UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

FACULDADE DE MATEMÁTICA

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

ISAÍAS DE SÁ SERRA

ASPECTOS MATEMÁTICOS NA MÚSICA

Belém

2014

ISAÍAS DE SÁ SERRA

ASPECTOS MATEMÁTICOS NA MÚSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciado em Matemática, pelo curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Federal do Pará, campus de Belém.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Vieira

Belém

2014

ISAÍAS DE SÁ SERRA

ASPECTOS MATEMÁTICOS NA MÚSICA

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exata e Naturais da Universidade Federal do Pará, campus de Belém, como requisito para obtenção do grau de Licenciado em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Aldo Vieira

Aprovado em _____/_____/_______

BANCA EXAMINADORA

____

Prof. Dr. Aldo Vieira

____

Prof. Ms. José Augusto Fernandes

____

Prof. Dr. João Cláudio Brandemberg

Dedico este trabalho a meus pais,
Álvaro Pereira Serra e
Maria Edna de Sá Serra
que sempre me apoiaram e incentivaram,
pois sem vocês este trabalho e
muito dos meus sonhos não se realizariam.
Na verdade, se não fosse por vocês,
dificilmente eu teria conseguido.
Por isso, divido esta conquista com vocês.

AGRADECIMENTOS

Tomando como referência a máxima de que não somos ninguém sem o próximo e que o homem não se constrói sozinho, esse trabalho só foi possível porque tive o apoio de muitas pessoas, as quais quero fazer, neste momento, um especial agradecimento.

A DEUS, pelas numerosas maravilhas que realiza em minha vida.

Aos meus pais amados, Álvaro Pereira Serra e Maria Edna de Sá Serra, por estarem sempre presentes em minha vida, que me deram toda a estrutura para que me tornasse a pessoa que sou hoje. Pela confiança e pelo amor que me fortalece todos os dias. Pelo que representaram em minha formação como pessoa, pois sou apenas o reflexo da criação que me deram e do amor em mim investido.

À minha família por ter aceitado e se esforçado para compreender as longas horas em que estive incomunicável.

Aos amigos que fiz ao longo desses anos, em especial a Marcelo Farinha, Lúcia Vilhena, Danielle Saraiva, Camila Cristina, Felipe Sozinho, Regiane Santos, Waldeci Gomes, Maria Lúcia Freitas, Linda Lúcia Mattos Fadul, Angela Pacheco, Andrezza Ramos, Mônica Soares, etc.

Aos professores do curso de Matemática que me proporcionaram reflexões e interlocuções ao longo desta jornada acadêmica, pelos conhecimentos compartilhados, por ajudarem em meu crescimento e amadurecimento.

Em especial agradeço ao professor Aldo Vieira, que foi um orientador extraordinário, estando sempre disposto, esclarecendo as minhas dúvidas, tendo muita paciência, competência, confiança, conhecimentos e principalmente a amizade.

À Universidade Federal do Pará por permitir a chegada desse momento.

Minha gratidão a todos que contribuíram direta ou indiretamente para realização deste trabalho e também para a formação da minha pessoa e da minha profissão.

Se eu não fosse físico, acho que seria músico.
Eu penso em termos de música.
Vejo a minha vida em termos de música.

Albert Einstein

RESUMO

No presente trabalho, desenvolvemos uma abordagem de alguns tópicos de duas grandes ciências (matemática e música) e algumas relações substanciais que existem entre ambas. O objetivo desse trabalho é expor um pouco da estreita relação entre matemática e música. Ambas seguem muito além do que a própria individualidade humana pode alcançar. Elas estão entre as primeiras formas de conhecimento a surgir na face da terra e desde então, acompanha os humanos para a eternidade. Na matemática e na música se refugia a linguagem, a arte, a abstração, o sentimento de criação e de transcendência. Características elementares que induzem inevitavelmente na existência de uma força superior (na existência de Deus). No decorrer dos estudos encontraremos uma breve história da música, onde mostraremos como surgiu o estudo e a importância da música para os povos da antiguidade. Estudaremos os movimentos ondulatórios, o que forma o som e por fim estudaremos a Escala de Bach, Segmento Áureo, Retângulo Áureo e como a matemática está integralmente ligada a eles.

Palavras-Chave: Matemática; Música e Razão Áurea.

LISTA DE IMAGENS

LISTA DE TABELAS

.

.

.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Este trabalho tem por objetivo mostrar ao leitor e principalmente ao aluno do curso de licenciatura em matemática, como a música está diretamente ligada à matemática. Mostrando que qualquer movimento vibratório de ar na entrada do ouvido corresponde a um tom musical que pode ser sempre, de maneira única, exibido como uma soma de um determinado número de movimentos vibratórios simples, correspondendo aos sons parciais deste tom musical. As primeiras componentes na Série Harmônica correspondem às frequências associadas aos primeiros termos da Série que determinam razões de números inteiros relacionados às consonâncias pitagóricas (sons agradáveis ao ouvido humano), tanto uma corda como colunas de ar em instrumentos de sopro possuem a característica de vibrar não apenas como um todo, mas ainda simultaneamente como duas metades, três terços, quatro quartos etc. Do ponto de vista matemático, observa-se que a frequência de cada harmônico contribui para a construção da forma da vibração periódica que se relaciona com o timbre do som.

No capítulo 1 será explorado o surgimento da música (na era paleolítica), época em que o homem desperta as suas primeiras manifestações de interesse para a arte e explicação para o "desconhecido". Sobre a história da música na Grécia Antiga, o significado, objetivos e razões para a música. Sobre as notáveis observações de Pitágoras com sua invenção do famoso monocórdio e das razões matemáticas que se refugia nos comprimentos de corda do tal instrumento.

Nos capítulos 2 e 3, veremos o comportamento de uma onda na corda, as propriedades do som, como velocidade, frequência e comprimento de onda. No capítulo 4 o estudo das progressões geométricas, além de conter uma curiosidade sobre os números de Fibonacci. No capítulo 5 apresentaremos o segmento áureo, a razão áurea e as propriedades que se refugiam no número áureo. O capítulo 6 faz referência á escala de Bach e ao processo matemático para a transposição das notas musicais. Expõe também, sobre a possibilidade de se planejar, projetar e construir instrumentos musicais a partir da equação $\mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda} \, . \, \mathbf{f}$ (tendo a velocidade do som $\mathbf{v}$ e a frequência de cada nota musical $\mathbf{f}$, o comprimento de onda $\boldsymbol{\lambda}$ corresponde a nota musical emitida por tal instrumento construído).

Por fim, o capítulo 7 relaciona a música aos números da sequência de Fibonacci. Como nessa sequência a razão entre dois números consecutivos tendem a convergir para o número de ouro, então surge assim, a “música áurea”.

1. HISTÓRIA DA MÚSICA (ERA PALEOLÍTICA).

O homem produz som desde a sua própria aparição na face da terra, graças ao seu ouvido maravilhosamente construído que se parece a uma harpa com infinidade de cordas, percebe sons e ruídos, embora apenas uma parte insignificante da imensidão de tudo quanto soa. O homem surge num mundo repleto de sons. O trovão, amedrontando-o, tornou-se símbolo de poderes sobrenaturais. No ulular dos ventos percebia a voz dos demônios e conhecia bem o mau ou o bom humor dos deuses pelo bramir das águas. Os ecos eram oráculos e as vozes dos animais, revelações. Religião e música mantiveram-se inseparavelmente ligadas nos antigos tempos da humanidade.

As crianças, já nascem com a capacidade musical. A natureza, por sua própria altivez é que nos dá a música para que possamos variar conforme o temperamento, a educação, o povo, a raça e a época.

De todas as artes, a música é considerada a mais primitiva e antiga. Desenvolveu-se a partir das primeiras manifestações humanas, dentre elas a necessidade de se comunicar. É a nossa mais antiga forma de expressão e por consequência mais antiga que a linguagem. De fato, a música é o homem, muito mais do que as palavras, pois estas são símbolos abstratos que transmitem significado fatual. A música toca nossos sentimentos mais profundos do que a maioria das palavras nos faz responder com todo nosso ser.

O homem primitivo dispõe apenas de poucas palavras ou gestos vocais e corporais (gritos, sons corporais, batimentos com pedras ou com ramos de árvores) utilizando para as suas necessidades mais elementares, com a finalidade de imitar a natureza para adaptar as circunstâncias as suas necessidades humanas. No decorrer do tempo passa a utilizar combinações sonoras para exprimir os sentimentos: a alegria, a tristeza, o júbilo, o amor, os instintos belicosos, a crença em forças ocultas e a vontade de dançar. A partir do momento que o homem começa a fazer combinações de sons é que podemos dizer que ai nasce à história da música. Provas arqueológicas apontam que o homem primitivo usava ossos, tambores, e flautas muito antes da última Era Glacial. Não sabemos a que destinavam esses instrumentos há trinta mil anos atrás, embora possamos especular sobre cerimônias e rituais, sacros e profanos.

Aos poucos, o homem passa a desenvolver idéias sobre o mundo de forças inexplicáveis, assim como tentar fazer devidas representações de tais forças. Nesse contexto desenvolveu-se a idéia de que ao reproduzir repetidos sons nas caçadas, se obteria melhor êxito. E assim, o homem passa a produzir e usar a música tanto nas expedições de caça como nas suas primeiras manifestações cerimoniais referente a forças da natureza, nas expedições de guerras pela luta pela sobrevivência e nos rituais fúnebres. Primeiramente se fazia uso apenas da combinação de sons vocais com sons corporais e posteriormente de instrumentos fabricados com ramos de árvores perfurados, bastões e pedras. Assim, a música passa a fazer parte da vida do homem primitivo, desde a canção do nascimento até a canção da morte, desde a dança ritual pela abundancia de caça até a cura dos doentes.

Apesar da música se fazer presente na vida do homem primitivo, não podia ser sentida, visto que ele desconhecia o conceito de arte. Portanto, sabemos pouca coisa sobre a música na Antiguidade. Possuímos monumentos de bronze e de pedra que apontam vestígios de culturas desaparecidas: poesias, lendas, filosofias de milhares de anos pelas quais podemos formar uma imagem espiritual das épocas passadas. Mas com a música é diferente. As culturas que desapareceram não nos deixaram nenhum legado de sons. Lemos em velhos e eruditos livros de religião, filosofia, matemática e astronomia. Em todos eles a música ocupa frequentemente lugar importante. Podemos testemunhar vestígios musicais em monumentos, monólitos, figuras, relevos, vasos, travessas, urnas. Já foram encontrados instrumentos em velhíssimos túmulos e cidades desaparecidas. Mesmo sendo mencionada na Bíblia; em poemas antigos; sagas; lendas e contos; mesmo sendo mencionada pelos sábios da China e as tradições indianas, descrevendo a beleza, o feitiço e o seu poder. Não sabemos como seria a música da antiguidade.

Em PAHLEN, 1964, p. 14, o poder da música pode ser notado em episódios bem interessantes durante a história da humanidade. “Davi toca a harpa para afugentar os maus pensamentos do Rei Saul”. “Farinnelli, com o auxílio da música, cura a terrível melancolia de Felipe V”. “Timóteo provoca por meio da música, a fúria de Alexandre, o Grande, e acalma-o por meio de outra”. “Os sacerdotes celtas educam o povo através da música, pois, somente eles conseguem abrandar os costumes selvagens”. “Terpandro, tocando flauta, abafou a revolta dos lacedemônios”. “Santo Agostinho conta que um pastor foi, em virtude de suas melodias, eleito imperador”.

Segundo PAHLEN, 1964, p. 15, a música age sobre o indivíduo e a massa. Presente na história das revoluções e também nas psicoses de guerra. Pode ser nas mãos dos homens, um feitiço; o seu efeito se estende desde o despertar dos mais nobres sentimentos até o desencadeamento dos mais baixos instintos, desde a concentração devotada até a perda da consciência que parece embriaguez, desde a veneração religiosa até a mais brutal sensualidade.

1.1. História da música na Grécia antiga

A história da Grécia antiga abrange aproximadamente dois mil anos. Um grande império que passa por épocas de ascensão, florescimento, decadência, crises e progressos. Por fim, toda a rica herança do grande império passa às mãos de outros povos os quais, não conhecendo as profundas raízes de tal cultura, não a sabem conservarem. Apesar de nos faltar o principal: o som, pois não sabemos como era o som da música helênica. Ainda assim, provas apontam que a música grega era tão esplêndida quanto à arquitetura, a escultura e a poesia, das quais possuímos tão magníficos exemplos e que ainda hoje a admiramos, milhares de anos depois da sua criação.

A palavra música significa “arte das musas”. Na mitologia grega, as musas representavam seres celestiais, divindades inspiradoras das artes e das ciências; eram nove, a saber: Calíope (da poesia épica), Clio (da história), Erato (da poesia amorosa), Euterpe (da poesia lírica e da música, tida como a que dá prazer), Melpômene (da tragédia), Polínia (dos hinos sacros), Tália (da comédia), Terpsichôre (da dança e do canto coral, tida como a bailarina e representada com a lira e o plectro) e Urânia (da astonomia).

Sobre a origem da lira, em PAHLEN, 1964, p. 27, existem três lendas. Existem hipóteses que mesmo as grandes epopéias escritas pelo lendário Homero, no século IX a.C. a Ilíada e a Odisséia, tenham sido representadas sob forma de música. Pois, muitos versos, mesmo em diferentes línguas, se assemelham a cantos.

Por volta do século V a.C. quando Atenas se transforma no centro cultural do mundo. Sob o templo de Partenon da Acrópole, encontra-se o magnífico Teatro de Dionísio com a capacidade para aproximadamente 30000 pessoas presenciarem as peças musicais. Em diversas crônicas a música era inteligentemente incluída. As poesias recitadas se transformavam em atos dramáticos. O coro desempenhava várias funções. Era conselheiro do artista, representava uma voz divina ou a consciência, cooperava com a música ou preenchia os intervalos com canções. Fazia papel de narrador e explicava os antecedentes do drama ou alguns trechos obscuros da peça.

Os gregos conheciam oito escalas que divergiam consideravelmente das nossas, pois não eram entre si uniformes como são as escalas do nosso sistema. Através de Platão temos minuciosa informação sobre as escalas: chama-se a uma tonalidade “plangente”, a outra, “macia e sensual”, à terceira, “belicosa”, à quarta, “pacífica e de acordo com livre resolução”. O culto de um deus, além de exigir outra tonalidade exigia também outros instrumentos, diferente dos usados no culto de outro deus. Existia também a cítara, espécie de lira e instrumento nacional, pois tinha o som macio e reservada a música séria; o deus Orfeu acompanhava com ela as suas melodias que emocionava todos os homens e até os animais. Quando sua esposa Eurídice faleceu, Orfeu incorreu ao criador do mundo subterrâneo e conseguiu comovê-lo com o seu canto a tal ponto de conseguir que a sua esposa fosse devolvida a vida sob a condição de não olhar para ela. Mas Orfeu não resistiu. Segundo a lenda de Orfeu: “o conhecimento do poder da música reveste-se da sua forma mais bela”.

O instrumento que se opõe à cítara é o aulos, de origem asiática, de tubo duplo, som excitante e sensual. Era usado para o culto apaixonado do deus Dionísio.

Lentamente o império helênico é arruinado e assim, a música grega passa a ter outras finalidades nas mãos do conquistador (PAHLEN, 1964).

1.2. Pitágoras e os ferreiros

Conta lenda que Pitágoras, filósofo e matemático que viveu no século V a.C. e foi educado no Egito, foi guiado pelos deuses na descoberta das razões matemáticas por trás dos sons depois de observar o comprimento dos martelos dos ferreiros ao passar em frente a uma oficina. Pitágoras observou as batidas de martelos de diferentes pesos e notou que produziam sons que eram agradáveis ao ouvido e se combinavam muito bem. E uma voz interna lhe falou que tal fenômeno era digno de estudo. Para estudar estes sons, Pitágoras teria esticado uma corda musical (provavelmente feita de tripla) que produzia um determinado som que tomou como fundamental, o tom. Fez marcas na corda que a dividiam em doze secções iguais, este instrumento mais tarde seria batizado de monocórdio.

> “Um certo Pitágoras, numa das suas viagens, passou por acaso numa oficina onde se batia numa bigorna com cinco martelos. Espantado pela agradável harmonia (concordiam) que eles produziam, o nosso filósofo aproximou-se e, pensando inicialmente que a qualidade do som e da harmonia (modulationis) estava nas diferentes mãos, trocou os martelos. Assim feito, cada martelo conservava o som que lhe era próprio. Após ter retirado um que era dissonante, pesou os outros e, coisa admirável, pela graça de Deus, o primeiro pesava doze, o segundo nove, o terceiro oito, o quarto seis de não sei que unidade de peso”.
> Fonte: http://espacoastrologico.org/2012/09/16/a-musica-das-esferas/

Assim, Pitágoras tocou a corda na sexta marca (correspondente a 1/2 do comprimento da corda) e observou que se produzia a oitava. Tocou na nona marca (correspondente a 3/4 do comprimento da corda) e observou que se produzia a quarta. Tocou na oitava marca (correspondente a 2/3 do comprimento da corda) e observou que se produzia a quinta. Conclusão: as frações 1/2, 3/4, 2/3 correspondiam à oitava, à quarta e à quinta, respectivamente.

Desta forma, Pitágoras observou que uma corda esticada, ao vibrar, produz não apenas um único som, mas um conjunto de sons vibrando concomitantemente (denominado sons harmônicos). Também que os sons produzidos tocando em outras marcas resultavam em dissonâncias: sons pouco agradáveis. Assim, a grande descoberta de Pitágoras se resume ao fato de que todos os intervalos musicais agradáveis ao ouvido humano são regidos pelas frações 1/2, 3/4, 2/3 (denominado sons consonantes).

2. ONDULATÓRIA

Para iniciar o estudo das ondas é preciso analisar um tipo especial de movimento periódico: movimento harmônico simples (MHS).

Considerando um corpo suspenso por meio de uma mola, em repouso (desprezando toda ou qualquer forma de perda de energia por atrito).

Retirando-se o corpo de sua posição de equilíbrio **O** e soltando-se o mesmo de uma posição **A** mais baixa, a deformação da mola causa um movimento de vaivém do corpo entre as posições extremas **A** e **B**. Esse movimento, retilíneo e periódico, é chamado movimento harmônico simples (MHS)

Cada ida e volta é um ciclo. O intervalo de tempo para o corpo descrever um ciclo (ida e volta) chama-se período **T** do MHS e é constante.

Sendo um movimento periódico, a frequência **f** do MHS relaciona-se com seu período **T** segundo a expressão:

$f = \frac{1}{T}$

É definida também uma constante $\boldsymbol{\omega}$ chamada pulsação e que se relaciona com o período **T** mediante a expressão:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

A equação acima vale simultaneamente para o MCU e para o MHC, pois ambos têm o mesmo período T.

Estabelecendo um eixo de coordenadas **x** para caracterizar a posição do corpo em cada instante. A origem desse eixo é o ponto de equilíbrio **O** do corpo, e a orientação do corpo é arbitrária.

Cada coordenada **x** do corpo é chamada elongação. A maior elongação do corpo é chamada amplitude **a** e devido à simetria do movimento conclui-se que as posições extremas do corpo tem elongações positiva e negativa.

A elongação varia com o tempo segundo a expressão:

$$x = a \cdot \cos\,(\omega t + \varphi_0)$$

Que é chamada **equação horária do MHS.** Onde, **x** (elongação) e **t** (tempo) são variáveis que se correspondem e **a** (amplitude), ω (pulsação) e φ_0 (fase inicial) são constantes.

A fase inicial φ_0 é uma constante cujo valor numérico depende da elongação **x** do corpo no instante $t = 0$ e representa a posição angular inicial do MCU. Através de φ_0 determina-se a elongação inicial (espaço inicial) x_0 do ponto inicial do MHS $x_0 = a \cdot cos\varphi_0$. Vejamos um exemplo:

Na equação horária $x = 10 \cdot \cos\,(\omega t + \varphi_0)$, se no instante $t = 0$ o corpo apresentar

$$-10 = 10 \cdot \cos(\omega \cdot 0 + \varphi_0) \therefore -1 = cos\varphi_0 \therefore \varphi_0 = \pi$$

Neste caso a fase inicial φ_0 é igual a π radianos. A amplitude **a** do MHS é igual ao raio **r** da trajetória de um corpo que realiza um MCU.

No sistema internacional (SI), as grandezas anteriores têm as seguintes unidades de medida:

x, **a**: metro (m)

t,**T**: segundo (s)

ω: radiano por segundo (rad/s)

φ_0: radiano (rad)

f: hertz (Hz) ou ciclo por segundo (ciclo/s)

2.1. Movimento ondulatório

Considerando-se o entendimento do "efeito dominó" quando dispomos as peças arrumadas na vertical a uma distância menor que o comprimento de cada peça.

Um pequeno impulso na primeira peça causa a queda de todos os componentes da fileira, após determinado tempo. Chamando de **s** ao comprimento da fileira e **t** ao tempo que decorre desde a queda da primeira até a queda da última peça, tem-se que a velocidade média de propagação da queda das peças é:

$$v = \frac{s}{t}$$

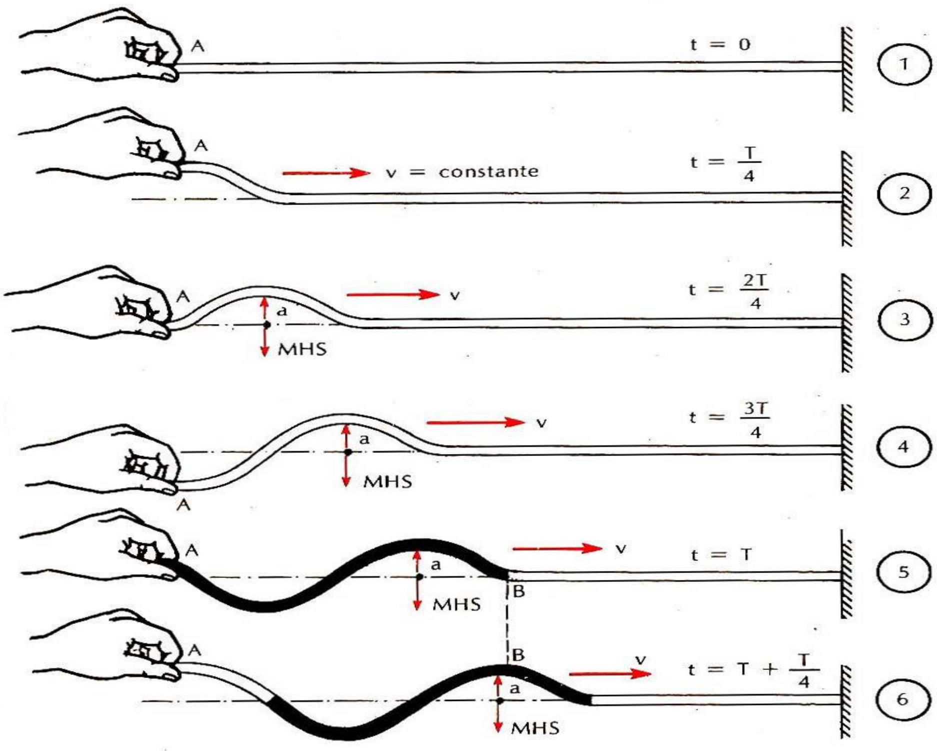
Claro que não se trata de propagação de matéria com velocidade $\boldsymbol{v}$ (cada peça mal sai de seu lugar), mas sim de propagação de uma perturbação (energia) com velocidade v. Tal perturbação é uma onda e ela se propaga no meio material constituído pela fileira de peças. Na natureza existem diversos tipos de propagação de energia através de ondas, sem propagação de matéria.

2.2. Cordas

Considerando-se uma corda flexível horizontal presa pela direita a um anteparo fixo e pela esquerda tracionada pela mão de uma pessoa (veja as ilustrações na figura abaixo). A partir de um dado instante, a mão começar a realizar um movimento harmônico simples (MHS) vertical de período **T** e amplitude **a**. A perturbação (energia) introduzida na extremidade **A** da corda propaga-se para os demais pontos da corda com velocidade **v** constante, e todos os pontos da mesma começam a vibrar com MHS vertical. Essa figura mostra a maneira como a energia vai atingindo os diversos pontos da corda. São seis fotografias da corda. Na foto (1), o ponto **A** inicia seu MHS. As fotos sucessivas são tiradas de ¼ em ¼ de período **T** do ponto A. foto (5), o ponto **A** completou seu primeiro ciclo, e a perturbação atingiu o ponto **B**, a partir daí, os pontos **A** e **B** passam a vibrar juntos, ou seja, eles sobem e descem simultaneamente. Diz-se que eles estão em fase. Entre **A** e **B**, cada ponto da corda está realizando um MHS de mesma amplitude **a** e mesmo período **T** que o ponto **A**, cada ponto inicia seu movimento atrasado em relação ao ponto **A**.

Esse atraso de um ponto em relação a outro acarreta elongações instantâneas diferentes entre os pontos e, como conseqüência, a corda adquire uma conformação sinuosa chamada onda. Essa onda acompanha a propagação horizontal da energia.

Imagem 01 : Propagação de onda.



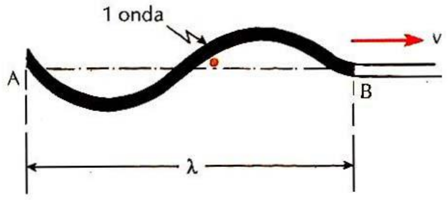
Fonte: YERSKOWICZ, Gerso; SCOLFARO, Valdemar; JÚNIOR, Francisco Ramalho. **,** 1986

Na corda, enquanto a onda se propaga horizontalmente com velocidade constante **v**, seus pontos materiais vibram verticalmente em MHS. Nesse caso a onda é chamada onda transversal.

A sinuosidade da corda entre A e B chama-se uma onda. A distância horizontal entre os pontos A e B chama-se comprimento de onda e é indicado pela letra grega **λ** (lambda).

Comprimento de onda é a distância **λ** entre dois pontos consecutivos do meio material que vibram em fase. Observe a ilustração abaixo.

Imagem 02 : Detalhamento da Propagação de onda.



Fonte: YERSKOWICZ, Gerso; SCOLFARO, Valdemar; JÚNIOR, Francisco Ramalho. **,** 1986

O período **T** mede o tempo de passagem de uma onda por um ponto determinado da corda.

A frequência $f = \frac{1}{T}$ mede o número de ondas que passam por um ponto determinado da corda em cada unidade de tempo (unidades: Hz; ciclos/s; ondas/s).

Uma onda completa forma-se durante o período **T** (foto 5).

Na foto (6) a onda já formada está se deslocando para a direita, enquanto uma nova onda começa a se formar.

O movimento de onda é uniforme (**v** = constante) e ela tem que se deslocar de uma distância **λ** no tempo **T**, para que atrás dela caiba a nova onda de comprimento **λ** que inicia no tempo **T**.

Desta forma:

$s = s_0 + v \cdot t$ (equação do Movimento Uniforme)

$s - s_0 = v \cdot t$

Como $s - s_0 = \boldsymbol{\lambda}$ (deslocamento da onda) e $t = T$ (tempo de deslocamento da onda). Logo:

$\boldsymbol{\lambda} = v \cdot \boldsymbol{T}$

Como no movimento periódico o período **T** de vibração é $T = \frac{1}{f}$ onde f é a frequência de vibração, então temos:

$\boldsymbol{\lambda} = \frac{v}{f}$ ou melhor $v = \boldsymbol{\lambda} \cdot f$, onde podemos verificar que o comprimento de onda **λ** relaciona-se com a velocidade de propagação **v**, com o período T e com a frequência **f**.

λ é o comprimento de onda (m);

v é a velocidade de propagação da onda (m/s;)

T é o período de propagação da onda (s);

f é frequência de propagação da onda (Hz ciclos/s).

3. O QUE É SOM?

A vida é som. Constantemente estamos cercados de sons e ruídos oriundos da natureza e das varias formas de vidas que ela produz. A natureza é repleta de sons: há milhões de anos, antes que houvesse ouvidos humanos, borbulhavam as águas, ribombavam os trovões, sussurravam as folhas no vento, etc. quem sabe quantos outros sons se não propagaram! Durante tempos sem fim deve te ressoado “o órgão natural da gruta de Fíngal”, muito antes que os celtas lhe chamassem “llhaimh bim”, gruta da música. A terra a abrir-se na mocidade, as fontes a jorrar, os vulcões e as montanhas a explodir, as águas do dilúvio a subir, tudo devem ter constituído gigantesca sinfonia que ninguém nos descreveu.

A vida é movimento; movimento é mudança; mudança é transformação; transformação é evolução; e evolução é a lei maior na natureza. A natureza é um ciclo. O som se origina de movimentos e segue um ciclo. A acústica discerne fundamentalmente duas classes de sons: os sons propriamente ditos e os ruídos, conforme forem às vibrações uniformes, ou não. A música, segundo a antiga teoria, deve ocupar-se apenas dos primeiros. Mas não é tão fácil traçar claramente o limite. Muitos instrumentos apenas produzem ruídos, e não sons, e que ocupam lugar importante na moderna orquestra: tambor, triângulo, pratos, tantãs, castanholas, tambirins. Podem existir diversas e fantásticas harmonias desses instrumentos como forte impressão musical, apesar da física afirmar diferentemente. Sistemas de sons que há séculos constitui a base do sistema ocidental podem sofrer ataques. Muitos desses ataques visam o verdadeiro ponto fraco, o de o nosso sistema desenvolvido da série de tons superiores, ter-se tornado pelo “tempero”, mais simples, mas matemática e fisicamente tão impuro, que a ligação entre ciência e música não passa de simples ficção.

Sejam os números de vibrações puros ou falsos, o dó sustenido igual ou não ao ré bemol, o semiton a menor unidade ou não, a subtônica uma imposição, o sistema dodecafônico um capricho, o que interessa é o desenvolvimento da música durante a história da humanidade, desde o elemento instintivo até a obra mais elevada e nobre. Isso compreende uma série de grandes ciclos misteriosos, um eterno nascer, desaparecer e renascer, um caminho misterioso pela vida e pela morte, através de países e continentes, culturas e épocas. Em PAHLEN, 1964, pág. 27.

> "A música é um fenômeno acústico para um prosaico; um problema de melodia, harmonia e ritmo para o teórico; e o desdobrar das asas da alma, o despertar e a realização de todos os sonhos e anseios de quem verdadeiramente a ama"...

Há aproximadamente 2500 a.C. um sábio chinês Ling Lun, ordenou, sistematizou e nomeou os cinco tons da música oriental. Cada tom era o nome de uma classe social da época, desde o imperador até o camponês. O curioso é que a escala pentatônica é divulgada e conhecida no mundo inteiro. E ainda hoje os cinco tons são característicos em grande parte do Oriente. Descobertas apontam sistemas de três tons entre raças primitivas da África e da América. Na Grécia passou por um aumento: seis e sete tons. Na idade média, pela "elevação" e "abaixamento" para um número bem maior que depois, pelo "tempero" se restringiu a 12 tons.

Devido à necessidade de transmitir a música de geração em geração com a mesma característica musical, foram criadas as notas musicais como os tempos em que elas são executadas, através de símbolos e figuras para a fiel leitura e execução de obras musicais.

Por volta do século IX, surge a pauta musical, definindo o pentagono por meados do século XI. Formada por cinco linhas que possuem quatro espaços entre elas e são contadas de baixo para cima, do grave para o agudo. Cada linha, cada espaço serve para representar uma nota musical diferente através de bolinha desenhada sobre a linha ou no espaço entre as linhas.

3.1. Entendendo o som.

O som é uma onda sonora e onda sonora é onda mecânica, isto é, somente propaga energia através da matéria, como ar, madeira, água etc. não se propaga, portanto no vácuo. O vácuo é a melhor barreira (isolante) que existe para o som.

As ondas sonoras são produzidas pelas fontes sonoras que contêm elementos vibrantes como cordas (violino, piano) ou colunas de ar que vibram (sistemas de tubos, flauta) ou ainda, membranas (tambor, alto-falante).

A vibração desses elementos transmite-se através do ar que os rodeia por meio das ondas sonoras, acabando por atingir o ouvido de uma pessoa nas proximidades. A molécula oscila em seu ponto original e causa regiões de condensação e rarefação (variação de pressão). A perturbação da superfície (fonte primária) desencadeia movimentos oscilatórios sucessivos no meio (fonte secundária), formando frentes de onda ("linha" que une pontos de rarefação ou compressão) que se deslocam com velocidade constante **v** ao longo do meio material. Sob o impacto das sucessivas frentes de alta pressão, o tímpano do ouvido vibra com a mesma frequência da fonte, sensibilizando o nervo auditivo, o qual transmite impulsos para o cérebro. No cérebro nasce, então, uma sensação sonora de frequência **f** igual à da fonte sonora. A distância entre as frentes de onda sucessivas é o comprimento de onda **λ**. O ouvido humano é sensível a sons cuja frequência variam entre **20** até **20000 Hz**, aproximadamente. Todos os instrumentos musicais emitem sons dentro desses limites de frequência. Abaixo de 20 Hz as ondas sonoras são chamadas de infra-sons e acima de 20000 Hz de ultra-sons. Os infra e ultra-sons não produzem sensação sonora no cérebro humano (são inaudíveis).

A velocidade de propagação de uma onda sonora depende do meio material que ela atravessa: se ela passar de um meio para outro sofrendo, portanto, uma refração, sua velocidade muda.

A freqüência de uma onda sonora depende apenas da fonte geradora. Portanto, quando uma onda sonora sofre uma refração, sua frequência não muda.

A expressão $\mathbf{v = \lambda . f}$ é válida para todos os tipos de propagação de energia através de ondas. Desta expressão conclui-se que: durante uma refração (mudança de meio) da onda, a freqüência **f** não muda e a velocidade **v** muda e o comprimento de onda **λ** também muda.

As ondas sonoras são chamadas de ondas longitudinais, pois as partículas do meio material vibram na mesma direção que a da propagação das ondas.

3.2. Velocidade do som

A velocidade da onda sonora depende do meio material que ela atravessa como pressão, umidade e temperatura. A velocidade de propagação do som nos sólidos é maior do que nos líquidos que por sua vez é maior do que nos gases. Por exemplo, a velocidade do som num trilho de aço é de aproximadamente 6100 m/s, na água é aproximadamente 1433 m/s e no ar é aproximadamente 343 m/s. Veja a tabela abaixo:

Tabela 01: Velocidade do som em diversos materiais.

Material	Velocidade do som
Aço	6100
Alumínio	4877
Tijolo	4176
Madeira	3962
Vidro	3962
Concreto	3231
Água	1433
Cortiça	366
Ar	343
Borracha	150

Fonte: Elaborado pelo autor.

Nos gases, a elevação de temperatura aumenta a velocidade de propagação do som que os atravessa.

3.3. Algumas propriedades de som

O som possui três características: altura, intensidade e timbre.

Altura: é a propriedade que permite distinguir sons graves de sons agudos. Esta propriedade está relacionada com a frequência da onda sonora.

Sons de grande freqüência causam sensação sonora das notas agudas da escala musical, e sons de pequena frequência causam sensação sonora das notas graves da escala musical. Por exemplo: um violino emite notas mais agudas do que um violoncelo, pois as cordas do violino vibram com maior frequência em relação ao violoncelo.

Dois sons de frequência $\mathbf{f_1}$ **e** $\mathbf{f_2}$, respectivamente, estão separados por um intervalo de uma oitava quando $\mathbf{f_1=2f_2}$. Assim, o som de freqüência $\mathbf{f_1}$ está uma oitava acima do da freqüência $\mathbf{f_2}$ e, este, uma oitava abaixo daquele.

Intesidade: é a propriedade que permite distinguir sons fracos de sons fortes.

A intensidade do som está relacionada com a quantidade de energia que a onda sonora transporta e, em consequência, com a amplitude de vibração do tímpano: sons fortes (de muita energia) fazem o tímpano vibrar com grande amplitude, e sons fracos (de pouca energia) fazem o tímpano vibrar com pequena amplitude.

Timbre: um ouvinte, mesmo de olhos fechados, sabe distinguir os sons que provêm de dois instrumentos diferentes, como um piano e um violino. Mesmo que esses dois instrumentos musicais estejam emitindo sons de mesma altura (frequência) e mesma intensidade (amplitude), eles produzem sensações sonoras distintas. Isso se deve a característica do som chamada timbre dos instrumentos. Toda nota musical produzida por um instrumento se compõe de vários sons superpostos de frequências diversas, do tipo: **100 Hz**, **200 Hz**, **300 Hz** etc., chamados sons harmônicos.

A altura do som emitido é sempre igual à altura do harmônico de menor frequência (no exemplo anterior **100 Hz**), chamado som fundamental. Instrumentos diferentes que estejam emitindo a mesma nota musical (mesmo som fundamental) têm timbres (vozes) diferentes, pois os sons harmônicos que acompanham o som fundamental têm frequências distintas nos dois instrumentos.

4. PROGRESSÕES GEOMÉTRICAS (PG)

Progressão geométrica é toda sequência de números não nulos na qual o quociente da divisão de cada termo (a partir do segundo) pelo termo anterior é constante. Esse quociente constante é chamado de razão (q) da progressão. Ou seja, progressão geométrica é uma sequência na qual a taxa de crescimento relativo de cada termo para o seguinte é sempre a mesma.

Uma sequência $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n\dots})$ com $a_1 \neq 0$ é uma PG de razão q$\neq 0$ quando:

$$a_2 = a_1 \cdot q \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = q$$

$$a_3 = a_2 \cdot q \Rightarrow \frac{a_3}{a_2} = q$$

$$a_4 = a_3 \cdot q \Rightarrow \frac{a_4}{a_3} = q$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1} \cdot q \Rightarrow \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

Podemos comparar as equações acima:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \cdots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = q$$

com $q = 1 + i$ em que

$$i = \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}}$$

$a_{n-1} \neq 0$ é a taxa de crescimento relativo dos termos.

Exemplos:

a) (1, 3, 9, 27, 81, 243,...), com $q = 3$

b) (3, -6, 12, -24, 48, -96...), com $q = -2$

c) (8, 4, 2, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$), com $q = \frac{1}{2}$

Podemos observar nos exemplos anteriores que ao tomarmos três elementos consecutivos, o do meio é tal que elevado ao quadrado fica igual ao produto dos outros dois. De modo que o do meio é a média geométrica dos outros dois. Esta é uma propriedade característica das progressões geométricas. De fato, se (a, b, c) é uma P.G. temos que $\frac{b}{a} = \frac{c}{b}$ e então $b^2 = ac$.

4.1. Classificação das progressões geométricas

Dependendo da razão q, uma P.G. pode ser:

Crescente: quando $q > 1$ e os termos são positivos ou quando 0$< q < 1$ e os termos são negativos. Por exemplo:

(2, 6, 18, 54,...), com $q = 3$

$(-40, -20, -10, -5, \ldots)$, com $q = \frac{1}{2}$

Decrescente: quando $0 < q < 1$ e os termos são positivos ou quando $q > 1$ e os termos são negativos. Por exemplo:

$(200, 100, 50, 25, \ldots)$, em que $q = \frac{1}{2}$

$(-4, -12, -36, -108, \ldots)$, em que $q = 3$

Constante: quando $q = 1$. Por exemplo:

$(10, 10, 10, \ldots)$, em que $q = 1$

$(-5, -5, -5, \ldots)$, em que $q = 1$

Alternante: quando $q < 0$. Por exemplo:

$(4. -8, 16, -32, \ldots)$, em que $q = -2$

$(-81, 27, -9, 3, \ldots)$, em que $q = -\frac{1}{3}$

4.2. Fórmula do termo geral de uma (PG)

Em uma progressão geométrica $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots)$ de razão q, partindo do primeiro termo, para avançar um termo, basta multiplicar o 1º termo pela razão *q*; para avançar dois termos, basta multiplicar 1º termo pelo quadrado da razão *q*; para avançar três termos, basta multiplicar o 1º termo pelo cubo da razão *q*; e assim sucessivamente. Desse modo encontramos o termo de ordem *n*, denominado termo geral da PG.

$$a_2 = a_1 . q$$

$$a_3 = a_2 . q = a_1 . q . q = a_1 . q^2$$

$$a_4 = a_3 . q = a_1 . q^2 . q = a_1 . q^3$$

$$a_5 = a_4 . q = a_1 . q^3 . q = a_1 . q^4$$

.

.

.

$$a_n = a_{n-1}.q = a_1.q^{n-2}.q = a_1.q^{n-1}$$

Assim,

$$a_n = a_1.q^{n-1}$$

Nessa fórmula, a_1 é o primeiro termo; n é o número de termos até a_n; q é a razão; a_n é o termo geral da P.G.

4.3. Soma dos termos de uma P.G. finita

Conta-se que o criador do jogo de xadrez, ao ser chamado por seu rei desejoso de recompensá-lo, fez o seguinte pedido: um grão de trigo pela primeira casa do tabuleiro, dois grãos de trigo pela segunda e assim sucessivamente, sempre dobrando, até a última das sessenta e quatro casas. Algum tempo depois, o soberano foi informado por sua acessória especializada de que seria impossível satisfazer aquele pedido aparentemente despretencioso, mas que significava uma quantidade muito grande de trigo. Em nosso sistema de numeração, esse número de grãos é representado com vinte algarismos. Logo adiante será mostrado como se obtém esse número como a soma de termos de uma sucessão geométrica.

Agora, trataremos de obter uma fórmula para calcular a soma dos n termos de uma P.G. finita $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ ou $(a_1, a_1.q, a_1.q^2, a_1.q^3, \dots, a_1.q^{n-1})$.

Se $q = 1$, caso em que a P.G. é constante, temos $S_n = n.a_1$.

Se $q \neq 1$, temos:

$$S_n = (a_1 + a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + \cdots + a_1.q^{n-1}) \qquad (1)$$

Multiplicando os dois membros dessa igualdade pela razão q, obtemos:

$$S_n.q = (a_1.q + a_1.q^2 + a_1.q^3 + a_1.q^4 + \cdots + a_1.q^{n-1} + a_1.q^n) \qquad (2)$$

Fazendo $(1) - (2)$ obtemos:

$$S_n - qS_n = a_1 - a_nq$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_nq$$

Como $a_n = a_1.q^{n-1}$, logo

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1.q^{n-1}.q$$

$$S_n(1-q) = a_1 - a_1.q^n$$

Portanto,

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q} \text{ para } q \neq 1.$$

4.4. Curiosidade

No século XIII, o matemático Leonardo de Pisa, cujo apelido era Fibonacci, visitou uma fazenda onde havia uma criação de coelhos e pôs-se a refletir sobre a reprodução rápida desses animais.

Supondo que um coelho tenha vida eterna e que cada casal gere um novo casal, que dará origem a um novo par no segundo mês de vida, e assim sucessivamente, de mês em mês, fica formada uma sequência especial com números naturais. Assim:

a) no 1º mês temos um casal de coelhos, que chamaremos de A;

b) no 2º mês continuamos com um casal: A;

c) no 3º mês, A gera um par B e passamos a contar com dois casais: A e B;

d) no 4º mês, teremos três pares e o novo casal é uma cria de A;passamos assim a ter A, B e C;

e) já no 5º mês, teremos, além da cria de A, uma cria de B, e então ficamos com cinco casais de coelhos: A, B, C, D e E;

f) no 6º mês, além das crias de A e B, teremos uma de C e então contaremos com oito casais: A, B, C, D, E, F, G e H;

g) no 7º mês, teremos crias de A, B, C, D e E e obteremos treze casais: A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L e M, assim sucessivamente.

Esquematicamente temos:

Tabela 02: Esquema que demonstra a reprodução de coelhos.

Mês	Casais	Número de casais	Casais que dão cria
1º	A	1	
2º	A	1	
3º	A, B	2	A
4º	A B, C	3	A
5º	A, B, C, D, E	5	A e B
6º	A, B, C, D, E, F, G, H	8	A, B e C
7º	A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M	13	A, B, C, D, e E
etc.			

Fonte: Elaborado pelo autor, com dados do livro: Matemática, vol. Único; DANTE, Luiz Roberto.

Podemos ampliar mais ainda essa tabela, assim:

Tabela 03: Tabela que demonstra a reprodução de coelhos.

Número do mês	Número de casais
0	0
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144
13	233
etc.	etc.

Fonte: Elaborado pelo autor, com dados do livro: Matemática, vol. Único; DANTE, Luiz Roberto.

Podemos formar uma sequência, em que cada termo nos dá o número de casais de coelhos:

(0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233,...)

Se dividirmos cada termo dessa sequência, a partir de 21, pelo seu precedente obteremos aproximadamente o número 1,618, o "número de ouro" dos gregos:

$\frac{21}{13} = 1{,}61538$; $\frac{34}{21} = 1{,}61904$; $\frac{55}{34} = 1{,}61764$; $\frac{89}{55} = 1{,}61818$; etc.

5. SEGMENTO ÁUREO

Por volta do (século V, a.C.), os gregos já conheciam a divisão de um segmento em "média e extrema razão". Significava dividir um segmento *AB* em dois segmentos diferentes, de modo que a razão entre o menor segmento e o maior segmento fosse igual à razão entre o maior segmento e o segmento *AB*. Desta forma, dividir um segmento *AB* em média e extrema razão significa encontrar um ponto *C*, interior a *AB*, tal que:

*A*______________________*C*___________*B* $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$

Fazendo *AB* = a e *AC* = x, a igualdade $\frac{CB}{AC} = \frac{AC}{AB}$ conduz à equação $x^2 + ax = a^2$

Assim, obtemos $\frac{x}{a} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. O segmento AC com essa propriedade é chamado segmento áureo interno de *AB*.

Da mesma forma, podemos imaginar um segmento AB e um ponto C' exterior a AB com a mesma propriedade enunciada anteriormente. Assim, teremos:

A__________________________________B____________C' $\frac{BC'}{AB} = \frac{AB}{AC'}$

Fazendo AB = a e AC' = y, obtemos $y^2 + ay = a^2$.

Logo, obtemos $\frac{y}{a} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. O segmento AC' com essa propriedade é chamado segmento áureo externo de AB.

Os números $\frac{x}{a}$ e $\frac{y}{a}$ são raízes reais da equação $x^2 + ax = a^2$

Os gregos usavam a letra grega **τ**(tau) para representar essa razão, pois significava "o corte". No início do século XX, o matemático Mark Barr nomeou a razão de ϕ (Fi), Em homenagem a Fídias (escultor grego que viveu entre 490 e 430 a.C.), que esculpiu o "Partenon de Atenas" e "Zeus", no templo de Olímpia.

Assim, $\frac{x}{a} = \phi' = 0{,}6180339887499 \ldots$ é solução da equação do segmento áureo (razão áurea) interno de *AB*. E $\frac{y}{a} = \phi'' = 1{,}6180339887499 \ldots$ é solução da equação do segmento áureo (razão áurea) externo de AB. Em Câmara, e Rodrigues, 2008:

> "De acordo com a opinião de Leonardo da Vinci e da maior parte dos artistas e sábios do renascimento, a divisão de um todo em partes desiguais de acordo com a "extrema e média" parece produzir um equilíbrio na desigualdade, proporcionando uma harmonia de forma geral"

5.1. Algumas propriedades do número áureo

Uma das muitas propriedades que surge da razão áurea é a de produzir seu quadrado apenas somando um e o seu recíproco subtraindo um ($\phi'' = 1 + \phi'$). Pois, elevando ϕ'' ao quadrado, temos $\phi''^2 = 2{,}6180339887499$ ...($\phi''^2 = 1 + \phi''$) e o seu inverso $\frac{1}{\phi''} = \phi''^{-1} = 0{,}6180339887499$ ..., ou seja, $\frac{1}{\phi''} = \phi'$.

Ao somar duas potências inteiras consecutivas de ϕ'' o resultado é a próxima potência de ϕ''. Pois:

$$\phi''^2 = 1 + \phi''$$

$$\Rightarrow \phi'' + \phi''^2 = \phi''.(1 + \phi'') = \phi''.\phi''^2 = \phi''^3$$

$$\Rightarrow \phi''^2 + \phi''^3 = \phi''^2.(1 + \phi'') = \phi''^2.\phi''^2 = \phi''^4$$

$$\vdots$$

$$\Rightarrow \phi''^n + \phi''^{n+1} = \phi''^n.(1 + \phi'') = \phi''^n.\phi''^{n+1} = \phi''^{n+2}$$

Logo,

$$\phi''^n + \phi''^{n+1} = \phi''^{n+2}$$

A propriedade acima também é válida para potências de expoente inteiro negativo. Basta considerar $\phi'' = 1 + \phi''^{-1}$, (com $n < 0$). O resultado é trivial.

Outra propriedade bem interessante é que o somatório de todas as potências de expoentes inteiros negativos e base igual a ϕ'' é igual a ϕ'', ou seja, converge para ϕ''.

$$\phi''^{-1} + \phi''^{-2} + \phi''^{-3} + \phi''^{-4} + \phi''^{-5} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-n}$$

$$= (\phi''^{-1} + \phi''^{-2}) + (\phi''^{-3} + \phi''^{-4}) + (\phi''^{-5} + \phi''^{-6}) + \cdots + (\phi''^{-n+1} + \phi''^{-n})$$

$$= \phi''^{0} + \phi''^{-2} + \phi''^{-4} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-2n}$$

$$= 1 + \phi''^{-2}.(\phi''^{0} + \phi''^{-2} + \phi''^{-4} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-2n}), \quad com\ n \in N$$

Fazendo,

$$\phi''^{0} + \phi''^{-2} + \phi''^{-4} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-2n} = x$$

Temos,

$$x = 1 + \phi''^{-2}.x$$

$$\Rightarrow x - 1 = \frac{1}{\phi''^{2}}.x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-1} = \phi''^{2}$$

Como,

$$\phi''^{2} = 1 + \phi''$$

Temos,

$$\Rightarrow \frac{x}{x-1} = 1 + \phi''$$

$$\Rightarrow \frac{x}{x-1} - 1 = \phi''$$

$$\Rightarrow \frac{x - x + 1}{x-1} = \phi''$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x-1} = \phi''$$

$$\Rightarrow x = \frac{1+\phi''}{\phi''} = \frac{\phi''^{2}}{\phi''} = \phi''$$

Logo,

$$x = \phi''$$

Como,

$$\phi''^{0} + \phi''^{-2} + \phi''^{-4} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-2n} = x = \phi''$$

Segue que,

$$\phi''^{-1} + \phi''^{-2} + \phi''^{-3} + \phi''^{-4} + \phi''^{-5} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-n}$$

$$= \left(\phi''^{-1} + \phi''^{-2}\right) + \left(\phi''^{-3} + \phi''^{-4}\right) + \left(\phi''^{-5} + \phi''^{-6}\right) + \cdots$$
$$+ \left(\phi''^{-n+1} + \phi''^{-n}\right)$$

$$= \phi''^{0} + \phi''^{-2} + \phi''^{-4} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-2n}$$

$$= 1 + \phi''^{-2}.\left(\phi''^{0} + \phi''^{-2} + \phi''^{-4} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-2n}\right)$$

$$= 1 + \phi''^{-2}.\phi''$$

$$= 1 + \phi''^{-1} = \phi''$$

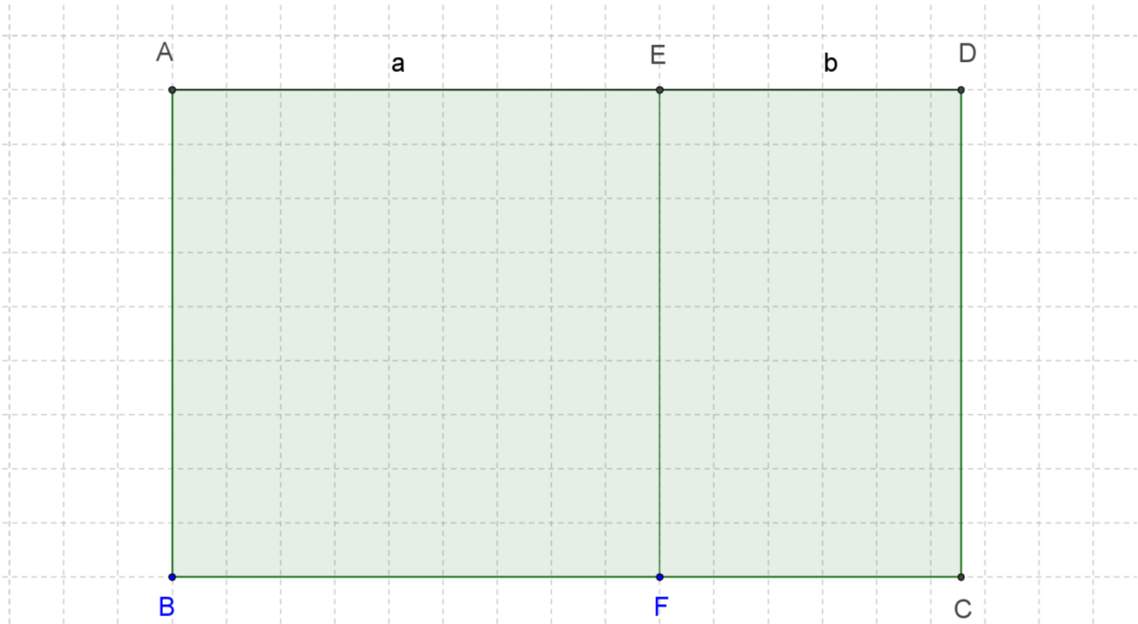
Logo,

$$\phi''^{-1} + \phi''^{-2} + \phi''^{-3} + \phi''^{-4} + \phi''^{-5} + \phi''^{-6} + \cdots + \phi''^{-n} = \phi''$$

5.2. Retângulo áureo

Retângulo áureo é qualquer retângulo ABCD (como na figura abaixo) com a seguinte propriedade: se dele suprimirmos um quadrado, como ABFE, o retângulo restante, EFCD, será semelhante ao retângulo original.

Imagem 03 : Retângulo Áureo



Fonte : Elaborado pelo autor, no programa Geogebra, 2014.

ABFE é um quadrado com o lado de medida a. Como $a + b$ e a são os comprimentos dos lados do retângulo original, então segue a seguinte proporção:

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{ED} \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Daí, $a^2 = ab + b^2 \Rightarrow a^2 - ab - b^2 = 0$

A solução desta equação em a é exatamente o número $\phi'' = 1{,}6180339887499\ldots$, que é um dos números mais curiosos da matemática, aparece de forma surpreendente em diversos problemas, mesmo não possuindo relação em entre si. Esse número foi chamado pelos gregos de número áureo. Assim, retângulo áureo é o retângulo cuja razão das dimensões é o número áureo.

6. A ESCALA DE BACH

Johann Sebastian Bach (1685 - 1750) projetou e idealizou uma escala musical dividida em doze partes através de logaritmos. Assim, Bach criou a chamada escala cromática ou temperada: dó, dó#, ré, ré#, mi, fá, fá#, sol, sol#, lá, lá#, si. Essas notas da escala temperada correspondem aos logaritmos da base 2. Assim:

$$k^{12} = 2 \quad ou \quad k = \sqrt[12]{2}$$

Aplicando logaritmo natural aos dois membros, temos:

$$\ln k^{12} = \ln 2$$

Aplicando propriedade de potência de logaritmos, temos:

$$12 \cdot \ln k = \ln 2 \Rightarrow \ln k = \frac{\ln 2}{12}$$

Pela de definição de logaritmo, temos:

$$k = e^{\frac{\ln 2}{12}}$$

Assim, k = 1,059463... (intervalo entre duas notas consecutivas). Nesta escala, a frequência (hertz) sofre um aumento sempre igual a 5.9463...% em relação à nota anterior: duas notas consecutivas de mesmo nome têm sempre um intervalo de 1 para 2 (a frequência da superior é igual ao dobro da frequência da anterior), isto é, aumentam 3 dB por oitava; duas notas consecutivas têm sempre o mesmo intervalo (intervalo = quociente das frequências = 1,059463...), isto é, a frequência de uma nota é sempre 0.25 dB (= 3 dB / 12) maior que a anterior. A tabela abaixo permite uma melhor visualização sobre as notas da escala temperada e Bach.

Tabela 04: Representação da Escala de Bach

Ordem	Nota	Cor da tecla do piano	Tipo	Cálculo da frequênca	Frequência (hertz)
0	Dó	Branca	Tom	$F_1 = \frac{440}{k^9}$	261,6
1	Dó #	Preta	Semi-Tom	$F_2 = \frac{440}{k^8}$	277,2
2	Ré	Branca	Tom	$F_3 = \frac{440}{K^7}$	293,7
3	Ré #	Preta	Semi-Tom	$F_4 = \frac{440}{K^6}$	311,1
4	Mi	Branca	Tom	$F_5 = \frac{440}{K^5}$	329,6
5	Fá	Branca	Tom	$F_6 = \frac{440}{K^4}$	349,2
6	Fá #	Preta	Semi-Tom	$F_7 = \frac{440}{K^3}$	370,0
7	Sol	Branca	Tom	$F_8 = \frac{440}{K^2}$	392,0
8	Sol #	Preta	Semi-Tom	$F_9 = \frac{440}{K}$	415,3
9	Lá	Branca	Tom	440 Hz (definição)	440
10	Lá #	Preta	Semi-Tom	$F_{11} = 440.K$	466,2
11	Si	Branca	Tom	$F_{12} = 440.K^2$	493,9
12	Dó	Branca	Tom	$F_{13} = 440.K^3$	523,3

Fonte: http://www.amattos.eng.br/Public/INSTRUMENTOS_MUSICAIS/Textos/Div/notas.htm

Observando a tabela acima, nota-se que as respectivas frequências estão em progressão geométrica cuja razão é (k = 1, 059463...). Uma oitava corresponde à razão de 2/1 na frequência, uma quinta na razão de 3/2, uma quarta na razão de 4/5 e assim por diante. A frequência de uma série de notas separadas por oitavas aumenta em uma progressão (1, 2, 4, 8, 16) e assim por diante. A escrita das notas musicais segue uma escala logarítmica na qual o tom é proporcional ao logaritmo de frequência.

A nota musical Lá (correspondente a frequência de 440Hz) é utilizada como padrão internacional de referência para afinação. É uma convenção adotada em 1939 e ratificada em 1953, pela Organização Internacional de Estandardização (International Standardizing Organization).

Usando a equação $\mathbf{v} = \boldsymbol{\lambda} \, . \, \mathbf{f}$ e sabendo-se que a velocidade do som no ar é de aproximadamente 343m/s, então dá para calcular o comprimento de onda de cada nota musical.

Tabela 05: Comprimento de onda das notas musicais

Ordem	Nota	$v = \lambda \cdot \mathrm{f}$	$\lambda \, (m)$
0	Dó	$343 = \lambda \cdot 261{,}6$	1,31116208
1	Dó #	$343 = \lambda \cdot 277{,}2$	1,23737374
2	Ré	$343 = \lambda \cdot 293{,}7$	1,16785836
3	Ré #	$343 = \lambda \cdot 311{,}1$	1,10253938
4	Mi	$343 = \lambda \cdot 329{,}6$	1,04065534
5	Fá	$343 = \lambda \cdot 349{,}2$	0,98224513
6	Fá #	$343 = \lambda \cdot 370$	0,92702703
7	Sol	$343 = \lambda \cdot 392$	0,875
8	Sol #	$343 = \lambda \cdot 415{,}3$	0,82590898
9	Lá	$343 = \lambda \cdot 440$	0,77954545
10	Lá #	$343 = \lambda \cdot 466{,}2$	0,73573574
11	Si	$343 = \lambda \cdot 493{,}9$	0,69447257
12	Dó	$343 = \lambda \cdot 523{,}3$	0,65545576

Fonte: Elaborado Pelo Autor, 2014.

De acordo com a tabela acima, é possível construir instrumentos musicais. Por exemplo, serrando tubos de PVC com os comprimentos da mesma medida dos respectivos comprimentos de onda $\boldsymbol{\lambda}$ explicitado na tabela acima, obteremos as frequências **f** das notas musicais Dó, Dó #, Ré, Ré #, Mi, Fá, Fá #, Sol, Sol #, Lá, Lá #, Si, Dó-menor. Observe as devidas representações na imagem a seguir.

Imagem 04: Representação das notas musicais em tubos PVC

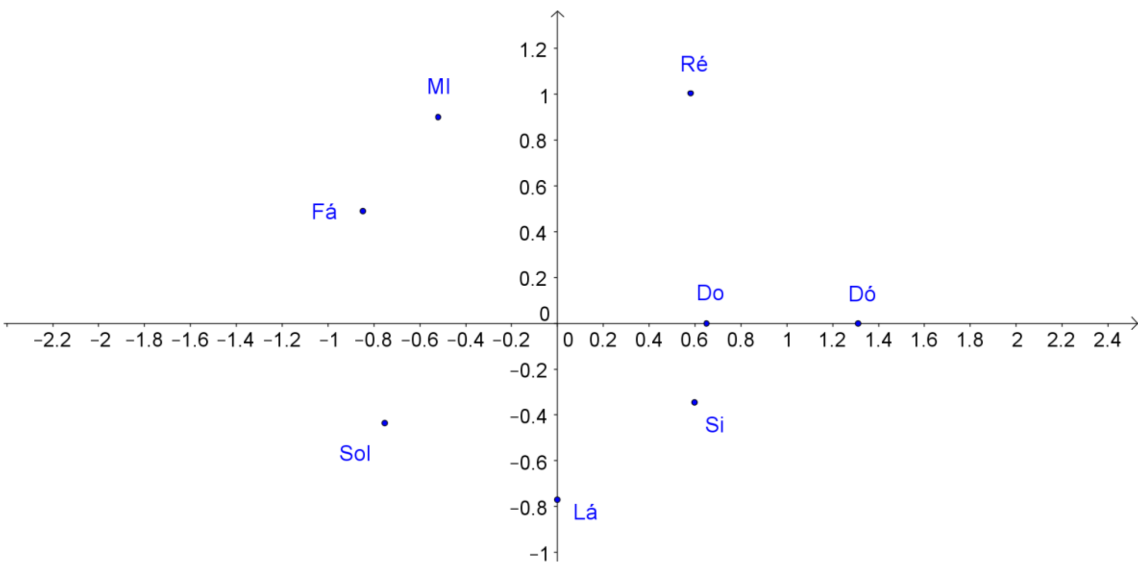
Fonte : Isaias Serra, 2014.

6.1. Sobre o desenvolvimento da escala de Bach

Bach, tocava cravo, um instrumento cujo som é produzido golpeando-se as cordas através das teclas, mas um problema técnico com tal instrumento o intrigava. Até então, a escala musical comum era baseada nas leis das cordas vibratórias. Os intervalos utilizados na música (oitava, quinta, quarta, e assim por diante) são todos derivados dos harmônicos, ou sobretons de uma corda, cujos tons mais altos e fracos estão sempre presentes quando a corda vibra. As frequências desses harmônicos são múltiplos inteiros da freqüência fundamental, e assim formam a progressão (1, 2, 3, 4,...). Os intervalos dessa escala correspondem as proporções entre os números 2/1 no caso da oitava, 3/2 para a quinta, 4/3 para a quarta e assim sucessivamente. A escala formada a partir dessas proporções é chamada de *escala de modulação exata*.

Acontece que a escala construída a partir dessas proporções consiste em três intervalos básicos: 9/8, 10/9 e 16/15. Os dois primeiros são quase idênticos e cada um é conhecido como tom inteiro, ou um *segundo* (assim chamado porque leva a segunda nota na escala). A última proporção é bem menor e chamada de semitom. Começando com a nota dó e seguindo a escala, temos dó – ré – mi – fá – sol – lá – si – dó-maior, o primeiro intervalo de dó a ré, é um tom inteiro, cuja taxa de frequência é 9/8. O intervalo seguinte, de ré a mi é novamente um tom inteiro, mas com a razão de frequência de 10/9. Os intervalos remanescentes na escala são mi para fá (16/15), fá para sol (9/8), sol para lá (10/9), lá para si (9/8), e por fim si para dó-maior (16/15) a última nota estando uma oitava acima de dó. Esta é a escala conhecida como dó-maior. Mas as mesmas proporções devem se manter, independetemente de com qual notas começamos. Cada escala maior consiste na mesma sequência de intervalos. Como podemos verificar, existem duas proporções diferentes para o mesmo intervalo. Não somente existem dois tipos diferentes de tons inteiros em uso, como também e soma de dois semitons não é exatamente igual a nenhum dos dois tons. É como se 1/2 + 1/2 não fosse exatamente igual a 1, apenas aproximadamente. Assim, a soma de dois semitons é o produto de suas taxas de frequências (16/15).(16/15)=256/225 ou, aproximadamente 1,138, que é ligeiramente maior do que 9/8 (=1,125) ou 10/9 (=1,111). No gráfico a seguir, observe o comportamento das notas musicais (escala de modulação exata). Lembrando que essas distâncias representadas são os comprimentos de onda **λ**.

Imagem 05 : Notas musicais em coordenadas



Fonte : Elaborado pelo autor no programa Geogebra, 2014.

O mecanismo do cravo é delicado: cada corda vibra apenas na frequência fundamental específica. Caso se queira tocar uma peça em ré-maior, no lugar de dó-maior, ou seja, uma transposição, então o primeiro intervalo de (de ré para mi) terá uma proporção de 10/9, em vez de 9/8 original. Isso continua bem porque na proporção 10/9 ainda faz parte da escala; ademais, um ouvinte médio quase não nota diferença. Mas o intervalo seguinte, que novamente deve ser um tom inteiro, pode ser formado apenas se subirmos um semitom e mi para fá e então outro semitom de fá para fá sustenido. Isso corresponde a uma proporção de (16/15).(16/15) = 256/225, um intervalo que não existe na escala. E esse problema vai se agravando quando mais se sobe na escala. Em suma, não há como transpor de uma escala para a outra, a menos, é claro, que se toque um dos poucos instrumentos que possuem um espectro contínuo de notas, como o violino ou a voz humana.

Para corrigir esse problema, Bach fazia com que todos os tons inteiros fossem iguais uns aos outros. Assim, a soma de quaisquer dois semitons sempre daria um tom inteiro. Para fazer isso Bach teve que abandonar a escala de modulação exata. Nesse novo arranjo a oitava consiste em doze *semitons iguais*. Que Bach chamava de escala igualmente temperada. No The New Grove Dictionary of Music and Musicians, 1980:

> Bach não foi o primeiro a pensar em tal disposição de notas. Tentativas para se chegar a um sistema "correto" de afinação remontam ao século XVI, e em 1691, uma escala "bem temperada" foi sugerida pelo construtor de órgãos Andreas Werckmeister. Mas foi devido a Bach que a escala igualmente temperada tornou-se conhecida universalmente.
> http://www.amattos.eng.br/Public/INSTRUMENTOS_MUSICAIS/Textos/Div/notas.htm

6.2. A espiral

O desenvolvimento da escala de Bach deve-se a dois grandes gênios do século XVIII. Johann Sebastian Bach (compositor, organista e kapellmeister na igreja de São Tomás, em Leipzing) e as notáveis contribuições matemáticas de Johann Bernoulli (o mais ilustre professor da Universidade da Basiléia). Não se sabe se Bach e Bernoulli tiveram um encontro para compartilhar trocas de conhecimento. Mas é muito provável que tanto Bach quanto Bernoulli tomou ciência um do outro por causa da fama que ambos possuíam.

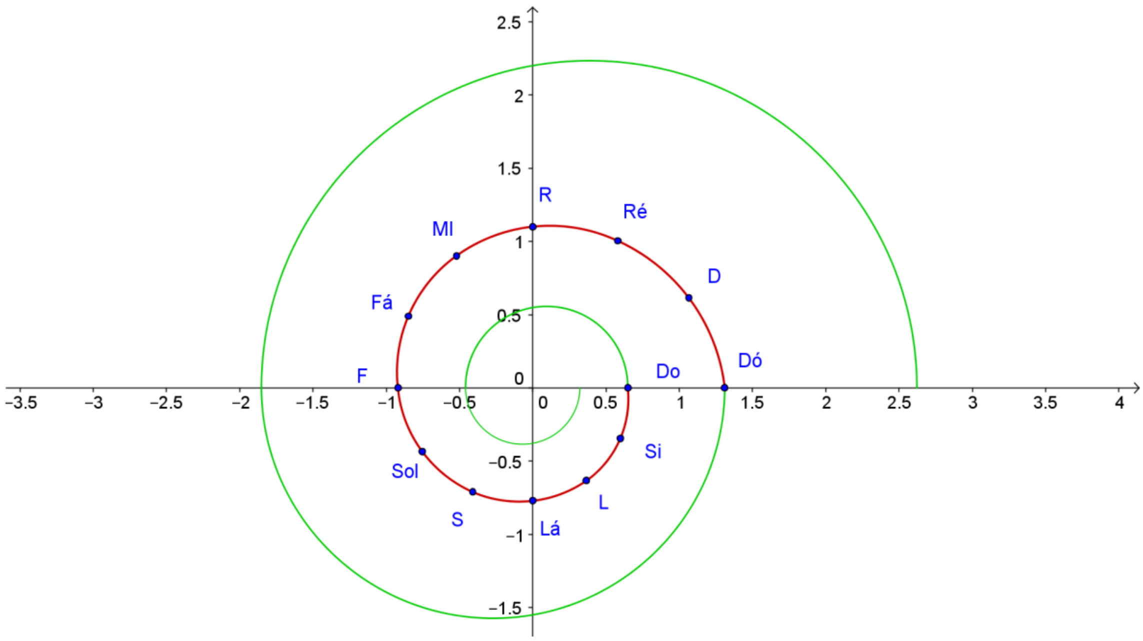
Como na escala de Bach existem 12 semitons iguais na oitava, então Bernoulli calculou as proporções entre as frequências de cada semitom nessa nova escala. Cada semitom deve ter uma taxa de frequência de $\sqrt[12]{2}/_1$. De fato, a soma de 12 semitons corresponderá a $\left(\sqrt[12]{2}\right)^{12}$, que é exatamente, a oitava.

> O valor decimal dessa proporção é cerca 1,059, comparado a 1,067 para a proporção 16/15. Essa escassa diferença, embora ainda dentro do alcance da audição, é tão pequena que a maioria dos ouvintes a ignora. Ao tocar o sono, entretanto, os cantores e instrumentalistas de cordas ainda preferem a escala exata de entoação.
> http://www.amattos.eng.br/Public/INSTRUMENTOS_MUSICAIS/Textos/Div/notas.htm

Jacob, o falecido irmão de Bernoulli, passou muito tempo explorando uma curva chamada de espiral logarítmica. Nessa curva, rotações iguais aumentam a distância em relação ao pólo em proporções iguais.

Como na escala de Bach existem 12 semitons iguais na oitava, então Bernoulli marcou nessa espiral os 12 semitons iguais. Para transpor uma peça de uma escala para outra, basta girar a espiral de modo que o primeiro tom de sua escala caia sobre o eixo dos x. Os tons remanescentes cairão automaticamente no lugar. Na verdade isso é uma espécie de calculador musical! E assim, o problema da transposição ficou resolvido. Observe a espiral a seguir.

Imagem 06 : Notas musicais sobre a espiral



Fonte : Elaborado pelo autor no programa Geogebra, 2014.

Essa espiral possui muitas propriedades matemáticas notáveis, que a tornam ímpar entre as curvas planas. Ela ocorre com mais frequência na natureza do que qualquer outra curva, ás vezes com precisão de causar espanto. Jacob Bernoulli dedicou se bastante tempo ao estudo das propriedades dessa curva. Uma das propriedades mais notáveis dessa espiral é que ela aparece a mesma em todas as direções. Para ser mais claro, cada linha reta através do centro (o polo) atravessa e espiral exatamente com o mesmo ângulo. Por isso ela é também conhecia como espiral equiangular. Esta propriedade dá á espiral à simetria perfeita do círculo. Pois o círculo é uma espira logarítmica para a qual o ângulo de interseção é de 90° e a taxa de crescimento é 0.

Outra propriedade dessa curva e que está relacionada diretamente com a primeira é seguinte: girando a espiral por arcos iguais aumenta a distância ao pólo através de uma taxa igual, isto é, numa progressão geométrica. Assim, qualquer par de linhas traçadas através do pólo, com um ângulo fixo entre elas, corta seções semelhantes (mesmo não congruentes) da espiral.

As transformações em coordenadas polares permitiram a Jacob Bernoulli investigar numerosas curvas novas. A curva favorita de Jacob era a mencionada acima, cuja equação é $\ln r = a\theta$, onde a é uma constante e ln é o logaritmo natural ou "hiperbólico", como era chamado. Hoje sabemos facilmente escrever essa equação na forma inversa $r = e^{a\theta}$, mas na época de Bernoulli a função exponencial ainda não era considerada como uma função independente (o número e nem tinha ainda um símbolo especial). Daí essa espiral ser conhecida como espiral logarítmica.

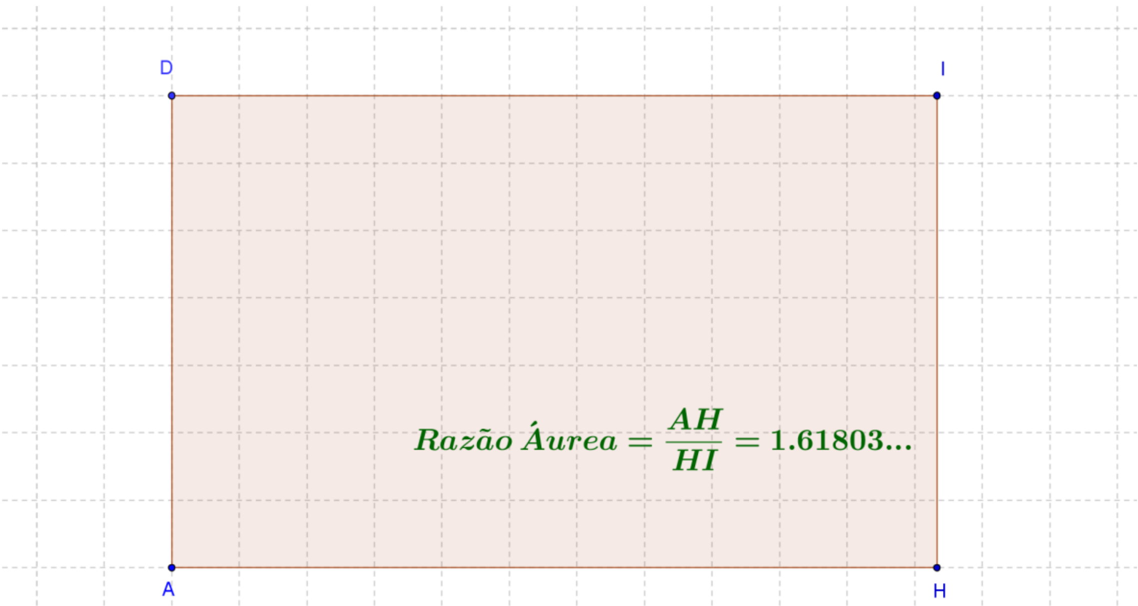
Jacob ficou tão maravilhado com as brilhantes descobertas dessa espiral que desenvolveu uma reverência quase mística em relação a sua amada curva: "Como esta maravilhosa espiral, com sua peculiaridade tão singular e encantadora... sempre produz uma espiral semelhante a ela mesma, de fato precisamente a mesma espiral, não importa como tenha sido refletida, refratada, evoluída ou involuída... ela pode ser usada como um símbolo, ou de constância na adversidade, ou do copo humano, que depois de todas as suas mudanças, mesmo depois da morte, será restaurado a sua forma exata e perfeita" (MAOR, 2008, Pág. 166).

Segundo MAOR, 2008, Pág. 166, Jacob a batizou de *spira mirabilis* (em latim, a espiral maravilhosa) e expressou que uma espiral logarítmica fosse gravada em sua lápide com a seguinte inscrição: Eadem mutata resurgo (embora mudado, devo me erguer o mesmo). Mas o desejo de Jacob não foi bem atendido. O pedreiro, talvez por ignorância, ou para tornar o seu trabalho mais fácil, esculpiu a espiral de Arquimedes e não a espiral logarítmica. Na espiral de Arquimedes, cada volta sucessiva aumenta a distância em relação ao polo através de uma diferença constante e não uma taxa. E assim permanece gravada na lápide de Jacob Bernoulli até os dias de hoje a espiral de Arquimedes.

7. A MÚSICA NA RAZÃO ÁUREA

Neste tópico será desenvolvido algumas relações diretas entre a música e a razão áurea. Observe a razão áurea no retângulo a seguir.

Imagem 07: Razão áurea no retângulo



Fonte : Elaborado pelo autor no programa Geogebra, 2014

Vamos partir do princípio, por que a sexta maior e a sexta menor são considerados os intervalos musicais mais agradáveis ao ouvido humano, e que estes intervalos estão relacionados com a razão áurea.

Um tom musical puro se caracteriza por uma frequência fixa e por uma amplitude fixa (que determina a sonoridade instantânea). O tom padrão na afinação é o Lá, cuja frequência é de 440Hz. Uma sexta maior pode ser obtida por uma combinação de Lá e Dó, sendo que a última nota é produzida por uma freqüência aproximada de 261,6Hz. A razão das duas frequências, (440/261,6), reduz-se a 5/3, razão de dois números de Fibonacci. Uma sexta menor pode ser obtida de um Dó alto (523,3Hz) e um Mi (329,6Hz). Neste caso a razão das duas notas será, (523,3/329,6), reduz-se a 8/5, que é também a razão de dois números de Fibonacci e já bastante próxima da Razão

Áurea.(vale lembrar que as razões de números de Fibonacci sucessivos se aproximam da Razão Áurea).

Um fato curioso sobre a dedução do número k = 1,059463... (intervalo entre duas notas consecutivas) na "escala temperada" de Bach, na qual cada semitom tem uma razão de frequência igual a do semitom seguinte, remontam a Grécia antiga. Vale lembrar que a oitava é obtida dividindo-se uma corda em duas partes iguais (razão de frequência de 2/1), e uma quinta é produzida por uma razão de freqüência de 3/2. Uma das questões que intrigavam os pitagóricos era se, repetindo-se o procedimento para criar a quinta (aplicando a razão de freqüência 3/2 consecutivamente), seria possível gerar um número inteiro de oitavas. Matematicamente, significa que: existem dois números inteiros m e n, tal que $\left(\frac{3}{2}\right)^n = 2^m$? Acontece que, embora não existam dois números inteiros m e n que satisfaçam essa igualdade com precisão, $m = 7$ e $n = 12$ chegam bem perto devido a coincidência que $\sqrt[12]{2}$ é quase igual a $\sqrt[19]{3}$. As doze frequências da oitava são portanto, potências aproximadas da razão da frequência básica $\sqrt[12]{2}$. Outro fato curioso é que a razão $\frac{19}{12} = 1{,}58333333$ ..., não muito distante do número $\phi'' = 1{,}6180339887499$ ...

Uma maneira pela qual a razão áurea poderia, em princípio, contribuir para o resultado satisfatório de uma peça musical é por meio do conceito de equilíbrio proporcional.

Roy Howat, da Universidade de Cambridge, no livro *Debussy em proporção*, afirma que o compositor francês Claude Debussy (1862-1918), cujas inovações harmônicas influenciaram profundamente várias gerações de compositores, usou a razão aura em muitas de suas composições. Por exemplo, na peça para piano solo *Reflets dans l'eau* (eflexos na água), parte da série *Imagens*, a primeira reprise do rondó, ocorre após o compasso 34, que está no ponto da razão áurea entre o começo e o clímax no compasso 55. Os números 34 e 55 são números de Fibonacci, e a razão 34/21é uma boa aproximação da razão áurea. E a mesma estrutura é refletida na segunda parte, que é dividida em uma razão de 24/15 que equivale a razão 8/5, também próxima da razão áurea. Howat encontra divisões semelhantes nos três esboços sinfônicos *La Mer* (O mar), peça para piano *jardins sous La pluie* (Jardins sob a chuva) e em outras obras.

8. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este Trabalho de Conclusão de Curso foi voltado para o estudo e possibilidade de se mostrar a existência de muitas e grandiosas relações entre a música e a matemática. Todas essas relações são dignas de estudo e devem ser observadas de perto. Mostra também que não existe nenhuma forma de ciência ou conhecimento que atue de forma isolada.

A parte mais importante deste trabalho consiste sobre o desenvolvimento da Escala de Bahc e as questões matemáticas envolvidas para a concretização dessa escala. Pois, existia um problema quando era necessário efetuar uma transposição sobre as notas musicais na "escala de modulação exata". Pois, nesta escala os intervalos dos tons inteiros não são iguais uns aos outros. Para corrigir esse problema, Bahc fazia com que todos os tons inteiros fossem iguais uns aos outros. Assim, uma oitava passou a constituir num arranjo de doze semitons iguais (escala igualmente temperada). Desta forma, o problema de transposição ficou finalmente resolvido.

Existem magníficas possibilidades de se aprender, ensinar e praticar muita matemática através da música. É claro que no campo do conhecimento sempre existem questões em aberto; questões que podem ser potencializadas ou mesmo dar margem para o surgimento de uma nova ciência.

Construir instrumentos musicais com tubo PVC de modo a representar cada nota musical. Neste sentido, pretendo dar continuidade a este trabalho, realizando novas experiências e aplicando conceitos sobre o comportamento de como as cordas vibram para a construção de instrumentos musicais e expor a matemática envolvida em cada processo.

> A vida de um indivíduo só faz sentido se ajuda a tornar a vida das demais criaturas mais nobre e mais bela. (ALBERT EINSTEIN).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABDOUNUR, Oscar João. **Coleção história da matemática para professores:** aspectos histórico-didáticos da relação matemática/música sob forma de uma exposição.- Guarapuava: SBHMat, 2007.

ÁVILA, Geraldo. **Revista do professor de matemática**, n. 31, p 11-15, 1996.

BANNETT, Roy. **Uma breve história da música:** Jorge Zahar: editor. 3.ed, 1992.

CAMARA, Marcos Antônio; RODRIGUES, Melissa Rogrigues. **FAMAT em Revista.** Zetetiké, Uberlândia, v.7, n. 11, outubro de 2008. Disponível em: <www.portal.famat.ufu.br/sites/famat..._revista_11_05.pdf>. Acesso em: 27 set. 2013.

ELLMERICH, Luis. **História da música**. Editora formata do Brasil. 4ª edição-1973 São Paulo.

LIVIO, Mário; Tradução: MATSUMURA, Marco Shinobu. **Razão Áurea:** a história de FI, um número surpreendente. 4º edição- Rio de Janeiro 2009.

MAOR, Eli. **E: A História de um numero.** Rio de Janeiro: Editora Record, 2008.

PAHLEN, Kurt. **História universal da música**. Edições melhoramentos. 2ª edição. São Paulo, 1964.

SOUZA, Luciana Gastaldi Sardinha. **Uma abordagem didático-pedagógica da racionalidade matemática na criação musical.** , n. 11, outubro de 2008. Disponível em:<www.teses.usp.br/.../LUCIANA_GASTALDI_SARDINHA_SOUZA_rev...>. Acesso em: 26 set. 2013.

YEHUDIMENUHIN; FONTES, Curtis W. Davis Martins. **A música do homem.** Livraria Martins Fontes. Editora Moderna. 2ª edição. São Paulo, 1990.

YERSKOWICZ, Gerso; SCOLFARO, Valdemar; JÚNIOR, Francisco Ramalho. **Elementos de física.** Editora Moderna. v.2, 1986.

_____. http://espacoastrologico.org/2012/09/16/a-musica-das-esferas/ acessado em 25 de Fevereiro de 2014, às 03; 17.

______.http://www.amattos.eng.br/Public/INSTRUMENTOS_MUSICAIS/Textos/Div/notas.htm acessado em 03 de março de 2014 as 17;20