UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

José Alberto Mendes Bacha

Geometria Plana: Teoremas Clássicos e Aplicações

BELÉM - PA

19 de dezembro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

José Alberto Mendes Bacha

Geometria Plana: Teoremas Clássicos e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática. Orientado pelo Prof. Msc. Adam Oliveira da Silva.

BELÉM - PA
19 de dezembro de 2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

José Alberto Mendes Bacha

Geometria Plana: Teoremas Clássicos e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

____

Prof°. Msc. Adam Oliveira da Silva

____

Prf°.Dr. José Antonio Moraes Vilhena

____

Profª. Msc. Joelma Morbach

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ____________________

Dedicatória

À Deus que neste momento de suma importância na minha vida tenho muito a agradecer. Fizestes presente em todos os momentos da minha jornada para que eu pudesse alcançar meu objetivo. Tornaste-me forte, corajoso e perseverante em busca de conhecimento. Foi um sonho que virou realidade, uma conquista pessoal que se tornou um compromisso.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus, que diante dos obstáculos me mostrou que nessa vida tudo é possível quando estamos com ele, e por estar presente em todos os momentos de minha vida.

À minha família, meus avós Habib de Almeida Bacha e Rosalina Barros Bacha, a meus pais José Norivaldo Barros Bacha e Ana Lúcia Mendes Bacha, e a meu irmão José Habib Mendes Bacha.

Em especial a minha namorada Izabella Silva e Silva que esteve comigo nos momentos bons e difíceis que passei, e a família dela.

Ao meu orientador, professor Msc. Adam Oliveira da Silva, pelo interesse, dedicação, apoio e grandiosas sugestões em todas as fases da preparação desse trabalho. E por contribuir diretamente em minha formação por quatro semestres como professor.

A banca examinadora, pela leitura do trabalho e sugestões apresentadas.

A todos os professores que contribuíram direta e indiretamente em minha formação acadêmica.

Ao amigo Luiz Carvalho e aos amigos de um modo geral, os que estavam perto e os que estavam longe, mas que sempre torceram por mim.

Epígrafe

"O educador democrático não pode negar-se o dever de, na sua prátca docente, reforçar a capacidade crítica do educando, sua curiosidade, sua insubmissão".

Paulo Freire.

Resumo

Neste trabalho faremos um breve estudo sobre demonstrações e aplicações de alguns teoremas clássicos da geometria plana, tendo como pré-requisitos o conteúdo da geometria Euclidiana plana. O intuito é resgatar tais teoremas muitas das vezes esquecidos, pois eles tem um grande papel na resolução de muitos problemas geométricos, tanto no ensino básico, quanto na graduação. Esses teoremas de um modo geral ajudam professores e alunos a fazerem aplicações em várias áreas do conhecimento, tais como, a física, química, engenharia, tecnologia, ciência, entre outras. Sabendo que novas aplicações surgem a cada dia.

Palavras-chave: Teoremas Clássicos - Aplicações - Aprendizagem.

Conteúdo

Introdução

As primeiras noções de geometria surgiram quando o homem sentiu a necessidade de efetuar medidas. Na antiga Mesopotâmia e no antigo Egito, onde o conhecimento geométrico resumia-se a um aglomerado de procedimentos práticos de mensuração aplicada, principalmente na agricultura. Eram cálculos empíricos de comprimentos, áreas e volumes com empregos de formulas, muitas delas erroneamente utilizadas.

O objetivo geral desse trabalho tem como ponto principal, ajudar professores e alunos da licenciatura em matemática e outras áreas do conhecimento no desenvolvimento de demonstrações de teoremas clássicos da geometria plana, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas geométricos, estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino de graduação, e como objetivo especifico mostrar as demonstrações de teoremas e suas principais aplicaçoes,tais como, teorema Menelau, teorema de Carnot, teorema de Stewart e teorema da corda quebrada de Arquimede. Sendo que este trabalho foi delimitado para apresentar os teoremas que tem aplicaçoes em outros teoremas.

No capítulo 1 iniciarei com algumas notações e definições da geometria Euclidiana plana. Em seguida são apresentadas alguns teoremas e algumas proposições sobre triângulos e circunferências. Sendo que os teoremas envolvendo congruência e semelhança de triângulos não são demonstrados, mas podem ser encontrados as demonstrações no livro cuja referência é: "REZENDE, Eliane. Geometria Euclidiana plana e construções geométricas/ Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz - 2ª edição - Campinas, SP: editora da Unicamp, 2008". Esse capítulo servirá de pré-requisito para as demonstrações dos teoremas dos capítulos seguintes.

No capítulo 2 serão apresentados as principais demonstrações dos teoremas que serão aplicados em outros teoremas abordados no capítulo 3, começando primeiramente com o Teorema de Menelau, em seguida, o Teorema de Carnot, Teorema de Stewart e finalizando o capítulo com o Teorema da corda quebrada de Arquimedes.

No capítulo 3 apresentarei aplicaçoes dos teoremas estudados no capítulo 2, iniciando com aplicação do teorema de Menelau, logo após, aplicação do teorema de Menelau e carnot, aplicação do teorema de Stewart e finalizando esse capítulo com a aplicação do teorema da corda quebrada de Arquimedes.

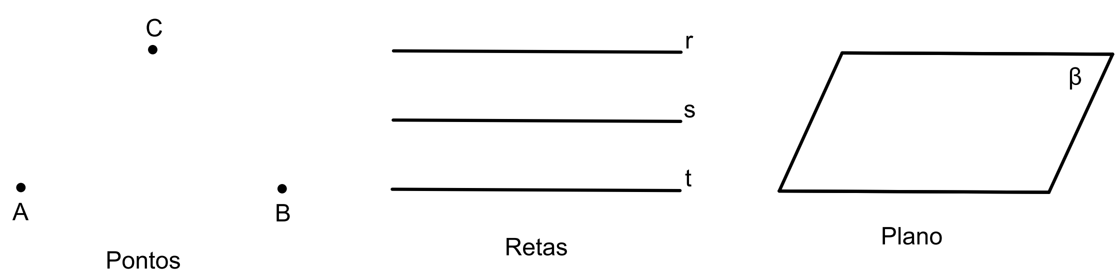
Capítulo 1

Preliminares

1.1 Notações

1.1.1 Pontos, Retas e Planos

Denotaremos os pontos por letras maiúsculas do nosso alfabeto, as retas por letras minusculas do nosso alfabeto e os planos por letras gregas.



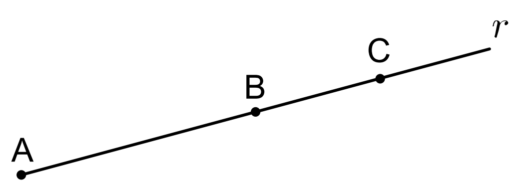
Se dois pontos A e B estão em uma mesma reta r, podemos representar essa reta por AB

$$r = \overleftrightarrow{AB}$$

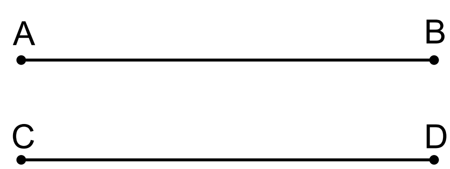
1.2 Segmentos de retas e Ângulos

Definição 1.1 *Dados dois pontos distintos A e B pertencente a uma reta, a reunião do conjunto desses dois pontos com o conjunto dos pontos que estão entre eles é um segmento de reta, indicado por $\overline{AB}$.*

Definição 1.2 *Se A e B são pontos distintos, o conjunto construido pelos pontos do segmento AB e por todos os pontos C tais que B esta entre A e C, denomina-se semi-reta de origem A contendo o ponto B, a qual denotamos por $\overrightarrow{AB}$.*



Definição 1.3 *Dois segmentos são congruentes se possuem a mesma medida ou comprimento.*

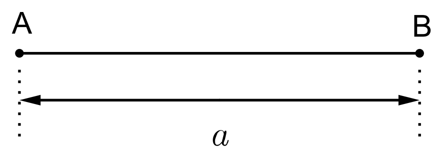


$$m(\overline{AB}) = m(\overline{CD}) \Rightarrow AB \equiv CD$$

Definição 1.4 *Distâsncia entre dois pontos:*

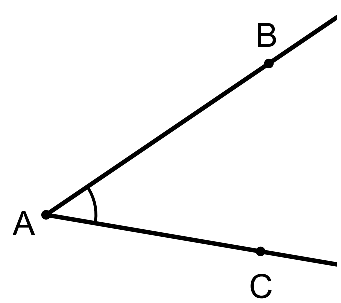
a) Distância geométrica: Dados dois pontos distintos A e B, a distância entre eles é a medida do segmento de extremidades de A e B.

b) Distância métrica: Dados dois pontos distintos A e B, a distância entre A e B é a medida (número, comprimento) do segmento $\overline{AB}$. Se A e B coincidem dizemos que a distância é zero.



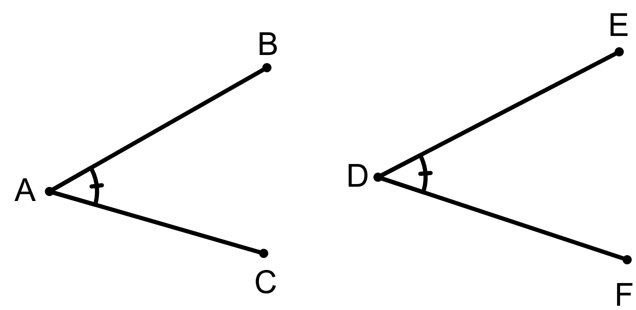
$$\overline{AB} = a$$

Definição 1.5 *Um ângulo é a união de duas semi-retas distintas que tem a mesma origem. Se um ângulo é formado pelas semi-retas* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$*, então essas semirretas são chamadas lados do ângulo e o ponto* A *é chamado vértice do ângulo.*



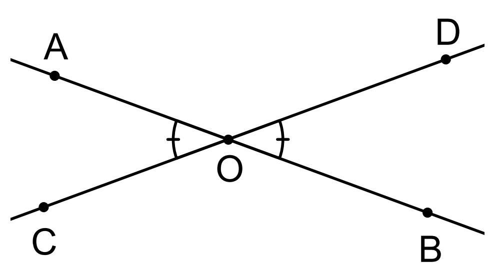
Desta forma representamos o ângulo BAC *por* $\widehat{BAC}$ *ou* $\widehat{CAB}$*, e se não houver confusão podemos denotar por* $\widehat{A}$.

Definição 1.6 *Dois ângulos são ditos congruentes se possuírem as mesmas medidas.*



$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{EDF}) \Rightarrow \widehat{BAC} \equiv \widehat{EDF}$$

Definição 1.7 *Dois ângulos são opostos pelo vertice, se somnte se, os lados de um deles são as respectivas semi-retas opostas aos lados do outro, e ambos são congruentes.*

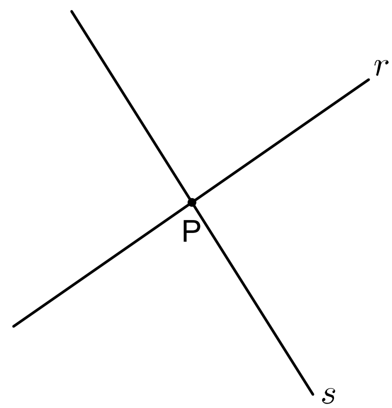


Temos

$\overrightarrow{OA}$ *oposto a* $\overrightarrow{OB}$ *e* $\overrightarrow{OC}$ *oposto a* $\overrightarrow{OD}$, *logo* $\widehat{AOC}$ *e* $\widehat{BOC}$ *são opostos pelo vértices.*

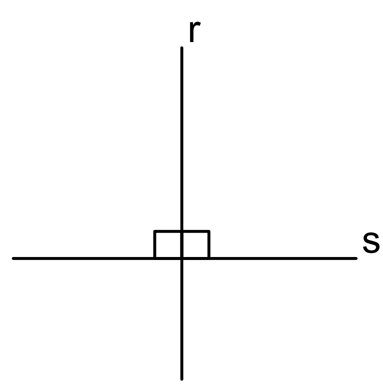
1.3 Concorrência, Paralelismo e Colinearidade

Definição 1.8 (Retas concorrêntes) *Duas retas são concorrentes se, somente se, elas têm um único ponto em comum.*

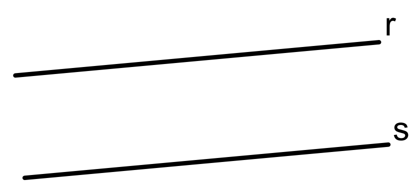


$$r \cap s \neq \oslash \Rightarrow r \cap s = \{P\}$$

Duas retas são perpediculares se, e somente se,são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes, ou seja, ambos medem 90^0.

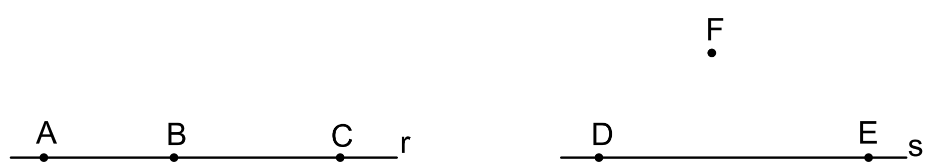


Definição 1.9 (Paralelismo) *Duas retas são paralelas se, e somente se, não tem nenhum ponto em comum.*



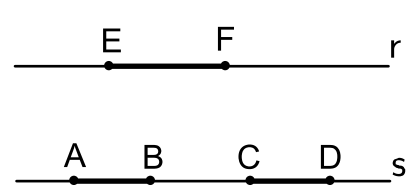
$$r \cap s = \emptyset \Rightarrow r // s$$

Definição 1.10 (Pontos colineares) *Se vários pontos estão situados em uma mesma reta, dizemos que tais pontos são colineares, caso contrario chamamos de não colineares.*



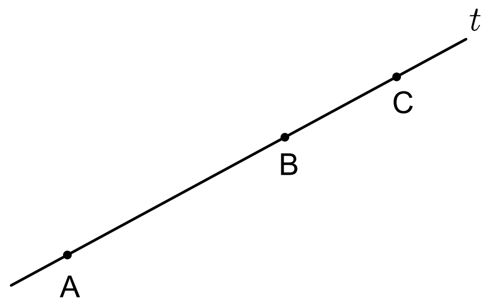
Os pontos A, B e C são clineares e os pontos D, E e F são não colineares

Definição 1.11 (Segmento colineares)*Se vários segmentos de reta estão situados em uma mesma reta, dizemos tais segmentos são colineares, caso contrario chamamos de não colineares.*

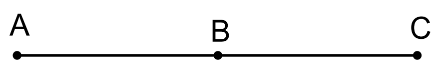


$\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ são colineares.
$\overline{AB}$ e $\overline{EF}$ são não colineares.

Definição 1.12 *Se três pontos distintos A, B e C são colineares e $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, dizemos que B está entre A e C.*



Definição 1.13 *Se B está entre A e C e $\overline{AB}=\overline{BC}$, dizemos que B é ponto médio do seguimento $\overline{AC}$.*



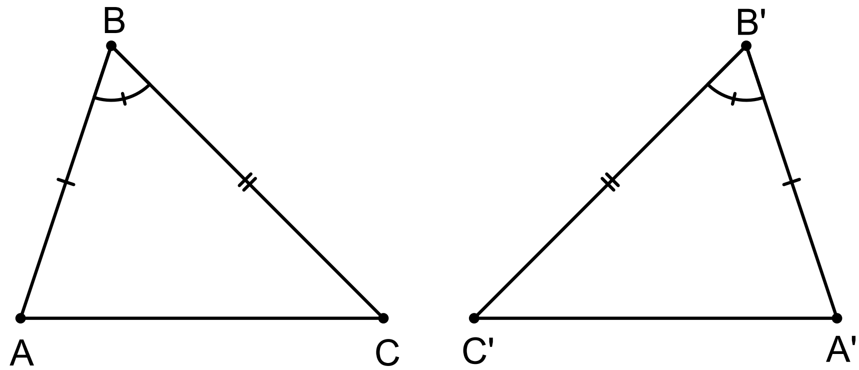
$$\overline{AB}=\overline{BC}$$

1.4 Triângulos

1.4.1 Congruência de Triângulos

Definição 1.14 *Dois triângulos são denominados congruentes se tem ordenadamente congruentes os três lados (`L`) e os três ângulos (`A`). Veremos quatro casos de congruências entre dois triângulos.*

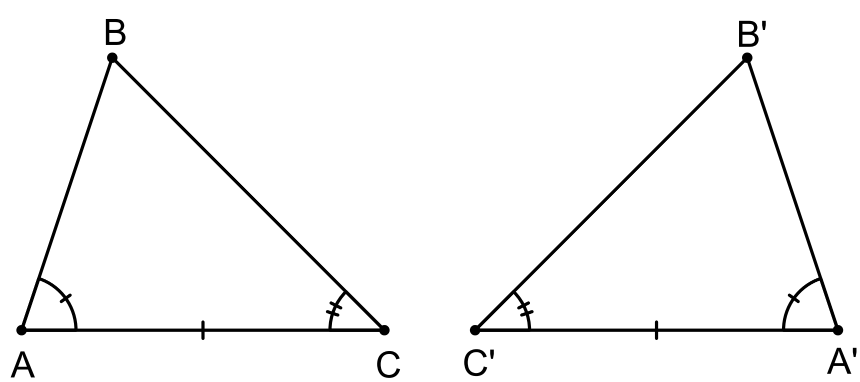
Caso 1.4.1.1 *(L-A-L) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois lados e o ângulo compreendido entre esses dois lados, então eles são congruentes. Este caso é normalmente dado como postulado.*



Temos,

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}\ \ e\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'},\text{ logo }\ \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

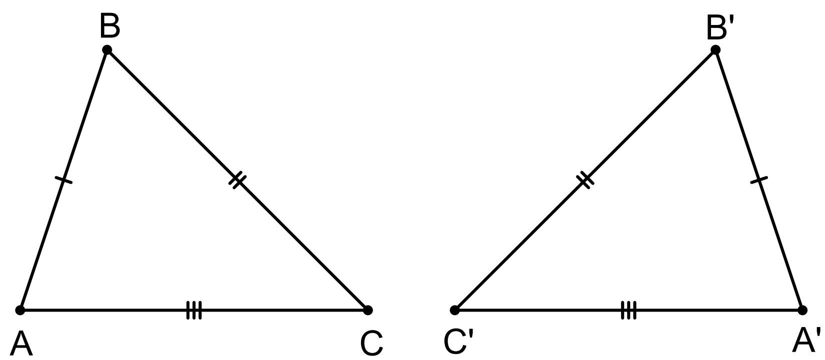
Caso 1.4.1.2 *(A-L-A) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes dois ângulos e o lado adjacente a esses ângulos, então eles são congruentes.*



Temos,

$$\widehat{BAC} \equiv \widehat{B'A'C'},\ \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}\ \ e\ \widehat{ACB} \equiv \widehat{A'C'B'},\text{ logo } \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

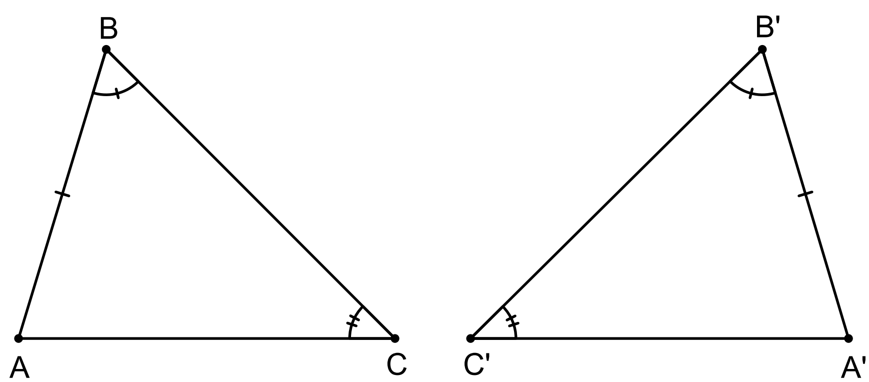
Caso 1.4.1.3 *(L-L-L) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes os três lados, então eles são congruentes.*



Temos,

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \overline{BC} \equiv \overline{B'C'} \text{ e } \overline{CA} \equiv \overline{C'A'}, \text{ logo } \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

Caso 1.4.1.4 *(L-A-A) Se dois triângulos têm ordenadamente congruentes um lado, um ângulo adjacente e um ângulo oposto a esse lado, então eles são congruentes.*



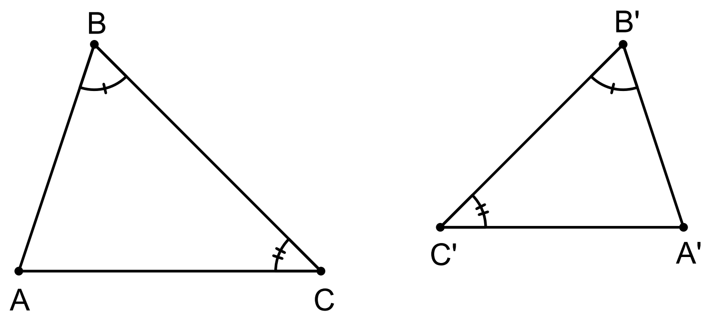
Temos,

$$\overline{AB} \equiv \overline{A'B'},\ \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \text{ e } \widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}, \text{ logo } \Delta ABC \equiv \Delta A'B'C'.$$

1.4.2 Semelhança de Triângulos

Definição 1.15 *Dois triângulos são semelhantes se os três ângulos (*`A`*) são ordenadamente congruentes e se os lados (*`L`*) correspondentes são proporcionais. Veremos três casos de semelhanças entre dois triângulos.*

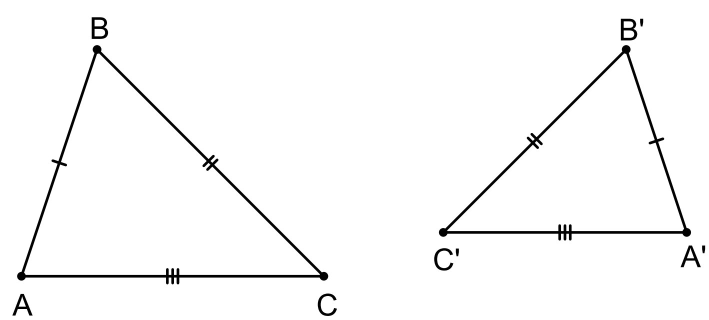
Caso 1.4.2.1 *(*`A-A`*) Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois ângulos respectivamente congruentes.*



Temos

$$\widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'} \text{ } e \text{ } \widehat{BCA} \equiv \widehat{B'C'A'}, \text{ logo } \Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$$

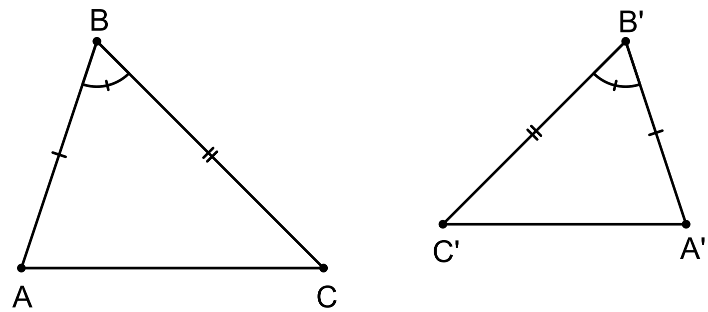
Caso 1.4.2.2 *(*`L-L-L`*) Dois triângulos são semelhantes quando possuem os lados respectivamente proporcionais.*



Temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{C'A'}}, \text{ logo } \Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$$

Caso 1.4.2.3 *(L-A-L) Dois triângulos são semelhantes quando possuem dois lados respectivamente proporcionais e os ângulos compreendidos entre esses lados congruentes.*

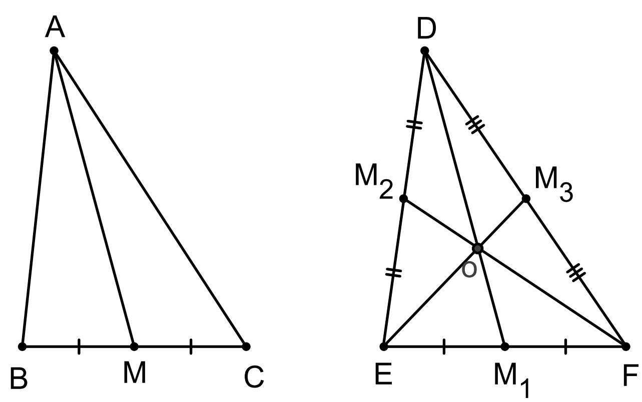


Temos

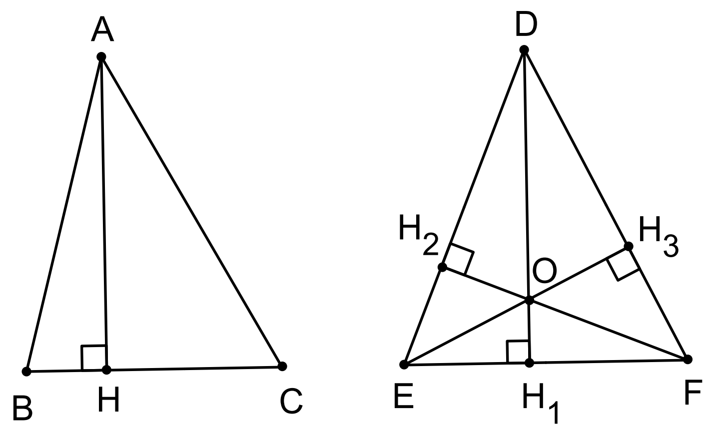
$$\frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} \text{ e } \widehat{ABC} \equiv \widehat{A'B'C'}, \text{ logo } \Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$$

1.4.3 Mediana, Altura e Bissetriz de um Triângulo

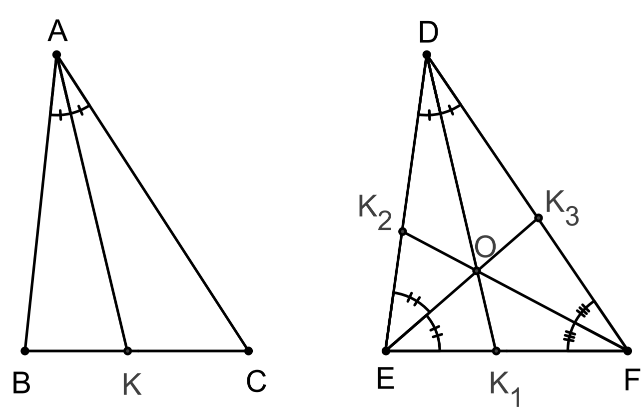
Definição 1.16 ***Mediana de um triângulo*** *é um segmento com extremidades num vértice e no ponto médio do lado oposto. As Três medianas dos lados de um triângulo são concorrentes em um único ponto, chamado de* ***Baricentro*** *ou* ***Centroide****.*



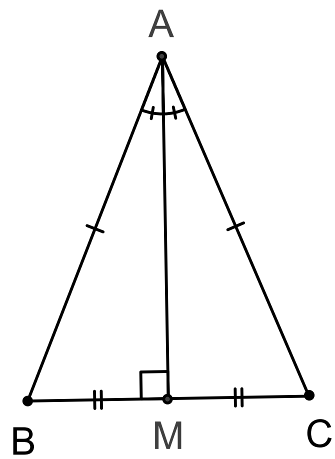
Definição 1.17 ***Altura de um triângulo*** *é o segmento de reta perpedicular à reta suporte de um lado do triângulo com extremidades nesta reta e no vértice oposto ao lado considerado. As três alturas de um triângulo são concorrêntes em um único ponto, chamado* ***Incentro****.*



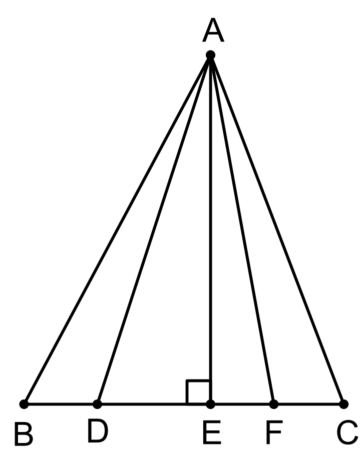
Definição 1.18 ***Bissetriz interna de um triângulo*** *é o segmento, com extremidades num vértice e no lado oposto, que divide o ãngulo desse vértice em dois ângulos congruentes. As três bissetrizes dos lados de um triângulo são concorrêntes em um único ponto, chamado* ***Circuncentro****.*



Proposição 1.1 *Em um triângulo isósceles a mediana relativamente a base é também bissetriz e altura.*



Definição 1.19 *Ceviana é todo segmento de reta que une um vértice de um triângulo ao seu lado oposto, não coincidindo com o vértice do triângulo deste lado. Mediana, Altura e Bissetriz de um triângulo são exemplos de Ceviana. A figura abaixo mostra outro exemplo de ceviana.*

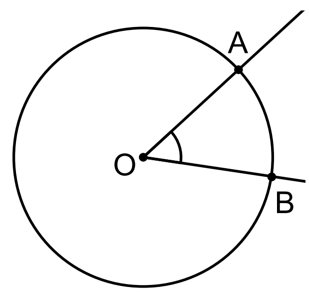


A altura $\overline{AE}$ e os segmentos $\overline{AD}$ e $\overline{AF}$ são as cevianas do triângulo ΔABC em relação ao lado $\overline{BC}$

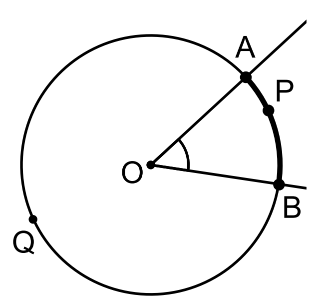
1.5 Circunferências

1.5.1 Ângulos e Arcos

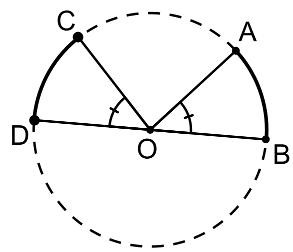
Definição 1.20 *Ângulo central é o ângulo que tem o vértice no centro de uma circunferência, e esse ângulo determina dois arcos, um menor e outro maior, cujas medidas são iguais as dos angulos correspondentes.*



Definição 1.21 *Sejam A e B pontos de uma circunferência de centro O. O conjunto formado pelos pontos A e B e pelos pontos da circunferência que estão no interior do ângulo central $\widehat{AOB}$ é chamado* **arco menor** *da circunferência; e o conjunto dos pontos A e B e dos pontos da circunferência que são exteriores ao ângulo central $\widehat{AOB}$ é chamado arco maior da circunferência. Na figura que segue, dados os pontos A e B da cicunferência, denotamos $A\overset{\frown}{P}B$ como sendo o arco menor da circunferência e $A\overset{\frown}{Q}B$ como sendo o arco maior da circunferência. Se não houver confusão, detotaremos tal arco por $\overset{\frown}{AB}$.*

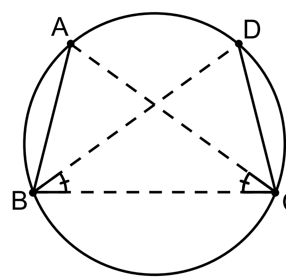


Definição 1.22 *Dois arcos* $\overset{\frown}{AB}$ *e* $\overset{\frown}{CD}$ *de uma circunferência de centro* O *são congruentes se, e somente se, os ângulos* $\widehat{AOB}$ *e* $\widehat{COD}$ *são congruentes.*

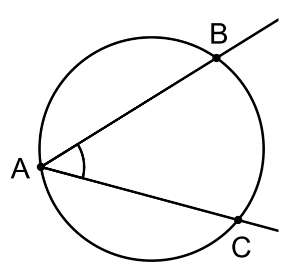


$$\widehat{AOB} \equiv \widehat{COD} \Rightarrow \overset{\frown}{AB} \equiv \overset{\frown}{CD}$$

Proposição 1.2 *Se dois segmentos de retas determinam dois arcos congruentes, então esses dois segmentos tamdem são congruentes.*



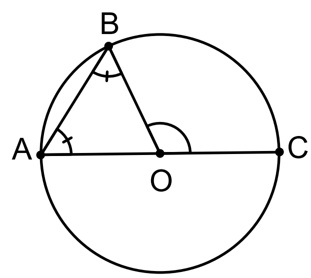
Definição 1.23 *Ângulo inscrito relativo a uma circunferência é um ângulo que tem o vértice na circunferência e os lados são secantes a ela.*



Teorema 1.1 *A medida de um ângulo incrito numa circunferência é a metade da medida do seu arco correspondente.*

Demonstração 1.1 Consideramos $\widehat{BAC}$ inscrito na circunferência com B e C sendo pontos da circunferência. Vamos mostrar que $m(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$. Temos então três casos:

Caso 1.5.1.1 *Suponhamos que um lado do ângulo $\widehat{BAC}$ contenha um diâmetro AC da circunferência de centro O.*



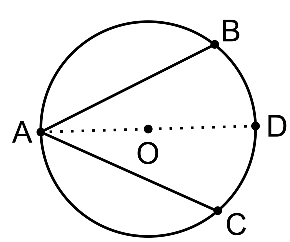
Note que o triângulo ΔOAB é isósceles com base AB. Assim, $\widehat{ABO} \equiv \widehat{OAB}$. Como em todo triângulo a medida de um ângulo externo é a soma das medidas dos dois ângulos internos não adjacentes, então

$$m(\widehat{BAC}) + m(\widehat{OBA}) = m(\widehat{BOC})$$

Já que o triângulo é isósceles, temos $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{OBA})$. Assim temos,

$$2m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BOC}) \Rightarrow m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}m(\widehat{BOC}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$$

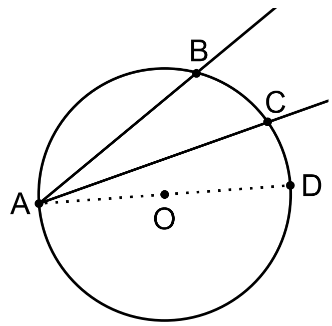
Caso 1.5.1.2 *Suponhamos que B e C estejam em lados distintos do diâmetro AD,*



Temos então $m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) + m(\widehat{DAC})$ e pelo caso anterior, temos que,

$$m(\widehat{BAC}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BD}) + \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{DC}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$$

Caso 1.5.1.3 *Suponhamos que B e C estejam do mesmo lado do diâmetro AD,*

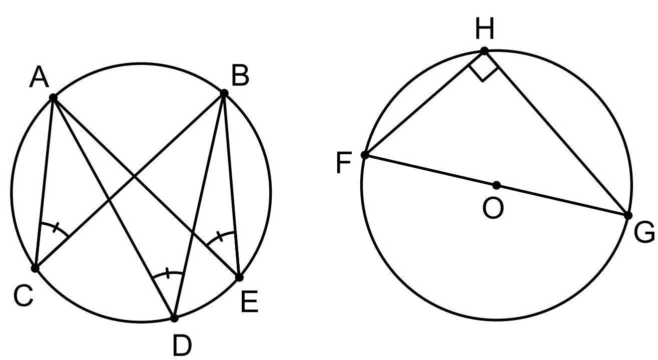


Neste caso, podemos ter duas situações: (i) $\overrightarrow{AC}$ divide $\widehat{BAD}$ ou (ii) $\overrightarrow{AB}$ divide $\widehat{CAD}$. As provas são análogas e nelas são usadas as igualdades já obitidas. Faremos a situação (i). Neste caso temos,

$$m(\widehat{BAC}) = m(\widehat{BAD}) - m(\widehat{CAD}) = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BD}) - \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{CD}) = \frac{1}{2}[m(\overset{\frown}{BD}) - m(\overset{\frown}{CD})] = \frac{1}{2}m(\overset{\frown}{BC})$$

Deste teorema obtemos um importante corolário.

Corolário 1.1 *Ângulos incritos em um mesmo arco são congruentes. Em particular, um ângulo inscrito em uma semicircunferência é um ângulo reto.*

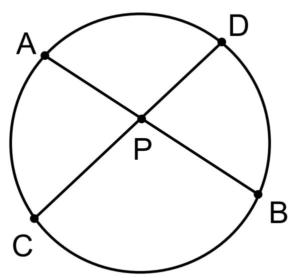


1.5.2 Potência

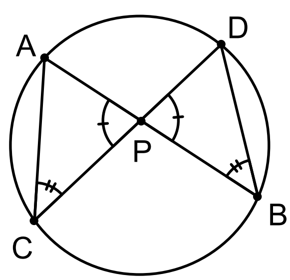
Proposição 1.3 *Dada uma circunferência. Se A, B, C e D são quatro pontos concíclicos e P um ponto de intersecção das cordas AB e CD, então*

$$\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Demonstração 1.2 Devemos observar que temos dois casos em que as cordas se intersectam com o ponto P, porém os resultados são os mesmos.
Primeiramente mostraremos o caso em que o ponto P é um ponto interior a Circunferêncía.



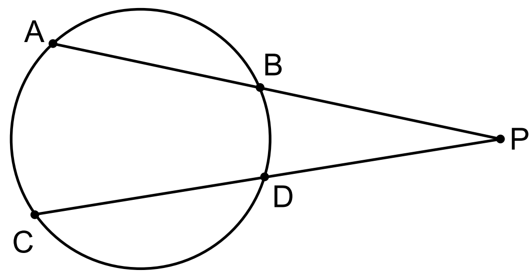
Consideremos os triângulos ΔAPC e ΔDPB,



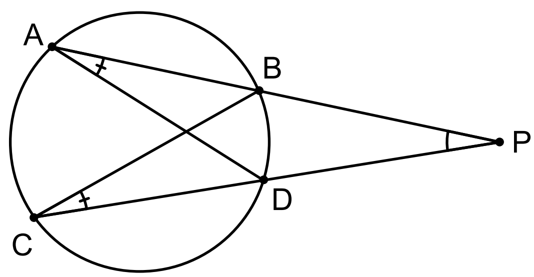
Como os âgulos $\widehat{APC} \equiv \widehat{DPB}$, pois são opostos pelo vértices e os ângulos $\widehat{ACD} \equiv \widehat{DBA}$, correspodem ao mesmo arco $\overset{\frown}{AD}$, assim pelo caso $A.A$

$$\Delta APC \approx \Delta DPB, \text{ logo } \frac{\overline{AP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Mostraremos o caso em que o ponto P é um ponto exterior a circunferência.



Consideremos os triângulos ΔAPD e ΔCPB,



Temos que o ângulo $\widehat{P}$ é comum aos dois Triângulos e os ângulos $\widehat{DAP} \equiv \widehat{BCP}$, pois correspodem ao mesmo arco $\overset{\frown}{BD}$, então pelo caso $A.A$

$$\Delta APD \approx \Delta CPB, \text{ logo } \frac{\overline{PA}}{\overline{PC}} = \frac{\overline{PD}}{\overline{PB}} \Rightarrow \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \overline{PC} \cdot \overline{PD}$$

Capítulo 2

Teoremas Clássicos

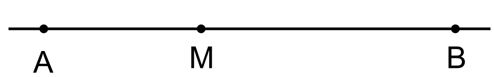
2.1 Teorema de Menelau

Menelau de Alexandria (70 d.c - 130 d.c) foi um astrônomo e matemático grego. Menelau possivelmente viveu em Alexandria, Egito e em Roma, tendo estado em Alexandria até a sua juventude, mudando-se para Roma mais tarde. São mencionados que Menelau escreveu seis livros sobre cordas de um circulo, além de varios outros trabalhos que se perderam. Três livros de seu trabalho sphaerica se preservaram em árabe. O livro II que aborda astronomia, enquanto que nos livros I e III encontra-se a primeira definição de triângulo esferico. O trabalho procura demonstrar a validade de varias proposições de euclides sobre triângulos planos para o caso esferico. No livro III encontra-se o famoso Teorema de Menelau.

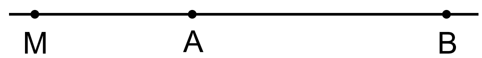
O Teorema de Menelau, faz um forte uso da razão entre segmentos colineares. Por isso, antes de demonstrarmos tal teorema, faremos um resumo do assunto:

Dado um segmento $\overline{AB}$ e um ponto M, sabemos que:

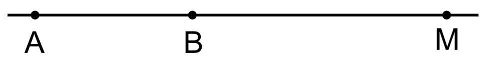
ou M está entre A e B



ou M está à esquerda de A

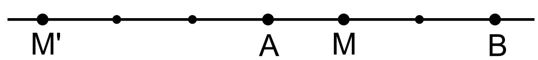


ou M está à direita de B



Esse ponto M, divide o segmento $\overline{AB}$ na razão $\dfrac{AM}{BM}$. Se tomarmos apenas a medida geométrica da distância que o ponto M está dos extremos de $\overline{AB}$, não saberemos se M está entre A e B, ou se M está a direita de B ou a esquerda de A.

Veja o exemplo:



Acima, temos os segmentos AB, dividido em três partes iguais, $AM' = AB$ é dividido em três partes iguais.

Utilizando apenas medidas geométricas para as distâncias entre os pontos, teremos as seguintes razões:

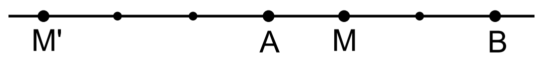
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{1}{2} \text{ e } \frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

ou seja, os pontos M e M' se localizam em pontos diferentes da reta suporte do segmento AB, mas o divide na mesma razão.

Mas, se usarmos medidas algébricas, levaremos em conta a orientação do segmento cuja distância será utilizada, e assim, saberemos se o ponto se localiza dentro ou fora do segmento.

Quando os segmentos possuem o mesmo sentido, a razão entre eles será positiva, e quando possuírem sentidos contrários, a razão será negativa.

Veja o exemplo,



Como os segmentos AM e BM possuem orientações contrárias (AM para direita e BM para a esquerda) teremos,

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{1}{2} \text{ (razão negativa)}$$

E como os segmentos AM' e BM', possuem a mesma orientação (ambos para a esquerda), teremos:

$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{BM'}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ (razão positiva)}$$

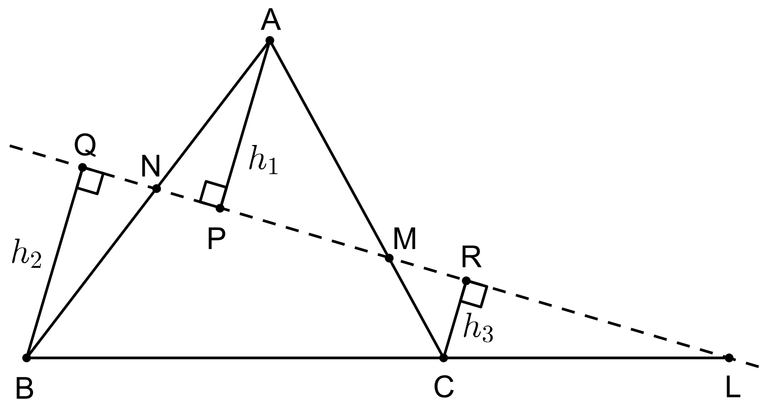
Para o Teorema de Menelau, vamos considerar apenas medidas algébricas.

Definição 2.1 *Um ponto que se situa no lado de um triângulo ou no seu prolongamento, mas que não coincide com nenhum dos vértices do triângulo, chama-se **ponto de Menelau** do triângulo relativamente a esse lado.*

Teorema 2.1 (Teorema de Menelau) *Sejam L, M e N pontos que pertence aos lados BC, CA e AB de um triângulo ΔABC, de modo que nenhum desses pontos coincida com algum dos vértices do triângulo. Se os pontos L, M e N são colineares, então*

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = 1$$

Demonstração 2.1 Consideremos o triângulo ΔABC e seja N um ponto do lado AB, M um ponto do lado AC e L um ponto do prolongamento do lado BC de tal maneira que N, M e L sejam colineares, seja r a reta que passa pelos pontos N, M e L. Sejam AP, BQ e CR as perpendiculares de A, B e C respectivamente, e sejam, h_1, h_2 e h_3 os comprimentos das perpendiculares, como é mostrado na figura que segue.



Desta forma obteremos três pares de triângulos semelhantes (caso A.A), pois por serem retângulos e terem um ângulo agudo congruentes,

$$\widehat{APN} \equiv \widehat{BQN} \text{ e } \widehat{ANP} \equiv \widehat{BNQ}, \text{ logo } \Delta APN \approx \Delta BQN$$
$$\widehat{BQL} \equiv \widehat{CRL} \text{ e } \widehat{BLQ} \equiv \widehat{CLR}, \text{ logo } \Delta BLQ \approx \Delta CLR$$
$$\widehat{APM} \equiv \widehat{CRM} \text{ e } \widehat{AMP} \equiv \widehat{CMR}, \text{ logo } \Delta APM \approx \Delta RCM$$

Do trio de semelhanças, obteremos respectivamente as seguintes equações,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = -\frac{h_1}{h_2}$$
$$\frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} = \frac{h_2}{h_3}$$
$$\frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = -\frac{h_3}{h_1}$$

Multiplicando as três equações, temos que,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = \left(-\frac{h_1}{h_2}\right) \cdot \left(\frac{h_2}{h_3}\right) \cdot \left(-\frac{h_3}{h_1}\right)$$

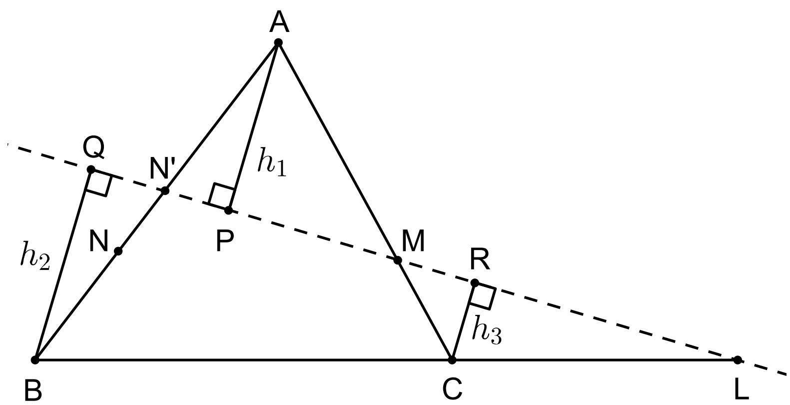
Onde concluimos que,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = 1.$$

Teorema 2.2 (Reciproca do Teorema de Menelau) *Se L, M e N são pontos dos lados BC, CA e AB, respectivamente, diferentes dos vértices do triângulo ΔABC, para o qual vale a relação acima, então L, M e N, são colineares.*

Demonstração 2.2 Sejam L, M e N pertecentes aos lados do triângulo ΔABC e diferentes de seus vértices de modo que,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = 1. \ (1)$$



Suponhamos que as retas AB e LM se interceptam em N'. Então pelo teorema de Menelau, temos,

$$\frac{\overline{AN'}}{\overline{BN'}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = 1. \ (2)$$

Comparando (1) e (2), temos que,

$$\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{\overline{AN'}}{\overline{BN'}}$$

Como os pontos N e N' divide o segmento AB numa mesma razão, então $N = N'$ e N coincide com N', isto é, M, N e L são colineares.

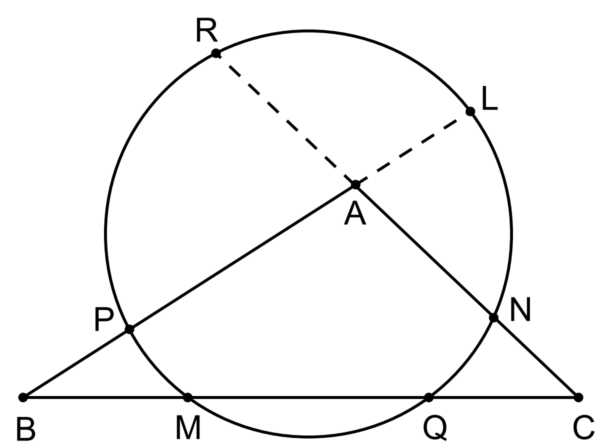
2.2 Teorema de Carnot

Lazare Nicolas Marguerite Carnot (1753 d.c - 1823 d.c) foi um político e matemático francês, era um autentico defensor da causa republicana. Foi conhecido como "Organizador da Vitória"das guerras revolucionárias francesas por dirigir o exércitos da Revolução. Seu primeiro trabalho, publicado em 1784, foi sobre máquinas; continha declarações que relicionavam a lei da conservação de energia aplicada a um corpo em queda livre, com esboços de como a energia cinética é dissipada na colisão de corpos elásticos imperfeitos. Carnot foi um fundador de uma dinastia de grandes cientistas e politicos franceses, foi também um grande matemático. Suas obras tiveram grandes êxitos e influenciaram consideravelmente nas investigações geométricas no inicio do século XIX, pela difusão de inúmeros Teoremas dos quais uma boa parte eram de natureza projectiva popularizando a geometria, habituando os geômetras a estudar as transformações geométricas.

Teorema 2.3 (Teorema de Carnot) *Se uma circunferência intersecta os lados AB, BC e CA do triângulo ΔABC nos pontos (diferentes dos vértices) L e P, M e Q, N e R, respectivamente então,*

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1$$

Demonstração 2.3 Da hipótese do teorema, temos a seguinte ilustração,



Calculando as potências dos pontos A, B e C respectivamente da circunferência, obteremos as equações,

$$\overline{AL} \cdot \overline{AP} = \overline{AR} \cdot \overline{AN}$$

$$\overline{BP} \cdot \overline{BL} = \overline{BM} \cdot \overline{BQ}$$

$$\overline{CN} \cdot \overline{CR} = \overline{CM} \cdot \overline{CQ}$$

Do trio de equações acima obteremos as seguintes identidades,

$$\frac{\overline{AL} \cdot \overline{AP}}{\overline{RA} \cdot \overline{NA}} = 1$$
$$\frac{\overline{BM} \cdot \overline{BQ}}{\overline{LB} \cdot \overline{PB}} = 1$$
$$\frac{\overline{CN} \cdot \overline{CR}}{\overline{MC} \cdot \overline{QC}} = 1$$

Pela multiplicação das três identidades, concluiremos que,

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MC}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{RA}} = 1.$$

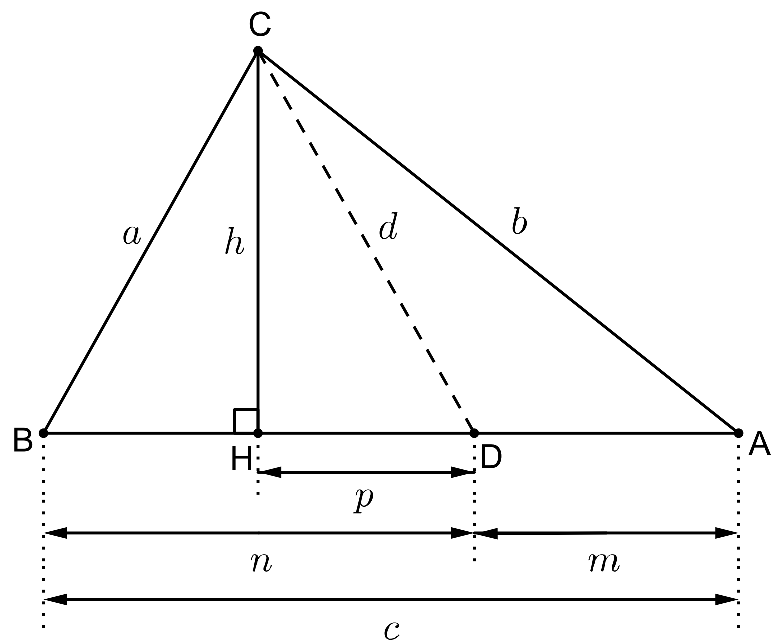
2.3 Teorema de Stewart

Matthew Stewart nasceu no ano de 1717 em Rothesay, na parte inferior do Firth of Clyde, na Escócia, numa pequena ilha chamada Ilha Bute. Educado em Rothesay Grammar School, entrou na Universidade de Glasgow em 1734, onde estudou com o filósofo Francis Hutcheson e o matemático Robert Simson, com quem estudou a geometria antiga. Seu pai, o Reverendo Dugald Stewart, então Ministro de Rothesay, persuadiu Matthew Stewart a entrar para o ministério, sendo aceito pelo Presbitério de Dunoon em maio de 1744, tornando-se ministro em Roseneath, Dumbartonshire, um ano depois. Porém, antes de iniciar sua carreira no ministério, Stewart participou de palestras de Colin Maclaurin na Universidade de Edimburgo, durante as sessões de 1742 e 1743. Com a morte de Maclaurin em 1746, sua cadeira ficou vaga e pouco mais tarde, Stewart deixou o ministério para tornar-se professor de matemática. A publicação de sua obra mais famosa: *Some General Theoremes of Considerable Use in the Higher Parts os Mathematics*, pode ter ajudado a garantir o posto. Esse livro, estende algumas idéias de Simson e trás a conhecida Proposição II, que hoje é conhecida como o Teorema de Stewart, que relaciona os comprimentos dos lados de um triângulo e o comprimento de uma ceviana dada. Onde em seguida veremos como determinar a fórmula e provar o teorema.

Teorema 2.4 (Teorema de Stewart) *Seja um triângulo ΔABC qualquer, cujos lados medem a, b e c. Seja d uma ceviana e D o ponto pertencente à reta suporte. O teorema de Stewart afirma que,*

$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

Demonstração 2.4 Consideremos o triângulo ΔABC, de lados a, b e c, ceviana d em relação ao lado BC e altura h, onde $\overline{DH} = p, \overline{BD} = n$ e $\overline{DA} = m$.



Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos ΔBCH e ΔCHD respectivamente, obteremos,

$$a^2 = h^2 + (n - p)^2 \Rightarrow$$
$$a^2 = h^2 + n^2 - 2np + p^2 \Rightarrow$$
$$h^2 = a^2 - n^2 + 2np - p^2 \ (1)$$

e

$$d^2 = h^2 + p^2 \Rightarrow$$
$$h^2 = d^2 - p^2 \ (2)$$

Substituindo (2) em (1), temos,

$$d^2 - p^2 = a^2 - n^2 + 2np - p^2 \Rightarrow$$
$$a^2 = d^2 + n^2 - 2np \ (3)$$

Pelo teorema de Pitágoras, aplicado no triângulo ΔACH tem-se que,

$$b^2 = h^2 + (m + p)^2 \Rightarrow$$
$$b^2 = h^2 + m^2 + 2mp + p^2 \Rightarrow$$
$$h^2 = b^2 - m^2 - 2mp - p^2 \ (4)$$

Substituindo (2) em (4), obtemos,

$$d^2 - p^2 = b^2 - m^2 - 2mp - p^2 \Rightarrow$$
$$b^2 = d^2 + m^2 + 2mp \ (5)$$

Montando o sistema de equações utilizando as relações (3) e (5),

$$\begin{cases} a^2 = d^2 + n^2 - 2np \\ b^2 = d^2 + m^2 + 2mp \end{cases}$$

No sistema, multiplicamos a primeira equação por m e a segunda equação por n, temos que,

$$\begin{cases} a^2m = d^2m + n^2m - 2mnp \\ b^2n = d^2n + m^2n + 2mnp \end{cases}$$

Somando as duas equações termo a termo, resulta que

$$a^2m + b^2n = n^2m + m^2n + d^2m + d^2n \Rightarrow$$
$$a^2m + b^2n = mn(m + n) + d^2(m + n)$$

Como $c = m + n$, substituindo a mesma na ultima equação concluiremos o resultado do teorema,

$$a^2m + b^2n = mnc + d^2c \Rightarrow$$
$$a^2m + b^2n - d^2c = mnc$$

Outra forma de resolver esse problema é usando a trigonometria, em particular usa-se a lei dos cosseno, cuja demonstração fica por conta do leitor.

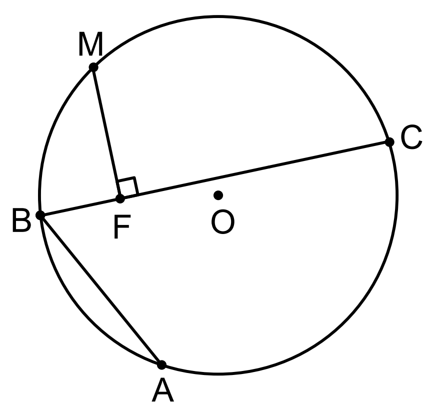
2.4 Teorema da Corda quebrada de Arquimedes

Arquimedes de Siracusa (287 a.C. - 212 a.C.) foi um matemático, físico, engenheiro, inventor, e astrônomo grego. Embora poucos detalhes de sua vida sejam conhecidos, são suficientes para que seja considerado um dos principais cientistas da Antiguidade Clássica.

Em seguida iremos demonstrar um curioso resultado da geometria conhecido como o *teorema da corda quebrada* e, no capítulo 3, mostrar uma surpreendente aplicação em trigonometria. Esse teorema não é novo, muito pelo contrário. Um matemático árabe do século X conhecido por Al-Biruni relatou que o teorema já era conhecido por Arquimedes. De qualquer forma, mesmo sendo um resultado antigo, é pouco conhecido, bem interessante e completamente acessível aos alunos de ensino médio.

Teorema 2.5 (Teorema da corda quebrada) *Se AB e BC compõem uma corda quebrada ABC onde $BC > AB$ e se M é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{ABC}$, então o pé da perpedicular FM sobre BC é o ponto médio da corda quebrada.*

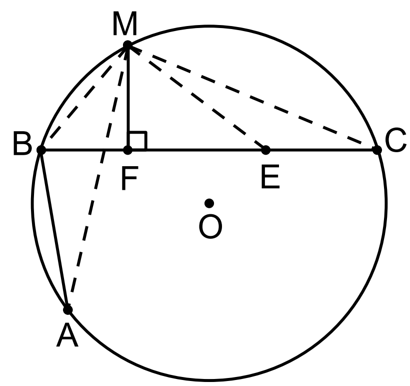
Demonstração 2.5 Pela hipótese do teorema, inicialmente temos a seguinte ilustração,



Provaremos que,

$$\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{FC} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$$

Desde que $\overline{BC} > \overline{AB}$, existe um ponto E sobre $\overline{BC}$, tal que $\overline{EC} = \overline{AB}$. Por contruções obteremos na figura abaixo determinados triângulos,



Por hipótese temos que M é ponto médio do arco $A\overset{\frown}{B}M$, assim $A\overset{\frown}{M}\equiv M\overset{\frown}{C}$, logo $\overline{AM} \equiv \overline{MC}$, pois cordas de arcos congruentes são congruentes. Temos ainda que os ângulos $\widehat{BAM} \equiv \widehat{BCM}$, já que são ângulos do mesmo arco $B\overset{\frown}{M}$, e como $\overline{AB} \equiv \overline{EC}$, os triângulos ΔABM e ΔCEM são congruenres (caso L.A.L).
Seque que $\overline{BM} \equiv \overline{ME}$, logo o triângulo ΔBME é isósceles de altura $\overline{MF}$, como em um triângulo isósceles a altura coincide com a mediana, então os triângulos ΔBMF e ΔEMF são congruentes.
Desta forma,

$$\overline{BF} = \overline{FE}$$

Assim,

$$\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{EC} + \overline{FE} = \overline{FC} \ (1)$$

Por outro lado temos que,

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AB} + \overline{BF} + \overline{FC} \ (2)$$

Substituindo (1) em (2) obtemos,

$$\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{FC} + \overline{FC} = 2\overline{FC}$$

Segue que,

$$\overline{FC} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$$

O que resulta,

$$\overline{FC} = \overline{AB} + \overline{BF} = \frac{\overline{AB} + \overline{BC}}{2}$$

Portanto o pé da perpedicular $\overline{FM}$ sobre $\overline{BC}$ é o ponto médio da corda quebrada.

Capítulo 3

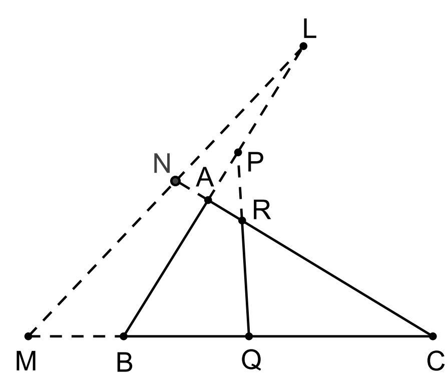
Aplicações dos Teoremas Estudados

3.1 Aplicações do Teorema de Menelau

3.1.1 Teorema de Carnot para retas

Teorema 3.1 (Teorema de Carnot para retas) *Se duas retas intersectam os lados AB, BC, CA do triângulo ΔABC nos pontos (diferentes dos vértices) L e M, N e P, Q e R respectivamente, então*

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = 1$$



Demonstração 3.1 Consideremos o triângulo ΔABC e as retas que cortam seus lados e seus prologamentos. Aplicando o teorema de Menelau nos pontos LMN e PRQ que são determinados pelas retas que cortam os lados do triângulo ΔABC, obteremos as seguintes identidades,

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} = 1$$

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = 1$$

Pela multiplicação das duas identidades, concluimos que,

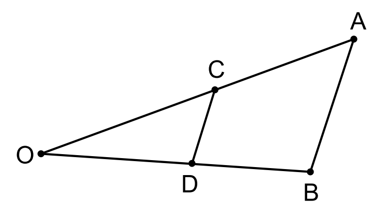
$$\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{CM}} \cdot \frac{\overline{CN}}{\overline{AN}} \cdot \frac{\overline{AP}}{\overline{BP}} \cdot \frac{\overline{BQ}}{\overline{CQ}} \cdot \frac{\overline{CR}}{\overline{AR}} = 1.$$

3.1.2 Teorema de Desargues

Girard Desargues (1591 d.c - 1661 d.c) viveu numa época onde o intercâmbio entre os matemáticos estava recomeçando, intercâmbio este desaparecido desde a época de Platão. Arquiteto e engenheiro militar, seu interesse pelas "investigações que conduziram aos conhecimentos das coisas e prática de alguma arte", lhe levou a estudar as secções cônicas e os problemas de pespectiva (projeções centrais). As principais obras de Desargues são *Brouillo projet d'une atteinte aux événements des rencontres d'une cône avec un plan*(1648). E uma série de proposições geométricas, publicadas como apêndice da perspectiva (1648) de seu discípulo e gravador bosse, entre as quais se encontra seu famoso Teorema de Desargues.

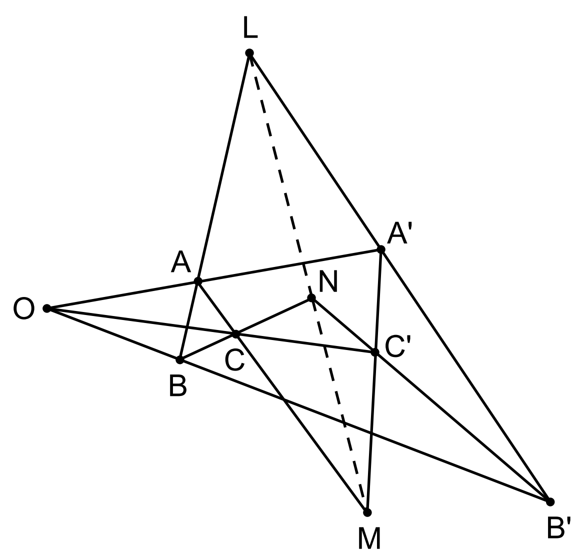
Definição 3.1 *Se diz que duas figuras estão em pespectiva desde um ponto, se todas as retas que une pares de pontos correspondentes dos lados das figuras concorrem em um unico ponto. O ponto onde as retas concorrem se chama centro de perspectiva ou ponto de fuga.*

Desta maneira os segmentos AB e CD estão em perspectiva desde um ponto O se as retas que passam por seus extremos se intersectam em O.



Teorema 3.2 (Teorema de Desargues) *Se dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ estão em perspectiva desde um ponto e seus pares de lados correspondentes ou seus prolongamentos se intersectam, então os três pontos de interseção são colineares.*

Demonstração 3.2 Sejam dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ em perspectiva em relação ao ponto O e que seus lados correspondentes ou seus prolongamentos AB e $A'B'$ se cortam em L, AC e $A'C'$ se cortam em M, BC e $B'C'$ se cortam e N, como mostra a figura abaixo,



Aplicando o Teorema de Menelau aos triângulos $\Delta AOB, \Delta AOC, \Delta BOC$, aos trios de pontos colineares L, A' e B'; A', C' e M; N, C' e B' respectivamente, temos então as seguintes identidades,

$$\frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} \cdot \frac{\overline{B'B}}{\overline{B'O}} \cdot \frac{\overline{A'O}}{\overline{A'A}} = 1$$

$$\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'O}} \cdot \frac{\overline{C'O}}{\overline{C'C}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} = 1$$

$$\frac{\overline{C'C}}{\overline{C'O}} \cdot \frac{\overline{B'O}}{\overline{B'B}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} = 1$$

Multiplicando as três identidades, resulta que,

$$\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = 1$$

Por essa relação e pelo fato dos pontos L, M e N pertecerem as retas supotes dos lados do triângulo ΔABC, concluimos pela reciproca do teorema de Menelau que os pontos L, M e N são colineares.

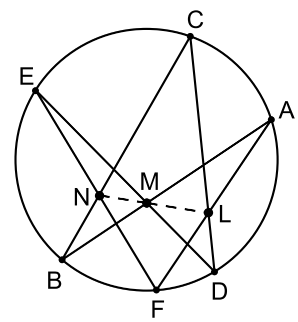
3.2 Aplicações do Teorema de Menelau e Carnot

3.2.1 Teorema de Pascal

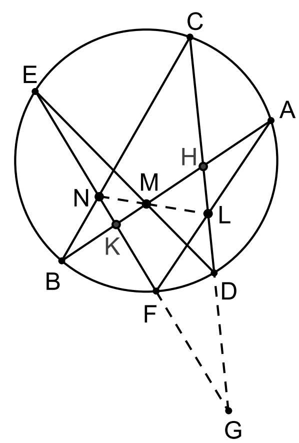
Blaise Pascal (1623 d.c - 1662 d.c) foi matemático, físico e filósofo, era filho de Étienne Pascal, professor de matemática, e de Antoinette Begon. Perdeu a sua mãe com três anos de idade. Seu pai tratou da sua educação por ele ser o único filho do sexo masculino, orientando-o com vistas ao desenvolvimento correcto da sua razão e do seu juízo, educado sob forte influência religiosa. Tornou-se extremamente ascetista, escrevendo várias obras religiosas. Seu talento precoce para as ciências físicas levou a família para Paris, onde ele se dedicou ao estudo da matemática. Pascal inventou a primeira calculadora em 1642, um aparato chamado Pascaline que tinha uma semelhança com as calculadoras mecanicas dos anos de 1940. Em colaboração com Fermat, fundaram as bases da teoria da probabilidade.

Teorema 3.3 (Teorema de Pascal) *Se os vértices de um hexágono $ABCDEF$ se encontram em uma circunferência e os três pares de lados opostos AB e DE, CD e FA, EF e BC se intersectam respectivamente em M, L e N, então os três pontos de interseção são colineares.*

Demonstração 3.3 Da hipótese do teorema temos a seguinte ilustração,



Seja G, H e K as interseções de EF e CD, AB e CD, EF e AB, respectivamente, como mostra a figura abaixo,



Considerando o trângulo ΔGHK formado pelas retas AB, CD, EF e aplicando o teorema de Menelau aos trios de pontos ALF, DME e BNC das retas suportes respectivamente, obteremos as seguintes equações,

$$\frac{\overline{HA}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{KF}}{\overline{GF}} \cdot \frac{\overline{GL}}{\overline{HL}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{GL}}{\overline{HL}} = \frac{\overline{KA}}{\overline{HA}} \cdot \frac{\overline{GF}}{\overline{KF}}$$

$$\frac{\overline{HM}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{KE}}{\overline{GE}} \cdot \frac{\overline{GD}}{\overline{HD}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{HM}}{\overline{KM}} = \frac{\overline{GE}}{\overline{KE}} \cdot \frac{\overline{HD}}{\overline{GD}}$$

$$\frac{\overline{HB}}{\overline{KB}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{GN}} \cdot \frac{\overline{GC}}{\overline{HC}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{KN}}{\overline{GN}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{HB}} \cdot \frac{\overline{HC}}{\overline{GC}}$$

Multiplicando as três equaçoes, temos que,

$$\frac{\overline{GL}}{\overline{HL}} \cdot \frac{\overline{HM}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{GN}} = \left(\frac{\overline{GE}}{\overline{GC}} \cdot \frac{\overline{GF}}{\overline{GD}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{HC}}{\overline{HA}} \cdot \frac{\overline{HD}}{\overline{HB}}\right) \cdot \left(\frac{\overline{KA}}{\overline{KE}} \cdot \frac{\overline{KB}}{\overline{KF}}\right)$$

Aplicando o teorema de Carnot nas potências dos pontos G, H e K, concluimos que,

$$\frac{\overline{GL}}{\overline{HL}} \cdot \frac{\overline{HM}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{KN}}{\overline{GN}} = 1$$

Portanto os pontos L, M e N são colideares.

3.3 Aplicações do Teorema de Stewart

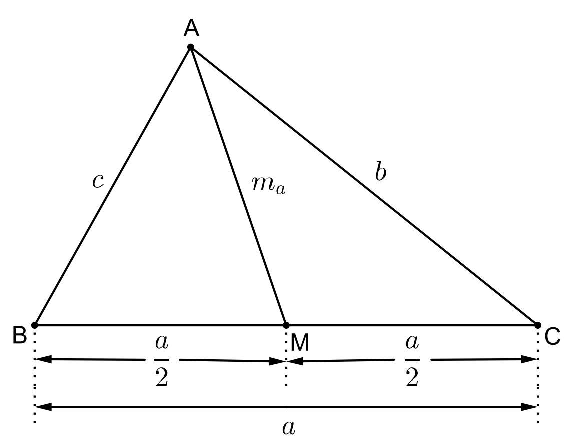
3.3.1 Cálculo das medianas de um triângulo

Proposição 3.1 *Sejam m_a, m_b e m_c as medianas relativas ao lado $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, de um triângulo ΔABC. Então*

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}, m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2} \text{ e } m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2};$$

onde $\overline{BC} = a, \overline{AC} = b$ e $\overline{AB} = c$.

Demonstração 3.4 Consideremos o triangulo ΔABC de lados a, b e c e seja $\overline{AM} = m_a$ a mediana relativa ao lado BC, como mostra a figura abaixo,



$\overline{AM}$ é a mediana relativa ao lado $\overline{BC}$

Aplicando o teorema de Stewart no triangulo ΔABC, obteremos,

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = m_a^2 \cdot a + \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a \Rightarrow$$

$$c^2 \cdot \frac{a}{2} + b^2 \cdot \frac{a}{2} = a(m_a^2 + \frac{a^2}{4})$$

Simplificando o valor a de ambos os lados, temos,

$$\frac{c^2}{2} + \frac{b^2}{2} = m_a^2 + \frac{a^2}{4} \Rightarrow m_a^2 = \frac{1}{2}(c^2 + b^2) - \frac{a^2}{4}$$

Como $m_a > 0$, concluimos que,

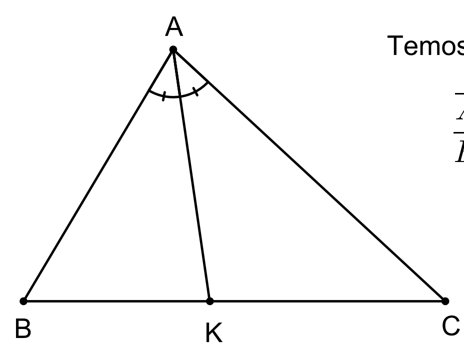
$$m_a = \sqrt{\frac{1}{4}(2(c^2 + b^2) - a^2)} \Rightarrow m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(c^2 + b^2) - a^2}$$

As relações das medianas m_b e m_c são mostradas de forma analoga a da mediana m_a, mostrado acima.

3.3.2 Cálculo das bissetrizes internas de um triângulo

Antes veja o que diz o teorma das bissetrizes internas de um triângulo.

Teorema 3.4 (Teorema das Bissetrizes Internas) *Uma bissetriz interna de um triângulo divide o lado oposto em seguimentos proporcionais ao lados adjacentes.*
Ver demonstração: "DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar - vol. 9: geometria plana. SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2011".



Temos

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CK}}$$

Proposição 3.2 *Sejam k_a, k_b e k_c as bissetrizes internas relativas aos lados $\overline{BC}, \overline{AC}$ e $\overline{AB}$, respectivamente, de um triângulo ΔABC. Então,*

$$k_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

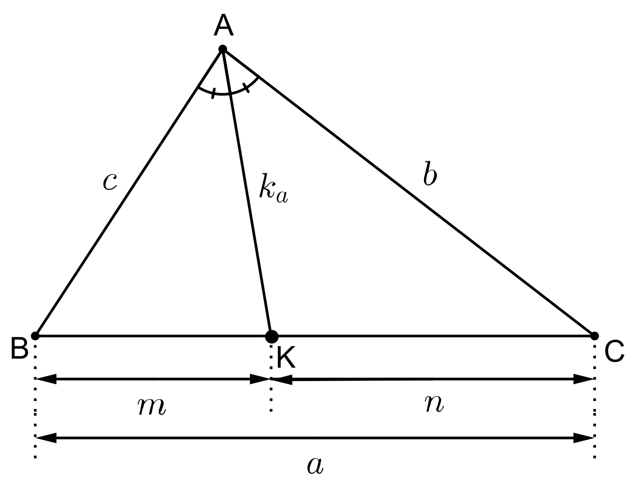
$$k_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)}$$

e

$$k_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)};$$

onde $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ e $2p = a+b+c$ (é o perímetro).

Demonstração 3.5 Consideremos o triangulo ΔABC de lados a, b e c e seja $\overline{AK} = k_a$ uma bissetriz interna relativa ao lado BC, como mostra a figura abaixo.



$\overline{AK}$ é a bissetriz relativa ao lado $\overline{BC}$

Usando o Teorema da bissetriz interna, então,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{KC}} \Rightarrow \frac{c}{m} = \frac{b}{n}$$

Pela propriedade da proporção, temos que,

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{m+n}{b+c}$$

Como $a = m + n$, logo,

$$\frac{m}{c} = \frac{n}{b} = \frac{a}{b+c}$$

Assim teremos,

$$m = \frac{ac}{b+c} \text{ e } n = \frac{ab}{b+c}$$

Aplicando o teorema de Stewart no triangulo ΔABC, obteremos,

$$c^2 \cdot n + b^2 \cdot m = k_a^2 \cdot a + m \cdot n \cdot a$$

Substituindo os valores de m e n obtidos anteriormente, temos,

$$\frac{b^2ac}{b+c} + \frac{c^2ab}{b+c} = k_a^2 \cdot a + \frac{a^2bca}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{b^2ac + c^2ab}{b+c} = a\left(k_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2}\right)$$

Simplificando o valor de a de ambos os lados, temos,

$$\frac{b^2c + c^2b}{b+c} = k_a^2 + \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$k_a^2 = \frac{b^2c + c^2b}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$k_a^2 = \frac{bc(b+c)}{b+c} - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$k_a^2 = bc - \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$k_a^2 = \frac{bc[(b+c)^2 - a^2]}{(b+c)^2}$$

Aplicando a fórmula da diferença de dois quadrados na última equação, temos,

$$k_a^2 = \frac{bc[(b+c-a) \cdot (a+b+c)]}{(b+c)^2}$$

Da hipótese temos o perimetro, $2p = a + b + c \Rightarrow 2p - a = b + c$, onde segue que,

$$k_a^2 = \frac{bc(2p-2a) \cdot (2p)}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

$$k_a^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}$$

Como $k_a > 0$, concluímos que,

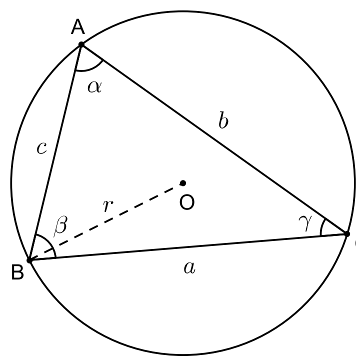
$$k_a = \frac{2}{(b+c)}\sqrt{bcp(p-a)}$$

As relações das bissetrizes k_b e k_c são mostradas de maneira analoga a da bissetriz k_a, mostrada anteriormente.

3.4 Aplicações do Teorema da corda quebrada Arquimedes

Antes de vermos uma importante aplicação do teorema da corda quebrada, enunciaremos o teorema da lei dos senos, que sera útil na proposição que será mostrado a seguir.

Teorema 3.5 *Em qualquer triângulo ΔABC inscrito numa circunferência, as medidas dos lados são proporcionais aos senos dos ângulos opostos e que a razão entre essas medidas é costante igual a $2r$, em que r é o raio da circunferência.*
Ver demonstração: "DANTE, Luiz Roberto. Matemática - volume único - 1ª edição, São Paulo: editora ática, 2009".
Veja a figura,



$$\frac{a}{sin\alpha} = \frac{b}{sin\beta} = \frac{c}{sin\gamma} = 2r$$

3.4.1 Seno da Soma e Subtração de Ângulos

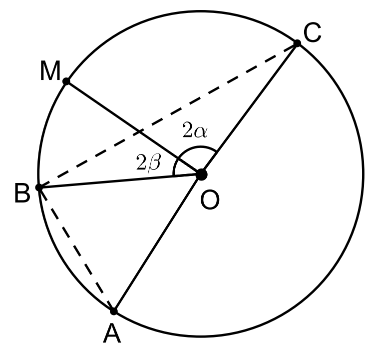
Proposição 3.3 *Se AB e BC compõem uma corda quebrada ABC onde $BC > AB$, sendo M o ponto médio do arco $\widehat{ABC}$ e se o arco $\widehat{MC} = 2\alpha$ e o arco $\widehat{BM} = 2\beta$ então*

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha$$

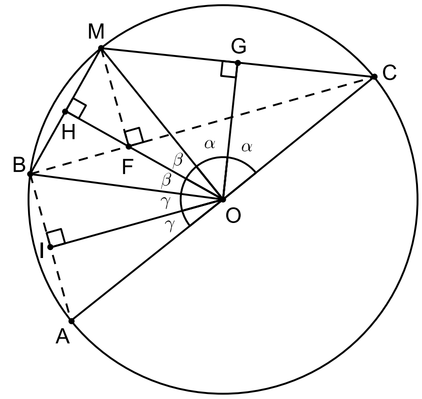
$$e$$

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$$

Veja a figura abaixo,



Demonstração 3.6 Na figura abaixo, por hipótese ABC é a corda quebrada. Sendo que $\overline{OC} = \overline{OB} = \overline{OM} = \overline{OA} = r$. Por costrução teremos os triângulos ΔBMC, ΔAOB, ΔBOM e ΔMOC de alturas $\overline{MF}$, $\overline{IO}$, $\overline{HO}$ e $\overline{GO}$ respectivamente.



Considerando os triângulos ΔOGM e ΔOBH, obtermos as seguintes equações,

$$sen\alpha = \frac{\overline{MG}}{\overline{OM}} = \frac{\overline{MC}/2}{r} \Rightarrow \overline{MC} = 2rsen\alpha$$

e

$$sen\beta = \frac{\overline{BH}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BM}/2}{r} \Rightarrow \overline{BM} = 2rsen\beta$$

Observando o ΔCFM retângulo em F, temos que $\widehat{MCF} = \dfrac{\widehat{BOM}}{2}$, ou seja, $\widehat{MCF} = \beta$. Desta forma,

$$cos\beta = \frac{\overline{FC}}{\overline{MC}} \Rightarrow \overline{FC} = 2rsen\alpha cos\beta$$

Analogamente, no triângulo ΔBFM temos que $\widehat{MBF} = \dfrac{\widehat{MOC}}{2}$, ou seja, $\widehat{MBF} = \alpha$. Logo,

$$cos\alpha = \frac{\overline{BF}}{\overline{BM}} \Rightarrow \overline{BF} = 2rsen\beta cos\alpha$$

Aplicando o teorema da corda quebrada, $\overline{AB} + \overline{BF} = \overline{FC}$, de modo que,

$$\overline{AB} = \overline{FC} - \overline{BF} \Rightarrow \overline{AB} = 2r(sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha)$$

Do ΔBOI retângulo em I, temos,

$$sen\gamma = \frac{\overline{BI}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{AB}/2}{r}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} = 2rsen\gamma$$

Mas o arco $\overset{\frown}{AM}$=$\overset{\frown}{MC}$, pois M é o ponto médio do arco $\overset{\frown}{AC}$, donde segue que

$$2\gamma + 2\beta = 2\alpha \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta$$

Desta forma teremos,

$$\overline{AB} = 2rsen(\alpha - \beta) \Rightarrow$$

$$2rsen(\alpha - \beta) = 2r(sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha)$$

Assim conclui-se a primeira identidade,

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha cos\beta - sen\beta cos\alpha$$

Provaremos a seguir a segunda identidade, sabendo que do teorema da corda quebrada temos,

$$\overline{BF} + \overline{FC} = \overline{BC}$$

Do teorema 3.4 segue que,

$$\frac{\overline{BC}}{sen(\alpha+\beta)} = 2r \Rightarrow \overline{BC} = 2rsen(\alpha+\beta)$$

Portanto,

$$2rsen(\alpha+\beta) = \overline{BC} = \overline{BF} + \overline{FC} = 2rsen\alpha cos\beta + 2rsen\beta cos\alpha \Rightarrow$$

$$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha cos\beta + sen\beta cos\alpha$$

Considerações finais

No desenvolvimento deste trabalho procurei fazer uma abordagem de alguns teoremas clássicos da Geometria Plana e algumas aplicações, com o objetivo de torná-los mais conhecidos, pois embora tenham um grande papel na resolução de muitos problemas, estão de certa forma esquecidos tanto no ensino básico quanto no ensino superior.

Muitos desses teoremas clássicos são construídos por meio de definições, proposições, corolários e até mesmo por outros teoremas bastante conhecidos, podendo, portanto, serem abordados em determinados níveis de ensino. Sendo que em alguns teoremas é mostrado a importância do estudo da medida algébrica nas construções geométricas quando tratamos de segmento orientado.

Acredito que a realização desse trabalho, com ênfase nos teoremas clássicos e suas aplicações, pode servir para a melhoria da aprendizagem da Geometria Euclidiana Plana e quem sabe servir de motivação para alunos e professores, buscando aprimorar seus conhecimentos, nesses teoremas estudados e em outros que tem como foco a geometria plana.

Bibliografia

[1] BARBOSA, João Lucas Marques. Geometria Euclidiana Plana, 4ª edição. Coleção do Professor de matemática. Sociedade Brasileira de Matemática. Copyright, Fortaleza, 1995.

[2] DANTE, Luiz Roberto. Matemática - volume único - 1ª edição, São Paulo: editora ática, 2009.

[3] DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. Fundamentos de matemática elementar - vol. 9: geometria plana. SARAIVA S.A. Livreiros Editores, São Paulo, 2011.

[4] REZENDE, Eliane. Geometria Euclidiana plana e construções geométricas/ Eliane Quelho Frota Rezende e Maria Lúcia Bontorim de Queiroz - 2ª edição - Campinas, SP: editora da Unicamp, 2008.

[5] http://bit.profmatsbm.org.br/xmlui/bitstream/handle/27/10/2013 - 23:12hs

[6] http://cyshine.webs.com/02/11/2013 - 12:25hs

[7] http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/07/10/2013 - 21:14hs

[8] http://obaricentrodamente.blogspot.com.br/01/11/2013 - 02:49hs

[9] http://www.mat.ufmg.br/gplana/menelau.pdf/27/10/2013 - 22:38hs

[10] http://www.mat.ufmg.br/espec/monografias.pdf/23/10/2013 - 20:32hs