Delta x) - R^2 + \\
&+ \frac{R^2}{2}(\cos j\pi\Delta x + i \sin j\pi\Delta x + \cos j\pi\Delta x - i \sin j\pi\Delta x) \\
\xi &= 1 - R^2 - \frac{R}{2}(2i \sin j\pi\Delta x) + \frac{R^2}{2}(2 \cos j\pi\Delta x) \\
\xi &= 1 - R^2 - Ri \sin j\pi\Delta x + R^2 \cos j\pi\Delta x
\end{aligned}$$

Substituindo $(\cos j\pi\Delta x)$ por $(1 - 2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2})$

$$\begin{aligned}
\xi &= 1 - R^2 + R^2 \left(1 - 2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}\right) - Ri \sin j\pi\Delta x \\
\xi &= 1 - R^2 + R^2 - 2R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} - Ri \sin j\pi\Delta x
\end{aligned}$$

$$\xi = 1 - 2R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} - Ri \sin j\pi\Delta x \quad (3.31)$$

Utilizando o valor encontrado em (3.31) para calcular $|\xi|^2$ temos,

$$\begin{aligned}
|\xi|^2 &= \left(1 - 2R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}\right)^2 + (R \sin j\pi\Delta x)^2 \\
|\xi|^2 &= 1 - 4R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 4R^4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} + R^2 \sin^2 j\pi\Delta x
\end{aligned}$$

Substituindo $(\sin j\pi\Delta x)$ por $(2 \sin \frac{j\pi\Delta x}{2} \cos \frac{j\pi\Delta x}{2})$

$$\begin{aligned}
|\xi|^2 &= 1 - 4R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 4R^4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} + R^2 \left(2 \sin \frac{j\pi\Delta x}{2} \cos \frac{j\pi\Delta x}{2}\right)^2 \\
|\xi|^2 &= 1 - 4R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 4R^4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 4R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \cos^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \\
|\xi|^2 &= 1 - 4R^2 \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} (1 - \cos^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}) + 4R^4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2}
\end{aligned}$$

Substituindo $(1 - \cos^2 \frac{j\pi\Delta x}{2})$ por $(\sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2})$

$$|\xi|^2 = 1 - 4R^2 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 4R^4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2}$$

Fazendo $|\xi| \leq 1$ para obtermos o critério de estabilidade, temos

$$\begin{aligned} 1 - 4R^2 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 4R^4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} &\leq 1 \\ -4R^2 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 4R^4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} &\leq 0 \\ 4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2} (R^4 - R^2) &\leq 0 \end{aligned}$$

Como $(4 \sin^4 \frac{j\pi\Delta x}{2})$ é sempre positivo, para que a inequação seja verdadeira

$$(R^4 - R^2) \leq 0$$

$$R^2 \leq 1$$

Extraindo a raiz de ambos os lados, concluímos novamente que nosso critério de estabilidade é $|R| \leq 1$. Usando novamente o código em *linguagem C* para representar graficamente, entretanto faremos dois gráficos, onde um obedece a condição de estabilidade e o outro não (Fig. 3.2).

3.4.2 Equação do Calor

Novamente analisaremos os esquemas montados a partir de (1.3), para isso usaremos $R = \frac{\alpha^2 \Delta t}{\Delta x^2}$.

Método Explícito

$$u_k^{n+1} = (1 - 2R)u_k^n + R(u_{k+1}^n + u_{k-1}^n)$$

Aplicando a transformada (3.23),

$$\xi^{n+1} e^{ijk\pi\Delta x} = (1 - 2R)\xi^n e^{ijk\pi\Delta x} + R(\xi^n e^{ij(k+1)\pi\Delta x} + \xi^n e^{ij(k-1)\pi\Delta x})$$

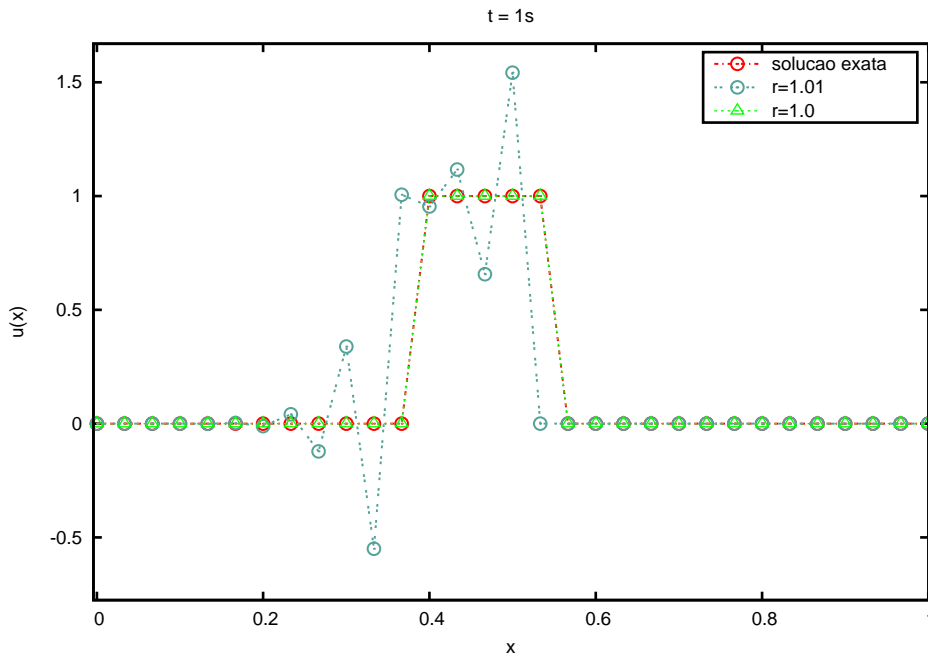


Figura 3.2: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação de convecção usando Lax-Wendroff com 30 pontos no espaço em duas condições: $R = 1$ e $R = 1,01$

Simplificando por $\xi^n e^{ijk\pi\Delta x}$

$$\xi = (1 - 2R) + R(e^{ij\pi\Delta x} + e^{-ij\pi\Delta x})$$

usando a fórmula de Euler

$$\xi = 1 - 2R + R(\cos j\pi\Delta x + i \sin j\pi\Delta x + \cos j\pi\Delta x - i \sin j\pi\Delta x)$$

$$\xi = 1 - 2R + 2R \cos j\pi\Delta x$$

substituindo $\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$

$$\xi = 1 - 2R + 2R - 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}$$

$$\xi = 1 - 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}$$

Fazendo $|\xi| \leq 1$ para obtermos o critério de estabilidade, podemos reescrevê-lo como $-1 \leq \xi \leq 1$

$$-1 \leq 1 - 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \leq 1$$

$$-2 \leq -4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \leq 0$$

$$0 \leq 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \leq 2$$

$$0 \leq R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \leq \frac{1}{2}$$

Como $\sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}$ varia entre 0 e 1 determinamos que

$$0 \leq R \leq \frac{1}{2}$$

Assim como havíamos concluído anteriormente. Usando novamente o código em *linguagem C* para representar graficamente, entretanto faremos dois gráficos, onde um obedece a condição de estabilidade e o outro não (Fig. 3.3).

Método Implícito

$$-Ru_{k+1}^{n+1} + (1 + 2R)u_k^{n+1} - Ru_{k-1}^{n+1} = u_k^n$$

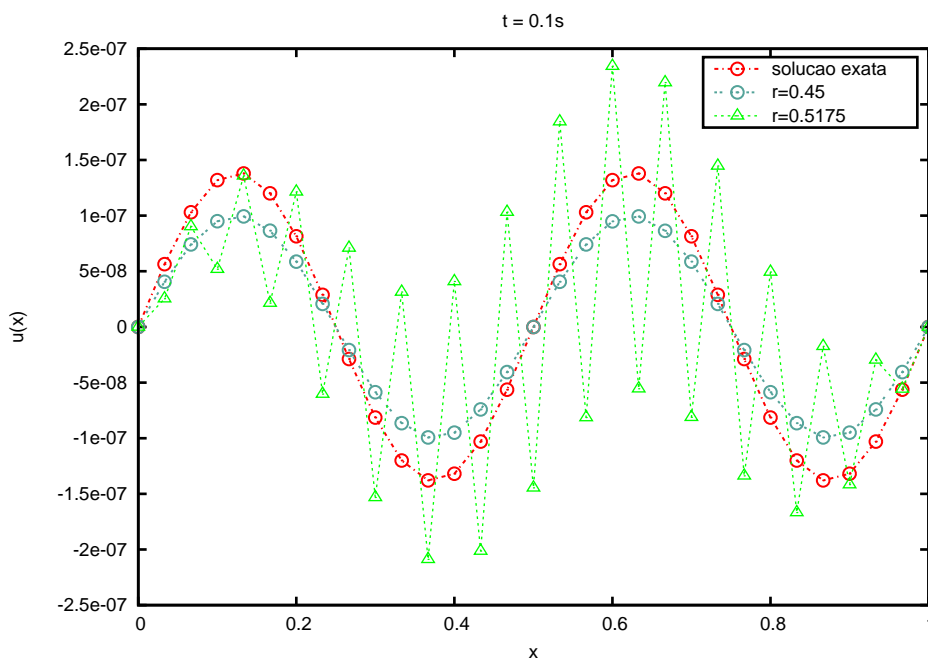


Figura 3.3: Comparação entre a solução numérica e a solução analítica da equação do calor usando a método explícito com 30 pontos no espaço em duas condições: $R = 0,45$ e $R = 0,5175$

Aplicando a transformada (3.23),

$$-R\xi^{n+1}e^{ij(k+1)\pi\Delta x} + (1 + 2R)\xi^{n+1}e^{ijk\pi\Delta x} - R\xi^{n+1}e^{ij(k-1)\pi\Delta x} = \xi^n e^{ijk\pi\Delta x}$$

Simplificando por $\xi^n e^{ijk\pi\Delta x}$

$$-R\xi e^{ij\pi\Delta} + (1 + 2R)\xi - R\xi e^{-ij\pi\Delta} = 1$$

$$\xi(-Re^{ij\pi\Delta} + 1 + 2R - Re^{-ij\pi\Delta}) = 1$$

Aplicando a fórmula de Euler

$$\xi(-R \cos j\pi\Delta x - iR \sin j\pi\Delta x + 1 + 2R - R \cos j\pi\Delta x + iR \sin j\pi\Delta x) = 1$$

$$\xi(-2R \cos j\pi\Delta x + 1 + 2R) = 1$$

substituindo $\cos a = 1 - 2 \sin^2 \frac{a}{2}$

$$\xi\left(-2R + 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} + 1 + 2R\right) = 1$$

$$\xi\left(1 + 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}\right) = 1$$

$$\xi = \frac{1}{1 + 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}}$$

Fazendo $|\xi| \leq 1$ para obtermos o critério de estabilidade, podemos reescrevê-lo como $-1 \leq \xi \leq 1$

$$-1 \leq \frac{1}{1 + 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}} \leq 1$$

$$-1 - 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \leq 1 \leq 1 + 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}$$

somando $-1 + 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}$, temos

$$-2 \leq 4R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \leq 8R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}$$

$$-\frac{1}{2} \leq R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \leq 2R \sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2}$$

Que será sempre verdade pois, $R > 0$ e $\sin^2 \frac{j\pi\Delta x}{2} \geq 0$, portanto concluímos novamente que o método implícito é incondicionalmente estável.

Considerações Finais

Ao final deste trabalho podemos concluir que existem ao menos duas boas técnicas para a solução analítica de equações diferenciais parciais: o método das características para a equação de convecção e o método de separação de variáveis para as equações do calor e da onda. No capítulo 2 mostramos o método numérico de diferenças finitas e suas formas de aproximar uma equação, algumas aproximações mais precisas outras nem tanto. Entretanto, a exemplo da método implícito que graficamente possui uma solução menos próxima a solução real que a o método explícito, vimos posteriormente, no capítulo 3, que apenas esta se mantém estável em determinadas condições, já que é incondicionalmente estável, enquanto o método explícito é condicionalmente estável. Podemos assim concluir que a qualidade da solução depende também das condições em que o problema se configura.

Portanto concluímos que o estudo de métodos numéricos é uma área muito importante da matemática, pois nos dá soluções aproximadas para EDPs. No nosso caso para equações que já conhecíamos a solução analítica, para podermos analisar nossas técnicas de aproximação. Entretanto, podem ser utilizadas em equações que ainda não possuem uma solução analítica. Por fim concluímos que métodos numéricos deveriam ser mais trabalhados com os alunos, não restringindo-se apenas a TCCs e iniciações científicas.

Bibliografia

- [1] BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. - *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. 7. ed*, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 2002.
- [2] FORTUNA, Armando de O. - *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos - Conceitos Básicos e Aplicações*, EDUSP, São Paulo, 2000.
- [3] THOMAS, J. W. - *Numerical Partial Differential Equations: Finite difference methods*, Springer, New York, 1995.
- [4] FIGUEIREDO, Djairo G. - *Análise de Fourier e equações diferenciais parciais*, IMPA, Rio de Janeiro, 2000.
- [5] LIMA, Elon L. - *Curso de Análise, Vol. 1*, SBM, Rio de Janeiro, 1992.
- [6] FLETCHER, C. A. J. - *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vol. 1*, Springer, New York, 1991.
- [7] FARLOW, Stanley J. - *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, Inc John Wiley & Sons, Toronto, 1982.
- [8] ZACHMANOGLU, E. C.; THOE, Dale W. - *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover Publications Inc, New York, 1986.

- [9] RUGGIERO, Márcia Aparecida Gomes; LOPES, Vera Lúcia da Rocha.
- *Cálculo numérico: aspectos teóricos e computacionais. 2. ed.*, Makron
Books, São Paulo, 1997.
- [10] CUNHA, M.Cristina C. - *Métodos numéricos. 2ª ed. rev.ampl.*, Ed.da
UNICAMP, Campinas, 2003.
- [11] SCHILDT, Herbert. - *C completo e total. 3. ed. rev. atual.*, Makron
Books, São Paulo, 1997.