UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Isabela Christina Queiroz Souza

O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG

BELÉM
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Isabela Christina Queiroz Souza

O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientadora: Profª. Msc Joelma Morbach.

BELÉM

2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

O PROBLEMA DAS PONTES DE KÖNIGSBERG

Trabalho de Conclusão de curso apresentado como requisito para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal do Pará pela seguinte banca examinadora:

Orientadora: Profª. Msc. Joelma Morbach

Faculdade de Matemática-ICEN, UFPA

Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento

Faculdade de Matemática-ICEN, UFPA

Prof. Msc. Adam Oliveira da Silva

Faculdade de Matemática-ICEN, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /_______

CONCEITO: ______________________________

Dedico este trabalho a todos aqueles que contribuíram para realização desta pesquisa e a minha família por todo o apoio durante esta jornada.

AGRADECIMENTOS

A Deus, que sempre está presente em minha vida, guiando e iluminando cada passo em meu caminho.

Aos meus familiares, que me apóiam em qualquer circunstância da vida e que estão presente nos momentos felizes e tristes.

Aos colegas que me acompanharam no decorrer dos quatro anos de curso.

Aos professores que me guiaram até este momento, em especial à Profª Msc Joelma Morbach, que sempre me ajudou - nas mais diversas disciplinas - desde o primeiro semestre na faculdade.

Enfim, a todos muito obrigado.

"A Matemática é uma ciência abstrata que se completa em si mesmo, mas também é uma ferramenta poderosa de outras ciências."

Professor Henrique Cruz.

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso apresenta noções básicas de matemática discreta, mais especificamente da teoria dos grafos, e os utiliza para uma aplicação em um problema que iniciou essa teoria, o Problema das Pontes de Königsberg.

Palavras-chave:problema, pontes, Königsberg, grafo, Euleriano, conexo, etc.

ABSTRACT

This work completion of course presents basic concepts of discrete mathematics, more specifically graph theory, and uses them for an application on a problem that started this theory, the problem of Königsberg's bridges.

Sumário

Introdução

Este Trabalho de Conclusão de Curso tem como o objetivo principal o conhecimento da matemática discreta, a qual, não é vista no nosso curso de graduação, bem como, uma análise sobre o problema que iniciou essa teoria, o Problema das Pontes de Königsberg.

No capítulo 1 faremos uma apresentação dos conceitos básicos da Teoria dos conjunto e da teoria dos Grafos para posterior aplicação.

No capítulo 2 apresentaremos os conceitos de isomorfismo, caminhos e circuitos, grau de um vértice, conexidade e grafos eulerianos.

No capítulos 3 faremos um apanhado histórico sobre Euler e o Problema das pontes, apresentaremos o grafo criado por Euler, em seguida será feita uma análise do grafo do problema para solucioná-lo.

Capítulo 1

Conceitos básicos

1.1 Conjuntos

Se x é elemento de um conjunto A, dizemos que x *pertence* a A, e denotamos por $x \in A$. Se x não é elemento de A, então dizemos que x *não pertence* a A e denotamos por $x \notin A$.

Exemplo 1.1. *A é o conjunto das letras do alfabeto.* $A = \{a, b, c, ..., x, y, z\}$.
então $e \in A$.
Mas se dado $E = \{b, c, d, f, g, ..., x, y, z\}$ *o conjunto das consoantes,*
então $e \notin E$.

Também podemos descrever um conjunto indicando a propriedade que caracteriza este

$$\{x \mid x \text{ satisfaz a propriedade } M\}.$$

Assim, o conjunto E do exemplo anterior pode ser descrito como:

$$E = \{x \mid x \text{ é consoante}\}$$

Dois conjuntos A e B são iguais se, e somente se, têm exatamente os mesmos elementos. Quando isso ocorre, escrevemos $A = B$. Se A e B não são iguais, escrevemos $A \neq B$.

Exemplo 1.2. *Sejam os conjuntos*
$A = \{3, 7, 9, 11\}$

$B = \{9, 7, 3, 11\}$

$C = \{3, 5\}$

temos que, $A = B$*, mas* $A \neq C$.

1.1.1 Subconjuntos

Se todo elemento de um conjunto A é também elemento de um conjunto B, então dizemos que A *é subconjunto de* B e denotamos por $A \subset B$ (A está contido em B).

Se o conjunto A possui algum elemento que não pertence ao conjunto B, então A não é subconjunto de B, e denotamos por $A \not\subset B$.

Exemplo 1.3. *Sejam os conjuntos*

$A = \{1, 2, 3, 4, 5...\}$

$B = \{3, 5, 6, 9\}$

$D = \{$*sexta,sábado,domingo*$\}$

$F = \{$*segunda,terça,quarta,quinta,sexta*$\}$

então, $B \subset A$ *e* $D \not\subset F$.

Outra forma de escrever que um conjunto A está contido em um conjunto B é: $B \supset A$ (B contém A).

Um conjunto que não possui elementos é chamado *conjunto vazio* e é denotado por $\emptyset$.

Um conjunto com apenas um elemento é chamado *conjunto unitário*.

***Observação*:**

- Todo conjunto é subconjunto de si mesmo, $A \subset A$.
- O conjunto $\emptyset$ é subconjunto de qualquer conjunto, $\emptyset \subset A$.

Sejam A e B conjuntos, a união de A e B, $A \cup B$, é o conjunto formado por todos os elementos que pertencem a A ou a B. Assim, $A \cup B = \{x | x \in A \, ou \, x \in B\}$

Exemplo 1.4. *Se* $A = \{3, 4, 7\}$ *e* $B = \{1, 5, 7, 9, 10\}$*, então*

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$.

Sejam A e B conjuntos, o conjunto *interseção* de A e B, $A \cap B$, é formado pelos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B.

$$A \cap B = \{x \,|\, x \in A \, e \, x \in B\}.$$

Exemplo 1.5. *Dados* $A = \{n, o, p\}$*,* $B = \{l, m, n\}$ *e* $C = \{r, s, t\}$*, então*
$A \cap B = \{n\}$
$A \cap C = \{\emptyset\}$.

Dois conjuntos A e B são chamados de *disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$.

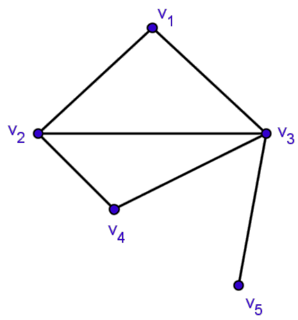
1.2 GRAFO

Um grafo é um par de conjuntos disjuntos $G = (V, A)$ onde A é um subconjunto das partes de V tal que cada um de seus elementos é um conjunto com exatamente dois elementos.

Notação: Vamos denotar $V = V(G)$ e chamar seus elementos $v \epsilon V(G)$ de *vértices* de G. Os elementos de $A = A(G)$ são da forma $\{v_1, v_2\}$, com v_1 e v_2 elementos de $V(G)$, são chamados de *arestas ou arcos*, quando a aresta é do tipo $a = \{v, v\}$, ou seja, relaciona um vértice com ele próprio, recebe o nome de *laço*. Denotaremos a aresta $\{v_1, v_2\}$ por v_1v_1 ou v_2v_1.

Duas arestas são ditas *adjacentes* quando estas possuem um vértice em comum.

Grafos podem ser representados por diagramas, em que cada vértice é representado por um ponto e cada aresta por uma linha ligando os pontos que representam seus extremos.



A figura acima representa o grafo G com $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $A(G) = \{v_1v_2, v_1v_3, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4, v_3v_5\}$.

1.2.1 Ordem de um grafo

O número de vértices de um grafo G é denominado de *ordem do grafo G*. Onde o conjunto $V(G)$ pode ser infinito.

Observação: Um mesmo grafo pode ser representado graficamente de diferentes maneiras, dependendo da disposição dos vértices ou de como são desenhadas as arestas.

Dois vértices v e w de G são *adjacentes* se vw é uma aresta de G. Se um vértice não é adjacente a nenhum outro vértice ele é dito *vértice isolado*.

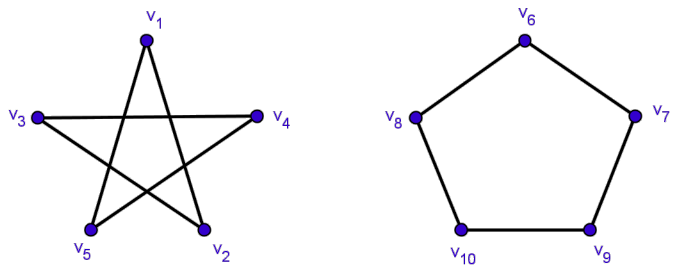


Figura 1.1: Grafo de ordem 5

A figura acima mostra dois diagramas do mesmo grafo com ordem 5.

1.3 Tipos de Grafos

1.3.1 Multigrafo

Chama-se multigrafo um grafo $G = (V, A)$ que possui arestas paralelas, ou seja, arestas que interligam os mesmo dois vértices. Assim como laços.

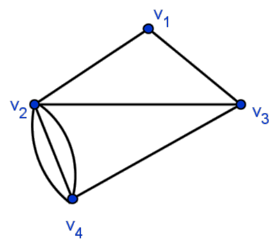


Figura 1.2: multigrafo

Um grafo é *simples* quando não contém laços nem duas ligações distintas com o mesmo par de extremos.

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois de seus vértices são adjacentes. Denotamos por K^n o grafo completo de ordem n.

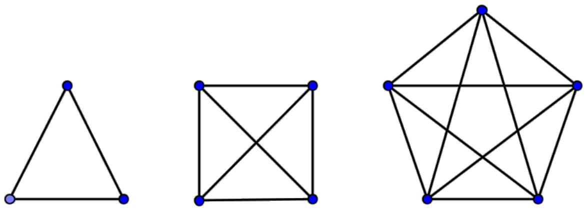
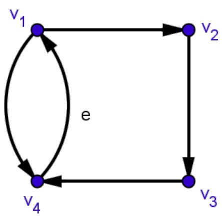


Figura 1.3: K^3, K^4, K^5

1.3.2 Grafo Orientado

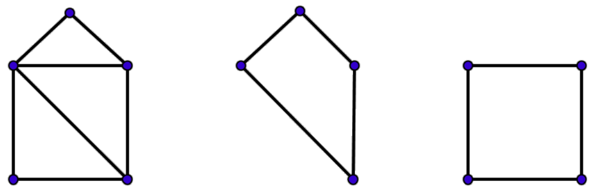
É um grafo G em que cada aresta está associada a um *par ordenado* de vértices distintos. Se a aresta e é associada ao par (v_4, v_1)de vértices, diz-se que e é a aresta orientada de v_4 para v_1.



1.3.3 Subgrafos

Um grafo $H = (V', A')$ é um subgrafo de um grafo $G = (V, A)$ se:

- Cada vértice de H é também vértice de G, ou seja, $V(H) \subseteq V(G)$;
- Cada aresta de H é também aresta de G, ou seja, $A(H) \subseteq A(G)$;
- Para toda aresta de H seus extremos em H são também seus extremos em G, ou seja, se $(v_1, v_2) \in A(H)$ então $(v_1, v_2) \in A(G)$.



A figura acima mostra o grafo G e seus subgrafos.

Capítulo 2

Isomorfismo e Conexidade

Neste capítulo estudaremos o conceito de isomorfimo de grafos, além de definições muito importantes para a solução do Problema das Pontes, tais como circuitos, grau de um vértice, conexidade e grafos eulerianos.

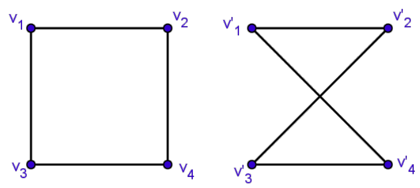
2.1 Isomorfismo

Definição 2.1. *Sejam os grafos G e G' com conjunto de vértices $V(G)$ e $V(G')$ e com conjuntos de arestas $A(G)$ e $A(G')$, respectivamente. O grafo G é isomorfo ao G' se houver uma correspondência biunívoca*

$$g : V(G) \to V(G')$$
$$h : A(G) \to A(G')$$

entre os conjuntos de seus vértices que preserva suas adjacências.

Exemplo 2.1. *Mostre que os grafos G e G' são isomorfos.*



Solução*:*

Observe que a correspondência

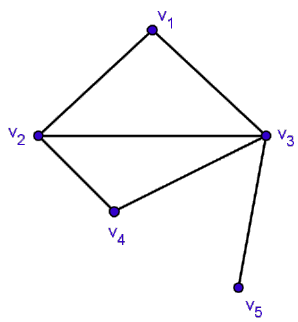
$$\begin{array}{rcl} v_1 & \mapsto & v_1' \\ v_2 & \mapsto & v_2' \\ v_3 & \mapsto & v_4' \\ v_4 & \mapsto & v_3' \end{array}$$

estabelece o isomorfismo entre os grafos G e G', pois mantém as ligações feitas pelas arestas.

2.2 Grau de um vértice

Seja G um grafo e se $v \epsilon V(G)$ um vértice de G. Chamamos de *grau de* v o número de arestas ligadas a v e denotamos esse número por grau (v). O grau total de G é a soma dos graus de todos os vértices de G. Se v for um vértice isolado então grau $(v) = 0$.

Exemplo 2.2. *Determinando o grau de cada vértice e o grau total do grafo abaixo.*



Solução*: Observando as adjacências de cada vértice, temos que*

- $grau(v_1) = 2$, *pois o vértice v_1 é adjacente aos vértices v_2 e v_3.*
- $grau(v_2) = 3$, *pois o vértice v_2 é adjacente aos vértices v_1, v_3 e v_4.*
- $grau(v_3) = 4$, *pois o vértice v_3 é adjacente aos vértices v_1, v_2, v_4 e v_5.*
- $grau(v_4) = 2$, *pois o vértice v_4 é adjacente aos vértices v_2 e v_3.*
- $grau(v_5) = 1$, *pois o vértice v_5 é adjacente apenas ao vértice v_3.*

Assim, o grau total do grafo G é

$grau(v_1) + grau(v_2) + grau(v_3) + grau(v_4) + grau(v_5) = 2 + 3 + 4 + 2 + 1 = 12.$

Observe que a soma dos graus dos vértices é 2×6, duas vezes o número de arestas de G.

Teorema 2.1. *Seja G um grafo com vértices $v_1, v_2, ..., v_n$. Se m é o número de arestas de G, então*

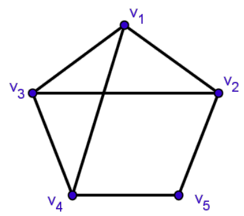
$$\sum_{i=1}^{n} grau(v_i) = 2m$$

***Demonstração*:**

Se o grafo G não tem arestas, todos os vértices têm grau zero, e o grau total é 0, portanto a afirmação é verdadeira.

Se o grafo G tem arestas, cada uma delas contribuirá com duas unidades na soma total dos graus dos vértices, pois cada aresta conecta dois vértices distintos.

Exemplo 2.3. *Aplicando o teorema no grafo a seguir*



Observe que o grafo possui 7 arestas e 5 vértices. Assim

$n = 5$

$m = 7$

então,

$$\sum_{i=1}^{5} grau(v_i) = 2 \times 7 = 14$$

2.3 Caminhos

Um caminho entre dois vértices, v e w é uma sequência de vértices adjacentes $v_0, v_1, v_2, ..., v_k$ (ou de arestas $a_1 = v_0v_1, a_2 = v_1v_2, ..., a_k = v_{k-1}v_k$ adjacentes), de forma que

a) $v_0 = v$;

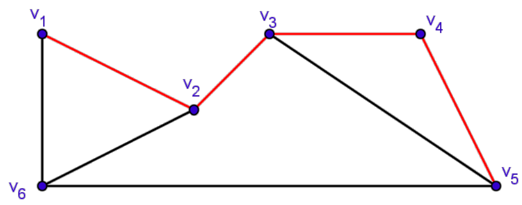
b) $v_k = w$;

Denotamos este caminho pela sequência de vértices

$$v_0v_1v_2v_3...v_{k-1}v_k.$$

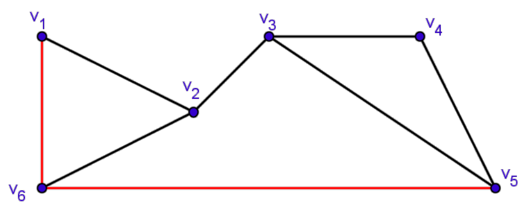
Exemplo 2.4. *No grafo a seguir é indicado um caminho entre os vértices v_1 e v_5. Denotado da seguinte maneira*

$$v_1v_2v_3v_4v_5$$



Podem existir vários caminhos para ir de um vértice a outro. Assim, quando um caminho possui o maior número de arestas possíveis este é dito um caminho de *maior comprimento*. Da mesma maneira, se um caminho possui o menor número de arestas é dito de *menor comprimento*.

Exemplo 2.5. *No grafo do exemplo anterior, dado que existem vários caminhos possíveis do vértice v_1 até o vértice v_5, qual o menor caminho para se chegar a v_5 partindo de v_1?*

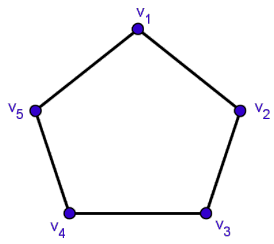


$v_1v_6v_5$ é o menor caminho para se chegar ao vértice v_5.

2.3.1 Circuito

Um caminho entre v e w é dito um *caminho simples* se uma mesma aresta que o compõem não é usada mais de uma vez.

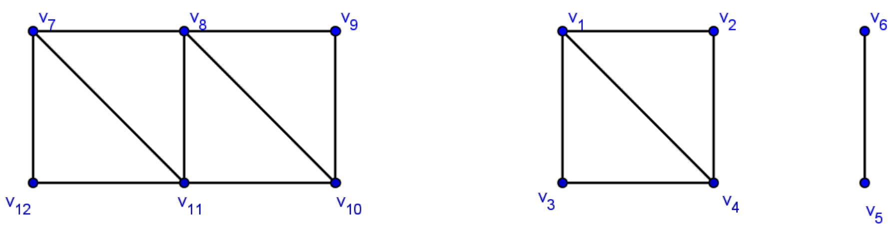
Um caminho em que $v = w$, é um caminho simples e fechado, que chamamos de *circuito*. E se um dado circuito contém todas as arestas de um grafo o denominamos de *circuito euleriano*.



2.4 Conexidade de Grafos

Um grafo é conexo se qualquer par $\{v, w\}$ de seus vértices podem ser ligados por algum caminho.

Um grafo *não* é conexo quando pelo menos dois de seus vértices não podem ser conectados por algum caminho.



Quando um grafo é não conexo, este é composto por uma união disjunta de grafos conexos, e cada um destes é chamado de *componente conexa* do grafo.

Teorema 2.2. (Teorema de Euler): *Um grafo G admite um circuito euleriano se, e somente se, G é conexo e todos os vértices de G têm grau par.*

Dado um grafo G, queremos mostrar que

$$G \text{ admite um circuito euleriano} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o grafo } & G & \text{é conexo;} \\ \text{cada vértice de } & G & \text{tem grau par} \end{cases}$$

***Demonstração*:**

($\Rightarrow$) Supondo que G admite um circuito euleriano, então vamos denotá-lo por

$$G = \{v_0v_1v_2...v_{k-1}(v_k = v_0)\}$$

Queremos mostrar que G é conexo e que cada vértice tem grau par.

Como, por hipótese, o grafo G admite um circuito euleriano, então todos os vértices de G pertencem ao circuito. Assim podemos construir caminhos simples que ligam qualquer dois vértices de G. Logo, G é conexo.

Do fato de G admitir um circuito euleriano, temos que cada aresta do grafo é usada uma única vez, e que o circuito não possui vértice isolado. Logo para calcularmos o grau de um vértice v_i, basta contar quantas vezes ele é usado no caminho e multiplicarmos por dois. Portanto todos os vértices do grafo G têm grau par.

($\Leftarrow$) Se o grafo G é conexo e todos os vértices têm grau par, queremos mostrar que G admite circuito euleriano.

Escolhendo, de G, um caminho $v_0v_1v_2...v_{k-1}v_k$ (caminho simples e de maior comprimento, ou seja com o maior número de arestas). Devemos mostrar que esse caminho é um circuito e que contém todos os vértices do grafo G.

Primeiro vamos mostrar que $v_0v_1v_2...v_{k-1}v_k$ é um circuito.

Como o caminho escolhido é um caminho simples, então cada uma de suas arestas serão usadas uma única vez. Além disso, todos os vértices adjacentes a v_k também estão sendo usados, pois escolhemos o caminho de maior comprimento, ou seja,todas as arestas conectadas à v_k já fazem parte do caminho.

Como, por hipótese, todos os vértices de G têm grau par, então $v_k = v_0$.

De fato, se $v_k \neq v_0$, então $grau(v_k) = 2n + 1$ (n = número de vezes que v_k é usado no caminho), que é um número ímpar, o que contradiria a hipótese.

Assim, se $v_k = v_0$, o caminho escolhido é um circuito.

Agora vamos mostrar que o circuito é euleriano.

Como G é conexo, então todos os seus vértices estão conectados ao circuito $v_0v_1v_2...v_{k-1}v_k$. Assim, supondo que um dado vértice w não esteja contido no caminho $v_0v_1v_2...v_{k-1}v_k$, existe uma aresta $a = wv_i$, que não pertence ao caminho escolhido e é adjacente a um de seus vértices v_i.

Então o caminho $wv_iv_{i+1}...v_{k-1}(v_k = v_0)v_1v_2...v_{i-1}v_i$ é uma aresta mais longo que o caminho escolhido, o que é uma contradição.

Portanto o circuito contém todos os vértices do grafo G.

2.5 Grafos Eulerianos

Um grafo é euleriano se admite um circuito euleriano. Quando um grafo G não admitir um *circuito* euleriano, mas admitir um caminho simples que contém *todas sa suas arestas*, dizemos que o grafo G é um *grafo euleriano.*

Exemplo 2.6. *Dos três grafos apresentados a seguir apenas K^4 não é um grafo euleriano, pois possui mais do que dois vértices de grau ímpar.*

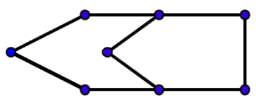


Figura 2.1: K^8

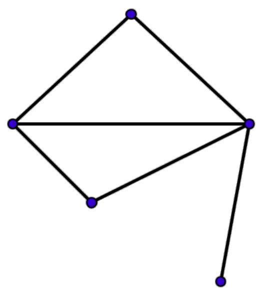


Figura 2.2: K^5

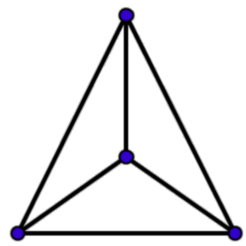


Figura 2.3: K^4

Teorema 2.3. *Um grafo G admite um caminho euleriano se, e somente se, é conexo e tem, no máximo, dois vértices de grau ímpar.*

Dado um grafo G, queremos mostrar que

$$G \text{ admite um circuito euleriano} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{o grafo} \quad G \quad \text{é conexo;} \\ \qquad\ \text{e} \quad G \quad \text{tem, no máximo, dois vértices de grau ímpar} \end{cases}$$

***Demonstração*:**

($\Rightarrow$)Supondo que G admita um caminho que percorre todas as arestas passando por cada uma delas uma única vez, temos que:

Se esse caminho é fechado, ele é um circuito euleriano e, portanto, G é conexo e todos os seus vértices têm grau par.

Se o caminho não é um circuito, este pode ser denotado por

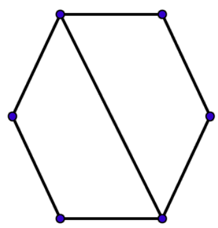
$$v_0 v_1 v_2 ... v_{k-1} v_k$$

com $v_0 \neq v_k$. Todos os vértices e arestas estão presente na sequência. v_0 e v_k são os únicos vértices de grau ímpar.

($\Leftarrow$) Agora, vamos supor que o grafo G seja conexo e tenha dois vértices de grau ímpar. Que denotaremos por v_0 e v_k.

Assim, se acrescentarmos uma aresta a que conecte v_0 a v_k obtemos um grafo que continua sendo conexo, mas que tem todos os vértices de grau par, e admite um circuito euleriano. Se subtrairmos a aresta a deste circuito vamos obter um caminho que conecta v_0 a v_k e que percorre todas as arestas, cada uma delas uma única vez. Portanto G admite um caminho euleriano.

Exemplo 2.7. *O grafo a seguir é um grafo euleriano.*



Perceba que este grafo admite um caminho que contém todos os seus vértices e arestas, e apenas dois de seus vértices tem grau ímpar.

Capítulo 3

Euler e o problema das pontes de Königsberg

A seguir apresentaremos um relato histórico sobre o matemático Leonhard Euler e o Problema das Pontes de Königsberg. Além disso, mostraremos o grafo criado por Euler para representar o mapa dessa cidade, e faremos uma análise sobre esse grafo para mostrarmos a solução do problema.

3.1 Leonhard Euler

Leonhard Euler (1707-1783) foi um matemático suíço, considerado um dos maiores e mais produtivos matemáticos do mundo, produziu mais de 1100 artigos e livros. Contribuiu para diversas áreas da matemática como a teoria dos números, geometria e o cálculo.

Aos treze anos de idade ingressou na universidade da Basiléia, onde se tornou discípulo de Jean Bernoulli.

Trabalhou a maior parte de sua vida na academia de São Petersburgo na Rússia - para onde mudou aos 19 anos -, onde realizou muitos de seus escritos, pois o restante foi terminado, quando ficou cego aos 59 anos, com a ajuda de alguns assistentes.

É responsável pelo desenvolvimento da Teoria dos grafos, conhecida originalmente como Teoria das Ligações.

O primeiro documento sobre esta teoria data de 1736, e incluía a solução do problema das pontes de Königsberg. Com essas ideias, e as que usou para encontrar a sua fórmula para poliedros convexos, Euler desenvolveu as bases para uma nova área da matemática nomeada de Topologia.

Após sua morte, as gráficas da época demoraram quase meio século para publicar todos os manuscritos, ainda inéditos, deixados por ele.

3.2 A cidade de Königsberg

No século XVIII, havia sete pontes cruzando o rio Pregel, que banhava a pequena cidade universitária prussiana de königsberg, hoje Kaliningrad, Rússia. Quatro delas ligavam as margens opostas a uma pequena ilha formada nesse rio, outras duas ligavam as margens opostas a uma outra ilha, próxima à primeira, e a última ponte ligava as duas ilhas, conforme a figura.

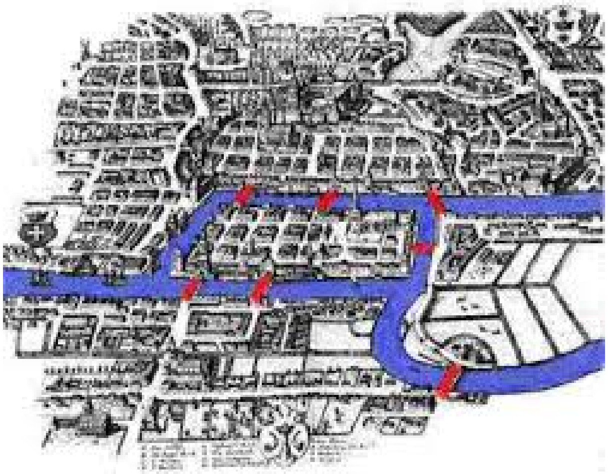


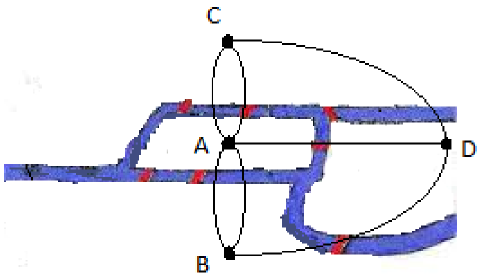
Figura 3.1: Königsberg

Fonte:www.land.ufrj.br

3.2.1 O problema das pontes

Conta-se que os habitantes de Königsberg costumavam passear por sua cidade nas tardes de domingo, mas nunca tinham conseguido dar um passeio especial: sair de casa, atravessar todas as pontes uma só vez e regressar a casa. A dúvida quanto à possibilidade de se realizar tal feito persistiu durante muito tempo, até ser solucionado por Euler.

Para resolver o problema Euler simplificou a representação do mapa da cidade. E o fez da seguinte maneira: A cada ilha e margem ele associou a um ponto que chamaremos de *vértice* e a cada ponte uma ligação que chamaremos de *aresta.* Representando as duas margens do rio por B e C; a ilha, representada por A; a região entre as ramificações, representadas por D. Graficamente representado como:



3.3 Modelo do problema

O grafo utilizado como modelo do problema segue assim definido:

$V = \{m \,|\, m$ é uma ilha ou uma margem$\}$

$A = \{p \,|\, p$ é uma ponte$\}$

Assim, listando os elementos do conjunto, temos

$V = \{A, B, C, D\}$

$A = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

3.3.1 Analisando o grafo do problema

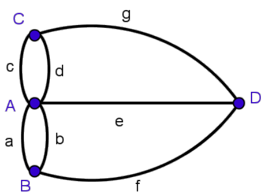


Figura 3.2: Diagrama de Euler

Analisando o grafo do problema verificamos que:

- As arestas entre quaisquer dois de seus vértices não têm um sentido ou *orientação*. Logo podemos afirmar que o grafo da figura 3.2 é *não orientado*.
- Perceba que os vértices C e A, e A e B são interligados por arestas distintas, c e d interligam C e A, a e b interligam A e B. Assim, temos que o grafo em questão é *multigrafo*.
- Outra observação importante a ser feita é que o grafo da figura 3.2 não possui vértices isolados, ou seja, a cada par de vértices há pelo menos uma aresta interligando-os. Dessa maneira, temos que o grafo do problema é *conexo*.

3.4 Solucionando o Problema

3.4.1 O grafo não é de Euler

Queremos mostrar que o grafo do problema não é um grafo euleriano.

***Demonstração*:**

Uma das condições necessárias para que um grafo G seja dito euleriano é que este seja conexo. O que foi verificado anteriormente em relação ao grafo do problema.

Outra condição é quanto ao grau de seus vértices. Sendo assim, vamos analisar cada vértice.

Desde que o grau de cada vértice está relacionado com o número de arestas incidentes sobre ele, então da figura 3.2 temos

- $grau(C) = grau(B) = grau(D) = 3$
- $grau(A) = 5$

Então para todo $v \in V(G)$, $grau(v)$ é ímpar.

Logo, pelo Teorema de Euler, temos que o grafo do problema *não é euleriano*, pois embora este seja conexo, todos os seus vértices têm grau ímpar.

3.4.2 Solução

Lembre-se que o problema das pontes de Königsberg é o seguinte:

Fazer um trajeto passando por todas as pontes uma só vez e regressar ao ponto de partida.

Para que este problema tivesse solução o grafo que o representa teria que admitir um circuito euleriano.

Portanto, como vimos anteriormente que o grafo não admite um circuito euleriano, chegamos a conclusão de que é impossível percorrer todas as pontes sem repetir nenhuma e retornar ao ponto de partida.

Considerações Finais

Chega-se ao tópico final deste TCC, onde foram apresentados definições, exemplos e caso onde foi mostrada a utilidade dos grafos (na resolução do problema das pontes) através de seus conceitos, seus tipos e sua análise.

Espera-se que o objetivo tenha sido alcançado e que toda pessoa que em algum momento leia este trabalho, possa ter uma compreensão sobre o assunto.

Referências Bibliográficas

[1] FIGUEIREDO, L. M., *Matemática discreta*, v.4, Cederj, 2002.

[2] FIGUEIREDO, L. M., *Matemática discreta*, v.1, 2a. ed, Cederj, 2002.

[3] LUCCHESI, C. L., *Introdução à teoria dos grafos*, IMPA, 1979.

[4] NASCIMENTO, F. S. C. e SILVA, S. D., *Grafos e suas aplicações - TCC*,Centro Universitário Adventista de São Paulo, 2009.