

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Coloração de mapas em superfícies

George Absalão Pandino de Moraes

BELÉM

2014

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

George Absalão Pandino de Morais

Coloração de mapas em superfícies

Monografia apresentada na Universidade Federal do Pará como requisito para a obtenção do grau de graduado em Licenciatura Plena em Matemática, para a seguinte banca examinadora:

Prof^a. Dr^a. Irene Castro Pereira (orientadora)
Departamento de Matemática, UFPA

Prof. Dr. José Antonio Moraes Vilhena
Departamento de Matemática, UFPA

Prof^a. Dr^a. Tania Madeleine Begazo Valdivia
Departamento de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: ____/____/____

CONCEITO: _____

*"A matemática, vista corretamente, possui não apenas verdade, mas também suprema
beleza - uma beleza fria e austera, como a da escultura."*

Bertrand Russell

Agradecimentos

A Deus, meu senhor e salvador, por ter me ajudado em muitos momentos, e por ter me dado forças para terminar tanto este trabalho quanto o curso.

À minha família, por ter me dado todas as condições necessárias para estudar sem maiores preocupações, e por ter me suportado em amor, mesmo nos momentos em que eu não retribuí da melhor maneira.

À minha orientadora, Irene Castro Pereira, por sempre me receber com tranquilidade e por ter tido paciência para corrigir os muitos erros que este trabalho tinha, e também pelos muitos conselhos dados com relação às escolhas profissionais, que foram preciosos para mim.

À minha tutora em meu tempo de estágio no ICMAT, Marina Logares, por ter me apresentado este tema juntamente com o livro que é a principal referência deste trabalho, pela compreensão em muitos momentos e também pelo seu entusiasmo em fazer matemática, que me contagiou e reforçou minha admiração por esta ciência.

Ao corpo docente da Faculdade de Matemática, por ter sido sempre solícito para tirar minhas dúvidas e pelo constante incentivo ao nosso estudo.

A todos os meus amigos, de longa data ou mais recentes, muito obrigado. A alegria proporcionada por vocês, as conversas que vocês tiveram comigo e as palavras de ânimo que vocês me deram foram um grande combustível para terminar este trabalho.

Resumo

O objetivo deste trabalho é mostrar uma solução o problema da coloração de mapas em algumas superfícies compactas e conexas. Para resolver este problema, usaremos conceitos em sua maior parte da área de topologia de superfícies, sendo os principais o Teorema de Classificação de Superfícies Compactas e Conexas e a Característica de Euler.

Abstract

The purpose of this paper is to present a solution to the map-coloring problem for some compact and connected surfaces. In order to solve this problem, we will use some concepts mostly from the area of topology of surfaces. The most useful ideas in this study are the Classification Theorem for Compact and Connected Surfaces and the Euler Characteristic.

Sumário

1	Noções preliminares	11
1.1	Definições iniciais	11
1.2	Compactos e conexos	13
1.3	Espaços produto e quociente	14
2	Estudo das superfícies	19
2.1	Células e complexos	19
2.2	Superfícies e triangulações	20
2.3	Classificação de superfícies	24
3	A característica de Euler e a coloração de mapas	34
3.1	Característica de Euler	34
3.2	Coloração de mapas	36
	Referências	43

Lista de Figuras

1	Mapa do Brasil em um plano colorido com 4 cores	9
1.1	Figura de um toro (\mathbb{T}^2).	14
2.1	Formação de um cilindro por meio da identificação de arestas.	20
2.2	Processo de subdivisão baricêntrica de um triângulo.	22
2.3	Processo de subdivisão baricêntrica de uma esfera.	22
2.4	Vizinhança de ponto em uma superfície, e em um complexo que não é superfície.	23
2.5	Vizinhança de um vértice em uma superfície, e em um complexo que não é superfície.	23
2.6	Planificação de uma superfície	26
2.7	Rotulando as arestas: $EA = a$, $AF = b$ e $EF = c$	26
2.8	Reduzindo a quantidade de rótulos: $abc^{-1} = d$	27
2.9	Pares opostos à esquerda, e pares em fila à direita	27
2.10	Eliminando vértices opostos adjacentes	28
2.11	Planificação com 3 vértices, P , Q e R	28
2.12	Eliminando um vértice Q e criando um novo vértice P	29
2.13	Juntando pares em fila.	30
2.14	Par de pares opostos.	30
2.15	Somente um par oposto.	31
2.16	Juntando pares de pares opostos.	31
2.17	Soma conexa de um toro e um plano projetivo.	32
3.1	Operação do tipo 1.	35
3.2	Operação do tipo 2.	35
3.3	Operação do tipo 3.	36
3.4	Projeção Radial	37
3.5	Mapa em um toro que precisa ser colorido com 7 cores.	39
3.6	Mapa em uma garrafa de Klein que precisa ser colorido com 6 cores.	39

3.7	Mapa em uma esfera que precisa ser colorido com 4 cores.	40
3.8	Mapa em um plano projetivo que precisa ser colorido com 6 cores.	40

Introdução

Neste trabalho, estudaremos o problema da coloração de mapas. Este problema consiste em achar o número mínimo de cores necessário para colorir qualquer mapa em uma determinada superfície, de uma maneira que países que fazem fronteira não estejam pintados com a mesma cor. Por exemplo, vemos uma coloração possível para o mapa do Brasil em um plano.



Figura 1: Mapa do Brasil em um plano colorido com 4 cores

Antes de estudarmos nosso problema, vamos trabalhar o conceito de superfície e alguns outros conceitos necessários para que possamos classificá-las em certas categorias, de modo que nosso estudo se torne mais amplo. Para estudar este problema, analisaremos as superfícies sob o ponto de vista da topologia.

Não exploraremos aqui a conjectura das quatro cores, que diz que quatro cores são necessárias para construir qualquer mapa em um plano, pois para isso teríamos que tratar de uma área muito distinta, o que tornaria nosso estudo muito longo.

Podemos apresentar a topologia como sendo a área da matemática que estuda, para certos objetos, algumas propriedades que não são estudadas pela geometria. Por exemplo, podemos notar que, do ponto de vista da geometria euclidiana, um quadrado e um triângulo diferem em muitos aspectos, como quantidade de lados ou soma das medidas dos ângulos internos. Por outro lado, há algumas semelhanças entre as figuras. Ambas dividem o plano em duas regiões, sendo uma limitada e a outra limitada. Também podemos observar que nenhuma das figuras possui uma “lacuna” no seu interior, que não pertence ao conjunto. Na topologia, estudaremos propriedades como estas. Mais especificamente, analisaremos as propriedades que se preservam quando deformamos uma figura para transformá-la em outra (esticando ou contraindo, sem efetuar cortes ou colagens).

A uma primeira vista isto pode parecer algo trivial, mas há vários objetos matemáticos que são definidos usando características que não queremos considerar, como a noção de distância, que pode ser usada para definir conjuntos abertos em R^n . Por este motivo, devemos reformular muitas de nossas definições de objetos para podermos usá-los em nosso estudo.

Isto pode parecer uma desvantagem, e em muitas circunstâncias vai de fato dificultar nosso trabalho. Porém, esta abordagem nos permitirá estudar uma gama muito maior de conjuntos, além de possibilitar-nos uma visão muito mais ampla de vários conceitos matemáticos que podem parecer artificiais em um olhar menos cuidadoso.

Capítulo 1

Noções preliminares

1.1 Definições iniciais

Começaremos estudando certos tipos de conjuntos, chamados espaços topológicos. Esta definição pode parecer um tanto abstrata, porém é bastante geral, e nos será muito útil para representar vários conjuntos.

Definição 1.1. *Uma **topologia** sobre um conjunto X é uma coleção \mathcal{T} de subconjuntos de X que satisfaz as seguintes propriedades:*

1. \emptyset e X pertencem a \mathcal{T} ;
2. A união dos elementos de qualquer sub-coleção de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T} ;
3. A interseção dos elementos de qualquer sub-coleção finita de \mathcal{T} pertence a \mathcal{T} .

O conjunto X para o qual foi definida a topologia \mathcal{T} chama-se **espaço topológico**. Além disso, dado um espaço topológico X com uma topologia \mathcal{T} , dizemos que um subconjunto A de X é **aberto** (segundo a topologia \mathcal{T}) se $A \in \mathcal{T}$.

Em linhas gerais, podemos dizer que um espaço topológico constitui-se de um conjunto e uma maneira arbitrária (porém satisfazendo certas condições) de declararmos quem são os conjuntos abertos de nosso espaço.

Podemos ver que, de fato, esta definição é bastante geral. Porém no momento ainda não há muitas maneiras de utilizar esta definição. Para usarmos nosso novo objeto, vamos definir outros conceitos que serão importantes no decorrer do trabalho.

Definição 1.2. *Um subconjunto A de um espaço topológico X se diz **fechado** quando o conjunto $X - A$ for aberto.*

Definição 1.3. Se X é um subconjunto, uma **base** para uma topologia sobre X é uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X tal que:

1. Para cada $x \in X$, há pelo menos um conjunto $B \in \mathcal{B}$ que contém x .
2. Se x pertence à interseção de dois conjuntos B_1 e B_2 que pertencem a \mathcal{B} , então existe um conjunto B_3 que contém x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Se \mathcal{B} satisfaz estas duas condições, define-se a topologia \mathcal{T} gerada por \mathcal{B} da seguinte maneira: um subconjunto A de X é aberto em X (segundo a topologia \mathcal{T}) se, para todo $x \in A$, existe um conjunto $B \in \mathcal{B}$ tal que $x \in B$ e $B \subset A$. Podemos notar que, segundo esta definição, todos os elementos de \mathcal{T} pertencem a \mathcal{B} . Neste caso, \mathcal{B} é chamada base para \mathcal{T} .

Definição 1.4. Dado um subconjunto A de um espaço topológico X , definimos o **interior** de A (denotado por $\text{Int}A$) como sendo a união de todos os abertos contidos em A . Um elemento de X que pertence a $\text{Int}A$ é chamado de ponto interior de A .

Também definimos o **fecho** de A (denotado por \overline{A}) como sendo a interseção de todos os fechados que contém A .

Com esta definição temos que, se A é um subconjunto aberto de X , $A = \text{Int}A$. Também temos que, se A é fechado, então $A = \overline{A}$.

Definição 1.5. Seja A um subconjunto do espaço topológico X . Diremos que x é um ponto de acumulação de A se todo conjunto aberto N que contém x contém algum ponto de A distinto de x , ou seja, se $N \cap A - x \neq \emptyset$.

Definição 1.6. Se $A \subset X$, definimos a **fronteira** de A como sendo o conjunto:

$$\text{Fr}A = \overline{A} \cap \overline{X - A}.$$

Agora que temos uma estrutura mais sólida para nossos conjuntos abertos, podemos usá-la para definir de maneira mais completa as funções contínuas, que serão muito utilizadas posteriormente.

Definição 1.7. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua se, para cada subconjunto aberto V de Y , o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X .

Podemos pensar nas funções contínuas como funções que, quando aplicadas a um espaço topológico, conservam sua estrutura de conjuntos abertos.

Definição 1.8. *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $f : X \rightarrow Y$ uma bijeção. Se a função f e sua inversa $f^{-1} : Y \rightarrow X$ são ambas contínuas, então dizemos que f é um homeomorfismo.*

Com isto, podemos afirmar que, se existe um homeomorfismo entre dois espaços topológicos X e Y , há uma correspondência biunívoca entre os conjuntos abertos destes espaços. Quando isto acontecer, diremos que X e Y são **topologicamente equivalentes**. Isto significa que, se houver alguma propriedade em X que dependa somente da topologia de X (ou seja, que dependa somente de seus conjuntos abertos), esta propriedade também valerá em Y .

1.2 Compactos e conexos

Com a informação de que propriedades que dependem somente da topologia do conjunto podem ser preservadas, nossa tarefa agora é estudar outras propriedades que também dependam somente da topologia. Assim, se soubermos as características de um objeto inicial, podemos obter bastante informação dos objetos equivalentes a ele. Como exemplo de propriedades topológicas temos a compacidade e a conexidade.

Definição 1.9. *Seja A um subconjunto de um espaço topológico X . Uma cobertura aberta de A é uma coleção \mathcal{A} de conjuntos abertos de X tal que A está contido na união dos elementos de \mathcal{A} . Além disso, uma subcobertura de \mathcal{A} é um subconjunto \mathcal{A}' de \mathcal{A} tal que A está contido na união de elementos de \mathcal{A}' .*

Definição 1.10. *Um espaço topológico X é compacto se toda cobertura aberta de A admite uma subcobertura finita.*

Esta definição a princípio pode não ser intuitiva, mas com ela podemos deduzir várias outras propriedades que nos ajudarão a entender melhor como se comportam tais conjuntos.

Proposição 1.1. *Se X é um espaço topológico compacto, então cada subconjunto infinito de X possui um ponto de acumulação.*

Demonstração. Seja X um espaço compacto, e A um subconjunto de X . Provaremos o seguinte: se A não possui um ponto de acumulação, então A é finito.

Suponhamos que A não possui um ponto de acumulação. Assim, A contém o conjunto de todos os seus pontos de acumulação. Logo, A é um conjunto fechado. Além disso, para cada $a \in A$, podemos escolher um conjunto aberto que contém A , dado por U_a , de tal

maneira que $U_a \cap A = a$. O espaço X está coberto pelo conjunto $X - A$ (que é aberto, pois A é fechado) e pelos abertos U_a . Porém, como X é compacto, X pode ser coberto por um número finito desses conjuntos. Como $A \cap X - A = \emptyset$ e cada conjunto U_a contém apenas um ponto de A , então o conjunto A deve ser finito. \square

Definição 1.11. *Um espaço topológico X é conexo se X não pode ser escrito como uma união de conjuntos abertos não-vazios e disjuntos.*

Em linhas gerais, podemos dizer que um espaço topológico conexo é aquele onde é possível sairmos de qualquer ponto para chegar em outro ponto distinto qualquer por um movimento contínuo, sem que seja necessário sair do espaço.

1.3 Espaços produto e quociente

Além de estudar as propriedades dos espaços topológicos, podemos também construir novos espaços a partir dos que já conhecemos. Isto pode ser feito de várias maneiras, e algumas serão mostradas agora.

Definição 1.12. *Sejam X e Y espaços topológicos, e $X \times Y$ o produto cartesiano de X e Y . A topologia produto sobre $X \times Y$ é a topologia que possui como base a coleção \mathcal{B} de todos os conjuntos da forma $U \times V$, onde U é um subconjunto aberto de X e V é um subconjunto aberto de Y .*

Um exemplo de espaço topológico construído desta maneira é o espaço $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, onde \mathbb{S}^1 é o círculo unitário. Este espaço tem a aparência de uma boia, como as que são usadas em piscina. Chamaremos este espaço de “toro”, ou também \mathbb{T}^2 .



Figura 1.1: Figura de um toro (\mathbb{T}^2).

1

¹Disponível em: <http://it.wikipedia.org/wiki/File:Torus2.png>

Teorema 1.1. *Sejam X e Y espaços topológicos conexos. O produto $X \times Y$ é conexo.*

Demonstração. Para isto provaremos primeiramente o seguinte lema:

Lema 1.1. *Seja \mathcal{A} uma coleção de espaços topológicos conexos que possuem um ponto x em comum (ou seja, $x \in A, \forall A \in \mathcal{A}$). Então, o conjunto:*

$$B = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$$

é um conjunto conexo.

Demonstração. Suponhamos (para chegar a uma contradição) que B não seja conexo. Então, temos $B = C \cup D$, onde C e D são conjuntos abertos não-vazios e disjuntos. O ponto x deve estar ou em C ou em D . Assumamos que $x \in C$, e consideremos um dos conjuntos $A \in \mathcal{A}$. Como A é conexo, deve estar contido ou em C ou em D . Caso contrário, teríamos $A = \{C \cap A\} \cup \{D \cap A\}$, que seria uma união de abertos não-vazios e disjuntos, o que significaria que A não é conexo. Como $x \in A$ e $x \in C$, temos que $A \subseteq C$. Podemos raciocinar de maneira análoga para qual $A \in \mathcal{A}$. Assim, temos $B \subseteq C$, e portanto $D = \emptyset$. \square

Prossigamos à demonstração do teorema. Escolha um ponto $(a, b) \in X \times Y$, e note que $\{a\} \times Y$ é homeomorfo a Y , portanto $\{a\} \times Y$ é conexo. Analogamente, $X \times \{y\}$ é conexo para cada $y \in Y$. Considere agora o conjunto formado pela união $B_y = (\{a\} \times Y) \cup (X \times \{y\})$. Como tanto $\{a\} \times Y$ quanto $X \times \{y\}$ contém o ponto (a, b) , temos que B_y é conexo, para cada $y \in Y$. Além disso, note que o ponto $(a, b) \in B_y$, para cada $y \in Y$. Assim, temos que a união

$$X \times Y = \bigcup_{y \in Y} B_y$$

é conexa, devido ao lema anterior. \square

Teorema 1.2. *Sejam X e Y espaços topológicos compactos. O produto $X \times Y$ é compacto.*

Demonstração. Esta prova será executada em dois passos:

Passo 1: Sejam X e Y espaços com Y compacto. Seja x_0 um ponto de X , e seja N um aberto de $X \times Y$ que contém a “fatia” $\{x_0\} \times Y$ de $X \times Y$. Provaremos que existe um aberto W , com $x_0 \in W$, tal que N contém o conjunto $W \times Y$. (O conjunto $W \times Y$ é chamado **tubo** sobre $\{x_0\} \times Y$).

Primeiramente, vamos cobrir $\{x_0\} \times Y$ com elementos básicos $U \times V$ (para a topologia de $X \times Y$), de modo que $U \times V \subset N$. O espaço $\{x_0\} \times Y$ é compacto, pois é homeomorfo a Y . Portanto, podemos cobrir $\{x_0\} \times Y$ com um número finito desses elementos básicos:

$$U_1 \times V_1, \dots, U_n \times V_n.$$

Podemos assumir que todos os elementos básicos possuem interseção não-vazia com $\{x_0\} \times Y$, pois se algum deles for disjunto com $\{x_0\} \times Y$ podemos simplesmente descartar este elemento, e continuaremos cobrindo $\{x_0\} \times Y$. Definimos então:

$$W = U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n.$$

O conjunto W é aberto, pois é uma interseção finita de abertos. Além disso, $x_0 \in W$, pois cada um dos conjuntos $U_i \times V_i$ intersecta a $\{x_0\} \times Y$. Afirmamos que os conjuntos $U_i \times V_i$ que foram escolhidos para cobrir o conjunto $\{x_0\} \times Y$ também cobrem o tubo $W \times Y$. Seja (x, y) um ponto de $W \times Y$. Consideremos também o ponto (x_0, y) , pertencente a $\{x_0\} \times Y$. Sabemos que (x_0, y) pertence a algum $U_i \times V_i$ para algum i , então $y \in V_i$. Porém, $x \in U_j$ para todo j (já que $x \in W$). Assim, temos que $(x, y) \in U_i \times V_i$, como queríamos. Como todos os conjuntos $U_i \times V_i$ estão contidos em N e cobrem o conjunto $W \times Y$, tem-se que o tubo $W \times Y$ também está contido em N .

Passo 2: Sejam agora X e Y espaços compactos, e seja \mathcal{A} uma cobertura aberta de $X \times Y$. Dado $x_0 \in X$, o conjunto $\{x_0\} \times Y$ é compacto e está coberto por um número finito de elementos A_1, A_2, \dots, A_m de \mathcal{A} . A união $N = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_m$ é um aberto (pois é união de abertos), e contém $\{x_0\} \times Y$. Usando o passo 1, temos que o aberto N contém um tubo $W \times Y$ sobre $\{x_0\} \times Y$, onde W é um aberto de X . Logo, o conjunto $W \times Y$ está coberto por um número finito de elementos A_1, A_2, \dots, A_m de \mathcal{A} .

Desta maneira, para cada $x \in X$, podemos escolher um aberto W_x , com $x \in W_x$, tal que o tubo $W_x \times Y$ pode ser coberto por um número finito de elementos de \mathcal{A} . A coleção de todos os conjuntos W_x é uma cobertura aberta de X . Como X é compacto, existe uma sub-coleção finita $\{W_1, \dots, W_k\}$ que cobre X . Assim, a união dos tubos

$$\bigcup_{i=1}^k W_i \times Y$$

é uma cobertura para $X \times Y$, e como cada um deles pode ser coberto por um número finito de elementos de \mathcal{A} , temos então que $X \times Y$ é compacto. \square

Definição 1.13. *Sejam X e Y espaços topológicos, e seja $p : X \rightarrow Y$ uma função sobrejetiva. Dizemos que a função p é uma função quociente se temos que um subconjunto U de Y é aberto em Y se, e somente se, $p^{-1}(U)$ é aberto em X .*

Definição 1.14. *Seja X um espaço topológico, A um conjunto e $p : X \rightarrow A$ uma função sobrejetiva. Podemos definir uma topologia \mathcal{T} sobre A definindo como abertos os subcon-*

juntos U de A tais que $p^{-1}(U)$ é aberto em X , e desta forma p será uma função quociente. A esta topologia chamaremos topologia quociente induzida por p .

Um caso particular de uso da topologia quociente se dá quando consideramos o seguinte espaço topológico:

Definição 1.15. *Sejam X um espaço topológico, e \sim uma relação de equivalência definida em X . Definimos a classe de equivalência de X como sendo:*

$$[x] = \{y \in X; y \sim x\}$$

O espaço X/\sim é definido como sendo o conjunto de classes de equivalência da relação \sim , ou seja:

$$X/\sim = \{[x]; x \in X\}$$

Um exemplo muito útil de espaço topológico construído desta maneira é o que resulta das seguintes classes de equivalência definidas no conjunto $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ (quadrado unitário no \mathbb{R}^2):

$$[(x, y)] = \begin{cases} (x, y) & \text{se } x \neq 0, 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\ (0, y) \sim (1, y) & \text{se } x = 0, 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

Podemos notar que, desta maneira, os pontos do lado esquerdo do quadrado estão identificados com os do lado direito. O espaço X/\sim construído a partir destas classes de equivalência tem a aparência de um cilindro, como se tivéssemos “colado” os lados de uma folha quadrada de papel. Espaços construídos desta maneira aparecerão em várias partes deste trabalho, e estes procedimentos de corte e colagem vão simplificar bastante nossas construções.

Para finalizar este capítulo, vamos enunciar um importante teorema que será usado posteriormente.

Teorema 1.3 (Heine-Borel). *Um subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

A prova deste Teorema se encontra em [1]. Apesar de restrito, este teorema é muito importante, pois representa uma propriedade de difícil de se manipular (compacidade) em termos de propriedades mais simples. Uma aplicação desse teorema pode ser vista na seguinte proposição.

Proposição 1.2. *Se A é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n , toda sequência de pontos contida em A possui um ponto de acumulação em A .*

Demonstração. Antes de começar a prova, façamos um esclarecimento importante: o conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| < r\}$ chama-se **bola aberta** de centro x e raio r , em \mathbb{R}^n , e é denotado por $B^n(x, r)$.

Passo 1: Neste passo vamos demonstrar que toda sequência contida em A possui um ponto de acumulação. Dada uma sequência $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de pontos de A , há duas possibilidades para o conjunto dos valores x_n : o conjunto $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ é finito ou infinito. Se X é finito, existe algum valor $a = x_{n_1} = x_{n_2} = \dots = x_{n_k} = \dots$ que se repete infinitas vezes, e portanto nos dá uma subsequência constante que converge para a . No caso de X ser infinito, temos que existe um ponto $b \in \mathbb{R}^n$ que é ponto de acumulação de X . Então, para todo $k \in \mathbb{N}$, existe x_{n_k} tal que $x_{n_k} \in B^n(b, \frac{1}{k})$. Assim, $B^n(b, \frac{1}{k})$ contém uma infinidade de termos x_i , com índices arbitrariamente grandes. Logo, b é o limite da subsequência $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ e é, portanto, um ponto de acumulação de A .

Passo 2: Vamos provar que $b \in A$. Como A é compacto, temos pelo Teorema de Heine-Borel que A é fechado. Suponhamos então que b não pertence a A . Assim, $b \in X - A$, que é aberto. Logo, existe uma bola aberta $B^n(b, \epsilon) \subset X - A$ que contém b , para algum $\epsilon > 0$. Porém, como b é ponto de acumulação de A , temos que $B^n(b, \epsilon)$ deve conter algum ponto de A , o que é uma contradição, já que $B^n(b, \epsilon) \subset X - A$. Assim, temos que $b \in A$, como queríamos.

□

Assim, podemos ver que, tomando os devidos cuidados, podemos preservar as propriedades topológicas quando criamos novos espaços. Isto é muito importante, pois também nos dá bastante informação para analisarmos espaços que possuem propriedades difíceis de se visualizar diretamente.

Capítulo 2

Estudo das superfícies

Neste capítulo trataremos de alguns conceitos relativos à topologia de superfícies. Nosso estudo estará focado inicialmente em algumas classes de objetos, que podem ser estudadas de maneira particular, e posteriormente estudaremos as superfícies e suas características de uma maneira mais geral.

2.1 Células e complexos

Definição 2.1. *Uma n -célula (ou célula n -dimensional) é um conjunto cujo interior é homeomorfo a uma bola aberta $B^n = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq 1\}$ com a propriedade adicional de que sua fronteira precisa ser dividida em um número finito de células de menor dimensão, chamadas de faces da n -célula. Se σ é uma face para a célula π , escreveremos $\sigma \leq \pi$.*

Podemos enumerar alguns exemplos de células.

Exemplo 2.1. *Um ponto A é uma 0-célula. Chamamos as 0-células de vértices.*

Exemplo 2.2. *Um segmento $a = AB$ tal que $A < a, B < a$ é uma 1-célula. Chamamos as 1-células de arestas.*

Exemplo 2.3. *Um polígono $\sigma = \triangle ABC$, com $AB < \sigma, BC < \sigma, CA < \sigma$, é uma 2-célula.*

Podemos ver nesses exemplos que, segundo esta definição, tanto vértices quanto arestas são também considerados faces para determinadas células.

Definição 2.2. *Um complexo K é um conjunto finito de células:*

$$K = \bigcup_{i=1}^n \{\sigma_i; \sigma_i \text{ é uma célula}\} \text{ tal que:}$$

1. se σ é uma célula em K , todas as faces de σ são elementos de K ;

2. se σ e π são células em K , então $Int(\sigma) \cap Int(\pi) = \emptyset$.

A dimensão de K é a dimensão de seu complexo de maior dimensão.

Podemos imaginar as células como “blocos”, e os complexos como compostos por vários destes blocos unidos entre si.

Para explicitarmos alguns complexos, precisaríamos fazer desenhos bem complicados, e muitas vezes até impossíveis. Por isso, é bem mais prático para nós, em vez de tentar desenhar um complexo com suas células ou listar todas as células identificadas umas com as outras, simplesmente dar as orientações para a construção do complexo, indicando quais arestas vão ser identificadas.

Exemplo 2.4. Um cilindro pode ser formado a partir de um retângulo, quando colamos duas arestas opostas.

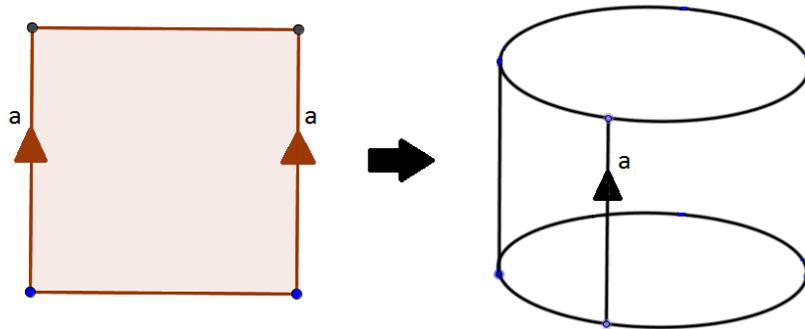


Figura 2.1: Formação de um cilindro por meio da identificação de arestas.

Uma vantagem desta representação é que ela nos dá uma visão de toda a figura. Caso tentássemos desenhar o cilindro diretamente, teríamos sempre uma parte que não podemos ver. Porém, devemos ter cuidado e lembrar sempre dos lados que são identificados como cópias de uma mesma célula, e não objetos diferentes. Esta representação será chamada de *diagrama planar* ou *planificação*.

2.2 Superfícies e triangulações

Nem todos os espaços topológicos admitem a inserção de uma estrutura de complexo neles. Neste trabalho, vamos estudar os complexos sobre as superfícies, que serão definidas agora.

Definição 2.3. *Uma variedade n -dimensional (ou n -variedade) é um espaço topológico em \mathbb{R}^n tal que cada ponto possui uma vizinhança topologicamente equivalente a uma bola aberta n -dimensional com centro x e raio r , ou seja, $B^n(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n; \|x - y\| \leq r\}$. Chamaremos as 2-variedades de superfícies.*

Podemos ver, segundo esta definição, que uma superfície (2-variedade) é localmente 2-dimensional, ou seja, cada ponto de uma superfície possui uma vizinhança equivalente a uma bola aberta em \mathbb{R}^2 . Podemos interpretar isto da seguinte forma: para um inseto bem pequeno, não haveria diferença entre a aparência de uma superfície qualquer e de um plano, por mais que andasse por toda a superfície.

Definição 2.4. *Sejam S_1 e S_2 duas superfícies. Removendo um pequeno disco, tanto de S_1 quanto de S_2 , e colando os círculos de onde foram retirados os discos, formamos uma nova superfície, chamada de **soma conexa** de S_1 e S_2 . (Notação: $S_1 \# S_2$)*

Definição 2.5. *Um espaço topológico X de dimensão 2 é triangulável se:*

1. *podemos encontrar um 2-complexo K tal que X seja o conjunto de pontos das células de K ;*
2. *este K encontrado tenha somente células triangulares;*
3. *quaisquer 2 triângulos de K estão identificados ou por uma aresta ou por um vértice ou são disjuntos.*

O complexo K é chamado de uma triangulação em X .

A representação de um complexo por meio de sua triangulação pode nos trazer muitas vantagens em nossa missão de encontrar um bom critério para classificar as superfícies que desejamos estudar. Por exemplo, podemos notar que todas as n -células de nossa triangulação vão possuir $n + 1$ vértices, o que nos ajuda a identificar a dimensão da célula por meio de seu número de vértices. No caso de dimensão 2, temos que todas as 2-células serão triângulos, e ainda obtemos a vantagem de poder identificar cada vértice, aresta e triângulo de maneira única quando rotulamos cada vértice por uma letra. Porém, para podermos usar as triangulações de maneira mais efetiva, devemos ter um processo que nos permita representar qualquer complexo por meio de uma triangulação. Para isso, usaremos a próxima definição:

Definição 2.6. *Seja K um complexo com 2-células triangulares. Podemos construir um novo complexo K' a partir de K , introduzindo um novo vértice no centro de cada triângulo, um novo vértice no ponto médio de cada aresta e introduzindo arestas do vértice*

central para cada novo vértice. K' é chamado de subdivisão baricêntrica de K .

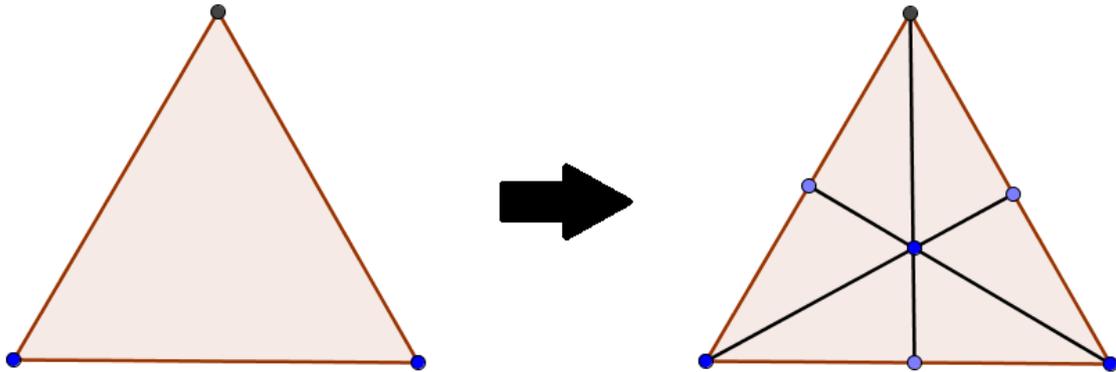


Figura 2.2: Processo de subdivisão baricêntrica de um triângulo.

Exemplo 2.5. Para a esfera, temos a seguinte subdivisão baricêntrica:

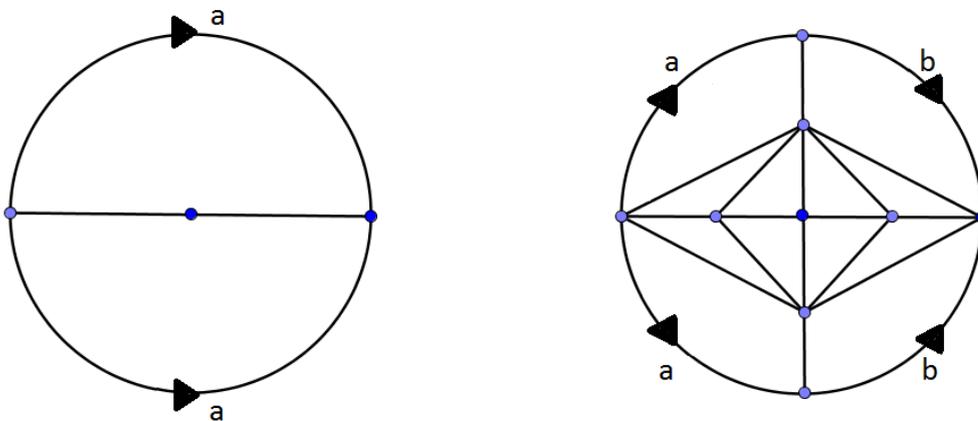


Figura 2.3: Processo de subdivisão baricêntrica de uma esfera.

Podemos ver que, neste caso, conseguimos uma triangulação satisfazendo as condições que queríamos. Todavia, não é sempre que isto acontece. É possível provar que a segunda subdivisão baricêntrica sempre forma uma triangulação, porém esta prova é bem trabalhosa. A próxima definição serve para adequarmos as superfícies à estrutura criada para facilitar a análise dos objetos.

Definição 2.7. Uma superfície triangulada é uma triangulação tal que:

1. cada aresta está identificada com exatamente uma outra aresta;

2. os triângulos que se encontram em um vértice podem ser enumerados em uma sequência de triângulos $(T_1, T_2, \dots, T_n), n \in \mathbb{N}$, tal que termos consecutivos da sequência estão conectados por uma aresta e T_n está ligado a T_1 por uma aresta.

A condição (1) serve para garantir que pontos localizados sobre uma aresta tenham apenas vizinhanças conforme a figura à esquerda, e não como a figura à direita:

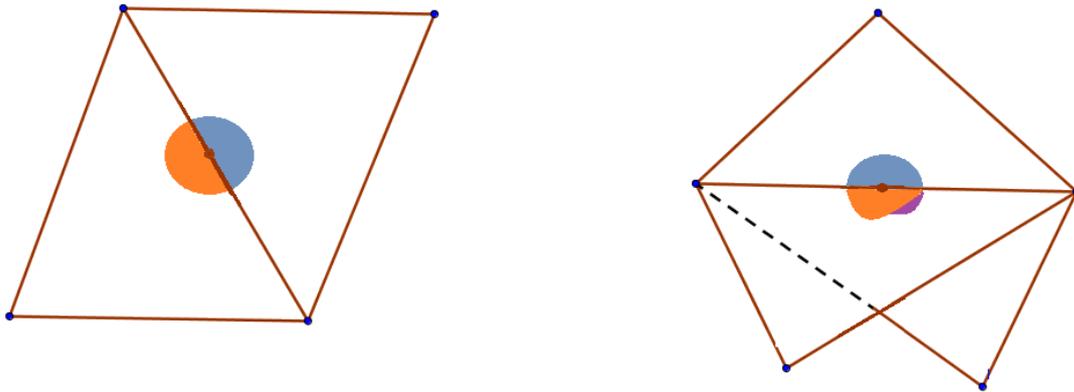


Figura 2.4: Vizinhança de ponto em uma superfície, e em um complexo que não é superfície.

A condição (2) serve para definir as vizinhanças dos vértices das superfícies, para que elas tenham a forma da figura abaixo:

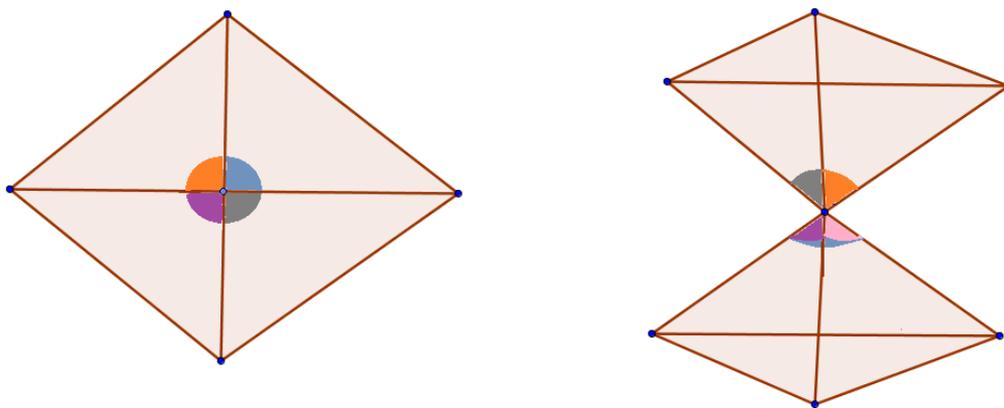


Figura 2.5: Vizinhança de um vértice em uma superfície, e em um complexo que não é superfície.

2.3 Classificação de superfícies

Agora, provaremos um teorema que será uma de nossas principais ferramentas na demonstração do Teorema de Classificação das Superfícies, que fará com que nossos resultados possam ser estendidos a uma ampla quantidade de objetos.

Teorema 2.1. *Uma superfície é compacta se e somente se qualquer triangulação utiliza um número finito de triângulos.*

Demonstração. Se S é uma superfície compacta, e suponhamos que S tenha uma triangulação composta por infinitos triângulos. Da condição (2) da definição anterior, há somente um número finito de triângulos se encontrando em cada um dos vértices da triangulação. Portanto, se há um número infinito de triângulos, deve haver um número infinito de vértices. De fato, se tivéssemos um número finito de vértices, com uma quantidade finita de triângulos em cada vértice, a quantidade total de triângulos seria finita, o que não acontece. Como há um número infinito de vértices, podemos criar uma sequência $\{v_i\}_{i=1}^{\infty}$ cujos termos são os próprios vértices. Como S é compacta e todos os vértices da sequência pertencem a S , temos que esta sequência possui um ponto de acumulação $v \in S$, tal que toda vizinhança ao redor de v possui um vértice da triangulação. Analisando o ponto v , temos 3 possibilidades:

1. Se v está no interior de algum triângulo, temos que existe uma vizinhança de v totalmente dentro do triângulo, porém isso contradiz o fato de que v é ponto de acumulação de uma sequência de vértices.
2. Se v encontra-se sobre uma aresta, existe também uma vizinhança de v (agora composta por pontos de dois triângulos) que não contém nenhum vértice, o que novamente leva a uma contradição.
3. Se v é um vértice, então v é um ponto de encontro de n triângulos T_1, T_2, \dots, T_n e também existe uma vizinhança de v que não possui nenhum outro vértice (desta vez formada por pontos dos n triângulos que se encontram em v). Novamente isto contradiz o fato de v ser ponto de acumulação de uma sequência de vértices.

Esta contradição implica que o número de vértices é finito, e, portanto, o número de triângulos também é finito.

Se S é uma superfície tal que qualquer triangulação usa um número finito de triângulos, tomemos então uma sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de pontos em S . Para mostrarmos que S é uma superfície compacta, devemos mostrar que $\{x_i\}$ possui ponto de acumulação em S . Como há somente um número finito de triângulos, e temos infinitos termos em $\{x_i\}$,

temos que algum triângulo T contém infinitos pontos da sequência. Seja então $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ a subsequência dos pontos pertencentes a T . Um triângulo é um subconjunto fechado e limitado do \mathbb{R}^2 , logo, pelo Teorema de Heine-Borel, temos que T é compacto. Logo, $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ possui um ponto de acumulação $x \in T \subseteq S$. Também temos então que x é ponto de acumulação da sequência $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Portanto, S é uma superfície compacta. \square

Teorema 2.2. *Uma superfície é conexa se e somente se alguma triangulação puder ser ordenada em uma sequência de triângulos (T_1, T_2, \dots, T_n) de modo que cada triângulo tenha pelo menos uma aresta identificada com um triângulo que o anteceda na sequência.*

Demonstração. Seja S uma superfície conexa com uma triangulação, tal que T_1 é um triângulo qualquer dela. Como qualquer triângulo é um conjunto conexo de \mathbb{R}^2 , temos que T_1 é conexo. Além disso, como S é uma superfície conexa, existe um triângulo T_2 que está conectado a T_1 por uma aresta. Assim, podemos formar um complexo C_1 , unindo os triângulos T_1 e T_2 . Novamente, decorre do fato de S ser conexa que existe um triângulo T_3 conectado a C_1 , e assim formamos um complexo C_2 , decorrente da união entre T_3 e C_1 . Se S é conexa, este processo pode ser repetido enquanto tivermos triângulos livres. Assim, basta ordenarmos os triângulos seguindo a ordem de sua inclusão nos complexos. Suponhamos agora que a superfície S não seja conexa. Sendo assim, temos que S deve ter pelo menos duas componentes conexas. Sejam T_1, T_2, \dots, T_k os triângulos da primeira componente conexa de S e $T_{k+1}, T_{k+2}, \dots, T_n$ os triângulos da segunda. Podemos notar que T_{k+1} não está conectado com nenhum dos triângulos anteriores (T_1, T_2, \dots, T_k) , pois T_{k+1} está em outra componente. Logo, não é possível ordenar os triângulos de modo que cada triângulo esteja conectado com algum anterior. \square

Teorema 2.3. *Toda superfície compacta e conexa é homeomorfa a uma esfera \mathbb{S}^2 , a uma soma conexa de n toros \mathbb{T}^2 ou a uma soma conexa de n planos projetivos \mathbb{P}^2 .*

Demonstração. Nesta prova será apresentado um método que pode ser usado para reduzir qualquer superfície a uma das formas acima. Rado[6] provou em 1925 que toda superfície compacta pode ser triangulada, portanto assumiremos que a superfície S pode ser representada por um complexo triangulado (triangulação).

Passo 1: Planificar a superfície.

Como S é uma superfície compacta, temos que existe um complexo em S com uma quantidade finita de triângulos. Além disso, decorre do fato de S ser conexa que a lista de triângulos da superfície pode ser reordenada de tal maneira que cada triângulo esteja colado a um triângulo anterior. Este rearranjo pode ser feito de várias maneiras, mas o restante da demonstração irá reduzir qualquer planificação que fizermos a uma forma padrão.

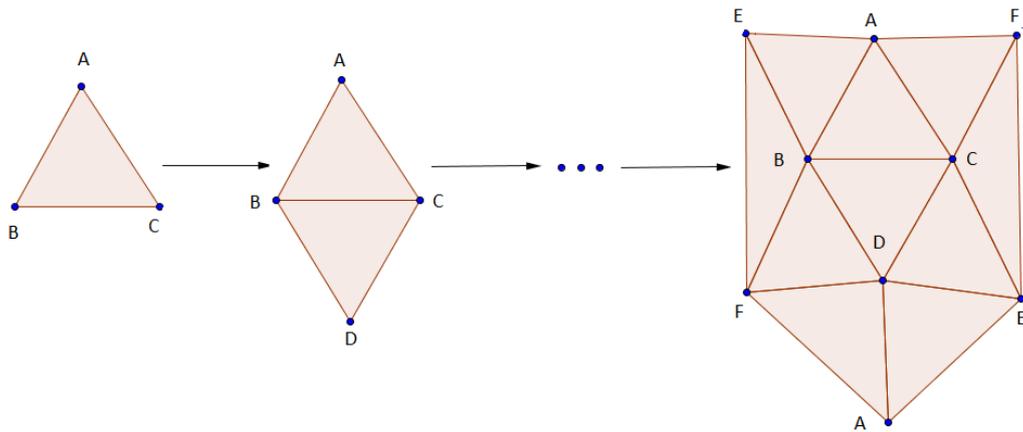


Figura 2.6: Planificação de uma superfície

Como S é uma superfície, cada aresta está identificada com outra única aresta. Como as arestas de dentro já estão identificadas em pares, devemos também identificar as arestas externas da mesma maneira. Para fins práticos podemos rotular cada aresta com uma letra, para obtermos um diagrama como o do exemplo abaixo:

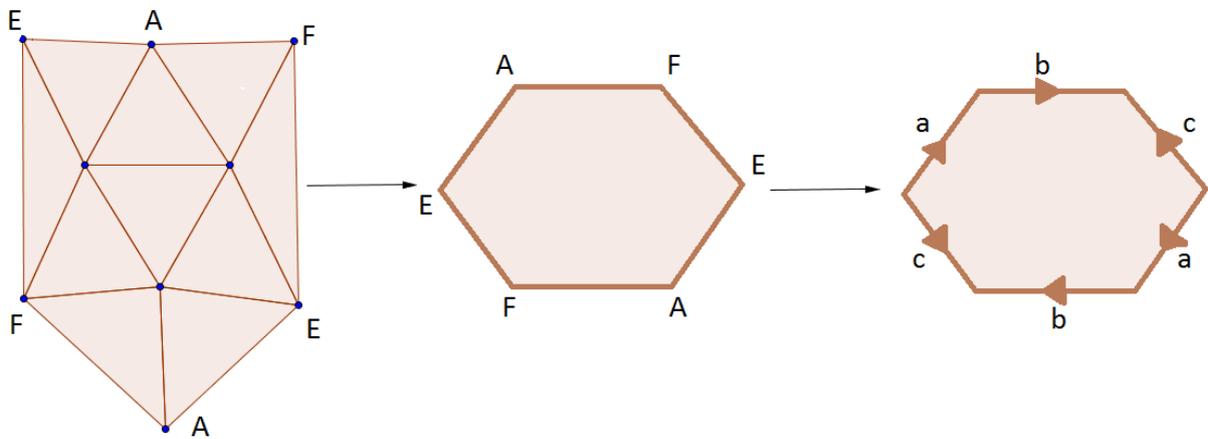


Figura 2.7: Rotulando as arestas: $EA = a$, $AF = b$ e $EF = c$

De posse deste diagrama, podemos utilizar um processo para tornar nossa classificação mais curta. Este processo consiste em tomar uma sequência de arestas que se repita ao menos duas vezes (levando em conta a orientação das arestas) e renomear a sequência como uma só aresta.

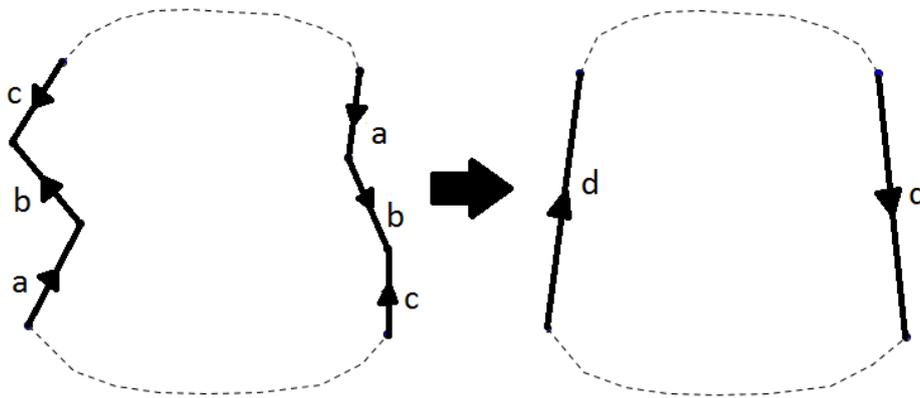


Figura 2.8: Reduzindo a quantidade de rótulos: $abc^{-1} = d$

Podemos notar agora que as arestas podem aparecer posicionadas de duas maneiras diferentes: opostas, caso uma aponte para o sentido horário e outra aponte para o sentido anti-horário, ou em fila, caso as duas arestas apontem para o mesmo sentido, como podemos ver na figura abaixo:

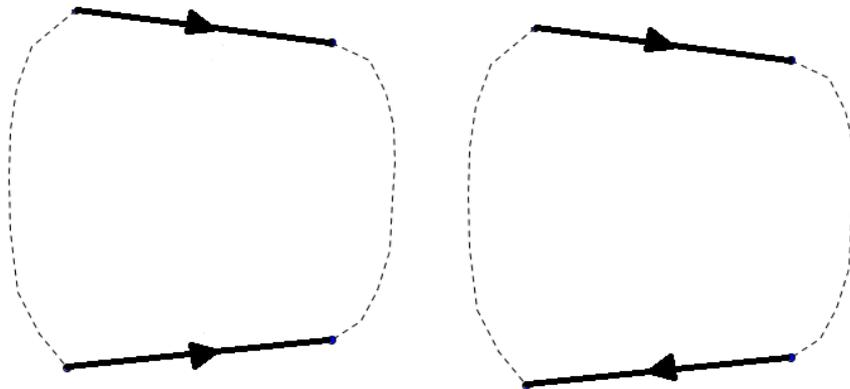


Figura 2.9: Pares opostos à esquerda, e pares em fila à direita

Passo 2: Eliminar pares de arestas opostas adjacentes. Estes pares podem ser eliminados dobrando-os e colando-os juntos, como na figura:

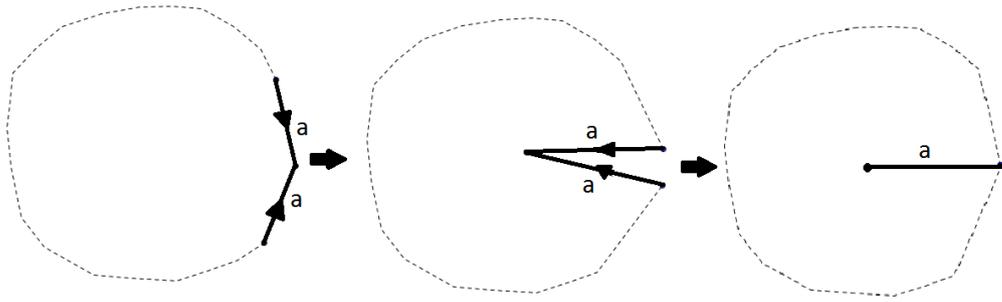


Figura 2.10: Eliminando vértices opostos adjacentes

No caso de todas as arestas serem eliminadas neste processo, temos que a superfície S é uma esfera. Caso contrário, procedemos ao passo 3.

Passo 3: Eliminar todos os vértices, menos um.

Observaremos agora quantos vértices há em nossa planificação. Tomemos como exemplo a figura abaixo:

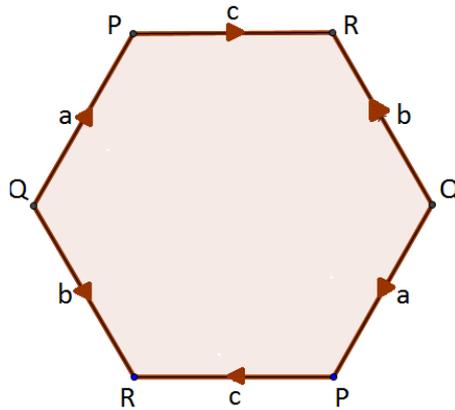


Figura 2.11: Planificação com 3 vértices, P , Q e R .

A superfície em questão possui 3 vértices diferentes, que chamaremos de P , Q e R . O vértice P é o ponto inicial de c e o ponto final de a . Da mesma maneira, o vértice Q é o inicial de a e de b , e o vértice R é o final de b e de c . Podemos escolher arbitrariamente um vértice, que neste caso será o vértice P . Após isto usaremos o seguinte processo para transformar os outros vértices (como Q) em P .

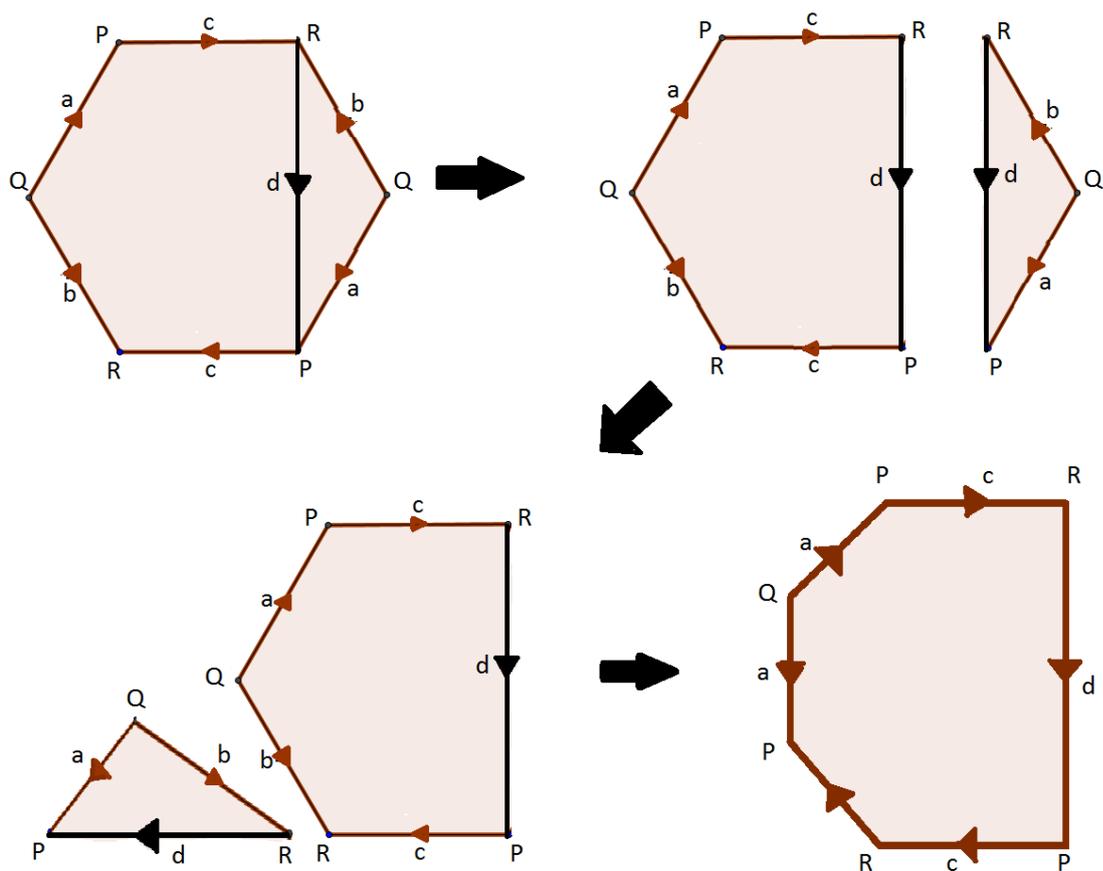


Figura 2.12: Eliminando um vértice Q e criando um novo vértice P .

Observe que agora temos um vértice P a mais e um vértice Q a menos. Este processo será repetido até eliminarmos todos os vértices, menos um. Neste passo, é possível que apareçam algumas situações onde usaremos o passo 2.

Passo 4: Juntando pares em fila.

Podemos agora cortar e colar nosso diagrama de modo a fazer com que pares em fila se tornem adjacentes. Para isso, procederemos como mostrado na figura abaixo:

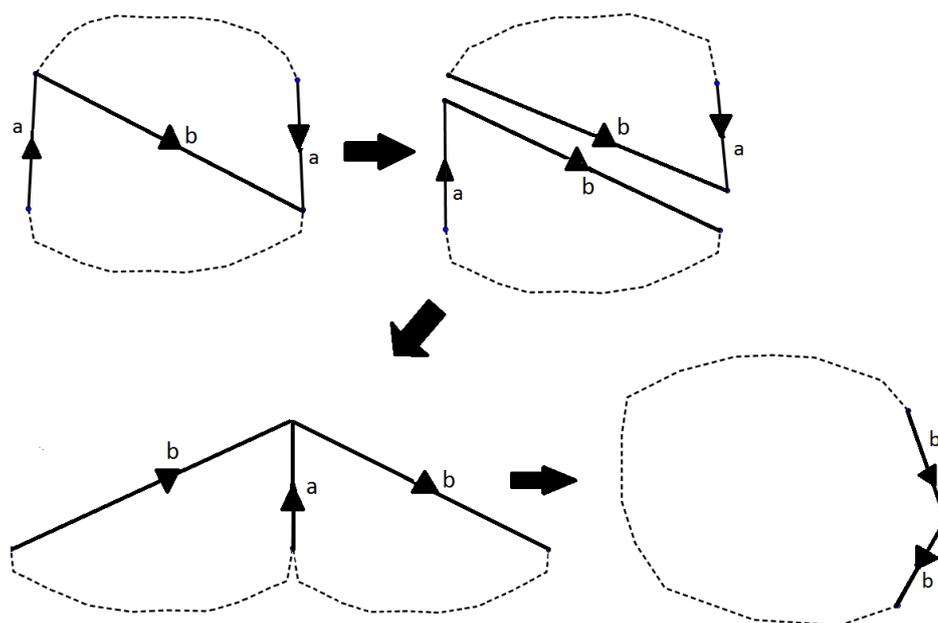


Figura 2.13: Juntando pares em fila.

Repetimos o procedimento para todos os pares em fila de nossa planificação. Se, ao final deste passo, não restarem mais arestas de outro tipo, então nossa superfície será uma soma conexa de planos projetivos.

Passo 5: Juntando pares de pares opostos.

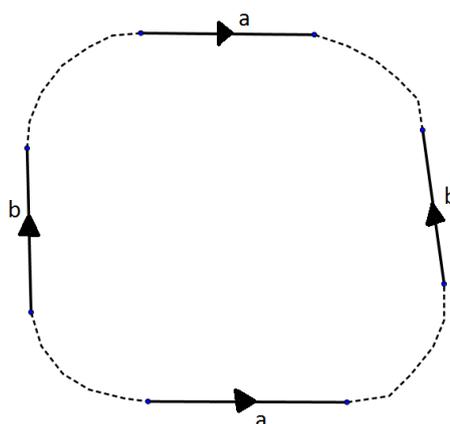


Figura 2.14: Par de pares opostos.

Depois de realizarmos os 4 passos anteriores, todos os pares opostos restantes devem aparecer em pares cujas arestas se separam, como na figura acima. Para comprovar isto, suponhamos que exista um par oposto cujas arestas não estejam separadas por outro par

oposto. Como este par não pode ser separado por um par em fila (já que nesta etapa todos são adjacentes), teríamos uma planificação como na figura abaixo:

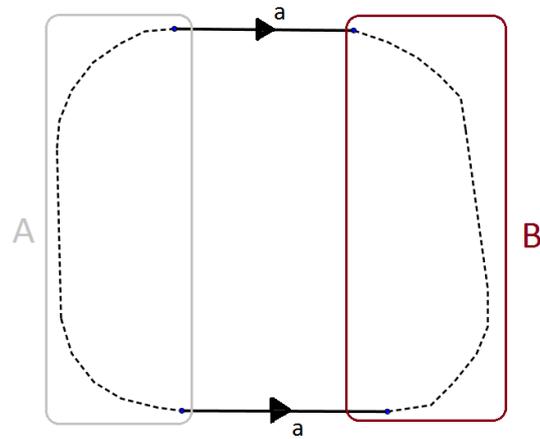


Figura 2.15: Somente um par oposto.

Nesta figura, percebemos que o vértice inicial de a só está identificado com arestas em A , e o vértice final de a só se identifica com arestas em B . Portanto, não há como o início e o fim de a serem o mesmo vértice, o que contraria o passo 3. Assim, existe um par oposto que separa o par de arestas opostas. Para juntarmos pares de pares opostos, basta seguirmos o procedimento mostrado na figura abaixo:

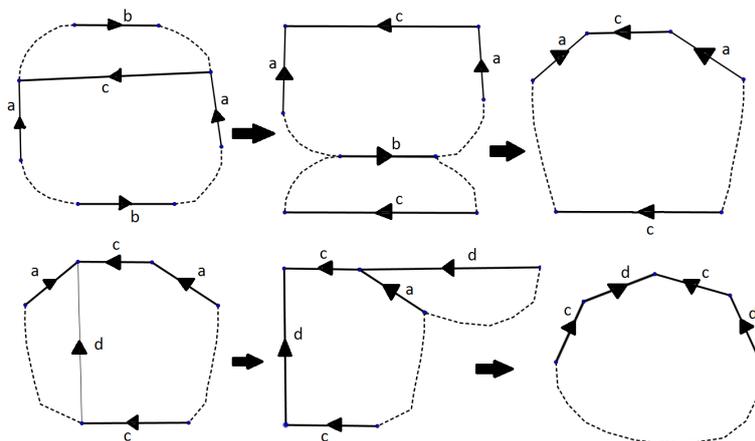


Figura 2.16: Juntando pares de pares opostos.

Repetimos o procedimento para todos os pares de pares opostos de nossa planificação. Se, ao final deste passo, não restarem mais arestas de outro tipo, então nossa superfície será uma soma conexa de toros.

Passo 6: Combinações de toros e planos projetivos.

Se, ao final desta etapa, nossa superfície ainda não estiver classificada, isto significa que nossa planificação possui tanto pares opostos quanto pares em fila. Neste caso, a superfície é uma soma conexa de toros e planos projetivos. Contudo, superfícies como esta podem ser reduzidas a uma forma inclusa no teorema usando o lema abaixo:

Lema 2.1. $T^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$

Demonstração. Basta usarmos o procedimento de cortar e colar como mostrado na figura abaixo:

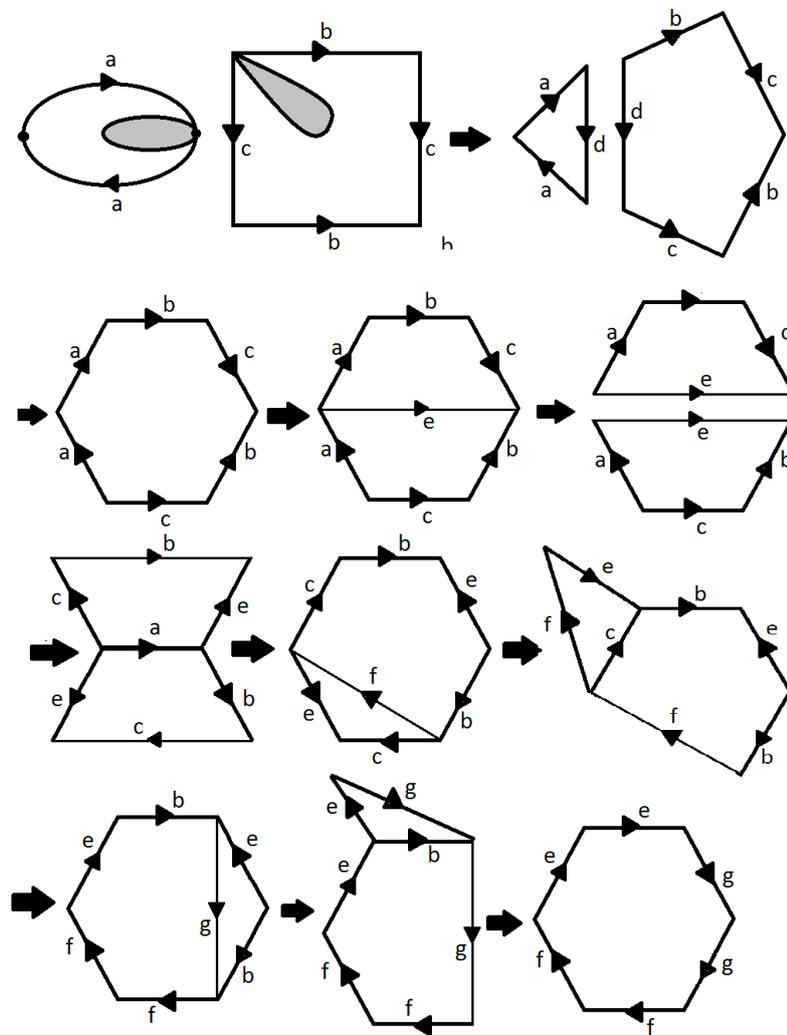


Figura 2.17: Soma conexa de um toro e um plano projetivo.

□

Assim, uma soma conexa de toros e planos projetivos pode ser expressa como uma soma conexa apenas de planos projetivos. Com isto, classificamos todas as superfícies compactas e conexas, como queríamos. \square

Com este teorema, podemos restringir nossos estudos de coloração de mapas a um número menor de superfícies, sem perder a generalidade em nossos resultados. Isto nos permite inclusive fazer uma abordagem particular de cada superfície, para depois procedermos a uma generalização. No próximo capítulo, estudaremos uma propriedade que nos permite identificar estas superfícies, de modo que superfícies que são topologicamente equivalentes compartilham de semelhança nesta propriedade.

Capítulo 3

A característica de Euler e a coloração de mapas

Neste capítulo estudaremos a Característica de Euler, e mostraremos que ela permanece a mesma para superfícies topologicamente equivalentes. Assim sendo, é algo que pode nos ser bastante útil para determinarmos como cada superfície se comporta sob um certo ponto de vista.

3.1 Característica de Euler

Definição 3.1. *Seja K um complexo de dimensão n . A característica de Euler de K é:*

$$\mathcal{X}(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i |i - \text{células}|$$

Lema 3.1. *Seja T um triângulo, considerado como um complexo, e seja T' a subdivisão baricêntrica de T . Então, $\mathcal{X}(T) = \mathcal{X}(T')$.*

Teorema 3.1. *Se duas superfícies compactas e conexas K e K' forem topologicamente equivalentes, então $\mathcal{X}(K) = \mathcal{X}(K')$.*

Antes da prova, observe que não estamos pedindo que, caso $\mathcal{X}(K) = \mathcal{X}(K')$, os objetos K e K' sejam topologicamente equivalentes. À primeira vista pode parecer que esta última condição é necessária, mas a Característica de Euler não satisfaz esta condição, e mesmo assim faremos uso dela.

Demonstração. Suponhamos que T e T' são as triangulações de K e K' , respectivamente, e que K e K' são topologicamente equivalentes. O que vamos mostrar agora é que o processo descrito no Teorema de Classificação das Superfícies não altera a Característica

de Euler. Para mostrar isto, observamos que os 6 passos da prova podem ser executados a partir da combinação de 3 operações básicas (ou movimentos). Analisaremos agora essas 3 operações, uma de cada vez. Seja então T o complexo original e U o complexo modificado pela devida operação, V_T , A_T e F_T as quantidades de vértices, arestas e faces de T e V_U , A_U e F_U as quantidades de vértices, arestas e faces de U :

Operação 1: Adicionar uma aresta entre dois vértices de um polígono.

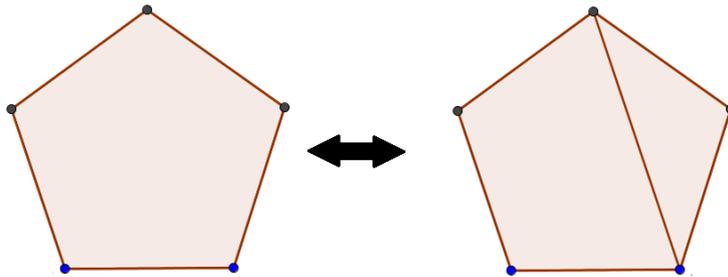


Figura 3.1: Operação do tipo 1.

Note que:

$$F_U = F_T + 1, A_U = A_T + 1 \text{ e } V_U = V_T \Rightarrow \\ \mathcal{X}(U) = (F_T + 1) - (A_T + 1) + V_T = \mathcal{X}(T').$$

Esta operação e sua inversa são usadas tanto na subdivisão baricêntrica quanto nas etapas em que é necessário cortar ao longo de uma nova aresta ou colar duas arestas (por exemplo, nos passos 3,4,5 e 6 da classificação).

Operação 2: Adicionar um vértice no interior de um polígono e uma aresta indo deste vértice para um vértice da fronteira do polígono.

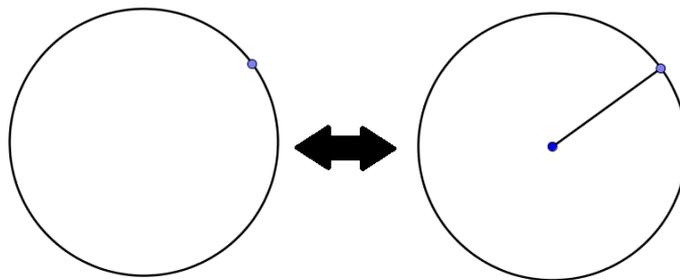


Figura 3.2: Operação do tipo 2.

Note que:

$$F_U = F_T, A_U = A_T + 1 \text{ e } V_U = V_T + 1 \Rightarrow \\ \mathcal{X}(U) = (F_T) - (A_T + 1) + (V_T + 1) = \mathcal{X}(T').$$

Esta operação e sua inversa são utilizadas na subdivisão baricêntrica e também nos passos 1 e 2 da classificação.

Operação 3: Adicionar um vértice no interior de uma aresta.

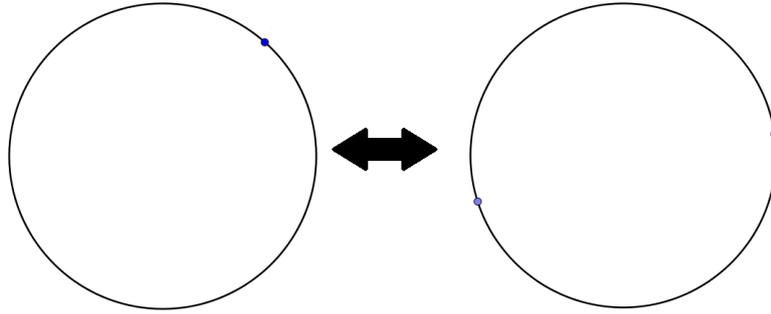


Figura 3.3: Operação do tipo 3.

Note que:

$$F_U = F_T, A_U = A_T + 1 \text{ e } V_U = V_T + 1 \Rightarrow \\ \mathcal{X}(U) = (F_T) - (A_T + 1) + (V_T + 1) = \mathcal{X}(T').$$

Esta operação e sua inversa são utilizadas na subdivisão baricêntrica e também no passo 1 da classificação da superfície, quando uma sequência de arestas é renomeada como uma aresta só.

Como o processo descrito no Teorema de Classificação das Superfícies envolve apenas um número finito dessas três operações, temos que ele não afeta a Característica de Euler. Assim, a Característica de Euler depende apenas da superfície, e não da triangulação. \square

3.2 Coloração de mapas

Agora que sabemos que a Característica de Euler não muda para superfícies topologicamente equivalentes, vamos procurar relacioná-la com o problema da coloração de mapas. Se S é uma superfície, podemos representar um mapa desenhado em S por um complexo K em S . Chamaremos de F o número de faces ou polígonos em K , A o número de arestas e V o número de vértices.

Lema 3.2. *Seja S uma superfície, e N um inteiro positivo. Se $\frac{2A}{F} < N$ para todos os complexos K em S , então N cores são suficientes para colorir todos os mapas que podem ser desenhados em S .*

Demonstração. Se S é uma superfície, cada aresta em K está identificada com exatamente uma outra aresta na montagem do complexo. Por isso, temos que, se o número total de arestas em K é A , a quantidade de arestas de todos os polígonos antes dos encaixes é $2A$. Além disso, temos que o número total de faces(polígonos) em K é F . Assim, podemos pensar no número $\frac{2A}{F}$ como uma espécie de quantidade média de arestas por polígono. A prova se dá por indução sobre F . O lema sempre é verdadeiro para $F < N$, pois para qualquer N inteiro positivo teremos mais cores que polígonos, então basta pintarmos cada polígono com uma cor diferente. Suponhamos agora que o lema é verdadeiro para $F = m$, ou seja, que todo complexo K com m 2-células(polígonos) pode ser colorido com N cores. Temos, por hipótese, que $\frac{2A}{F} = \frac{2A}{m+1} < N$ para K , ou seja, a quantidade média de arestas por polígono é menor que N . Assim, temos que existe uma 2-célula em K com menos que N arestas, que chamaremos de P . Podemos eliminar P , encolhendo o polígono para um só ponto, em um processo chamado *projeção radial*.

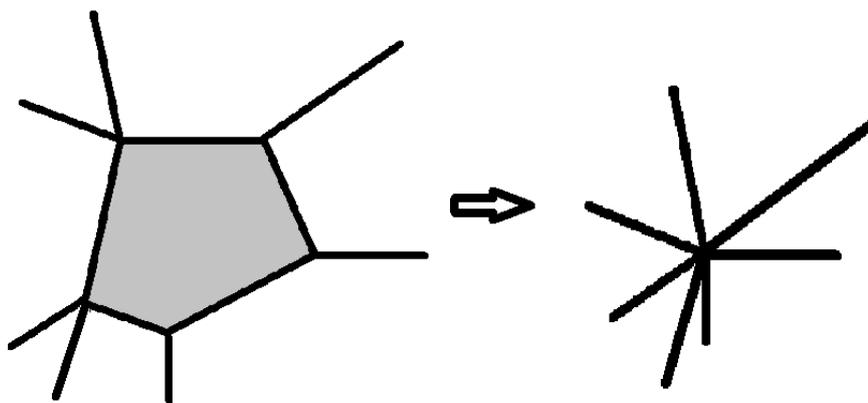


Figura 3.4: Projeção Radial

Assim, um novo complexo K' é formado com uma 2-célula a menos que K , isto é, K' possui m 2-células. Usando nossa hipótese de indução, obtemos que K' pode ser colorido com N cores. Além disso, a coloração usada em K' pode ser usada para obter uma coloração de K , com exceção do polígono P . Lembremos que P possui menos que N arestas. Isto significa que, nos países que fazem fronteira com P , uma das N cores não foi utilizada. Logo, podemos colorir P com esta cor, obtendo assim uma coloração possível para K com N cores. \square

Lema 3.3. *Seja S uma superfície. Então:*

$$\frac{2A}{F} < 6 \left(1 - \frac{\mathcal{X}(S)}{F} \right)$$

para cada complexo K em S .

Demonstração. Considere todos os polígonos que serão colados juntos para formar K . Em qualquer um deles, o número de arestas é igual ao número de vértices, e as arestas estão identificadas em pares na montagem de K . Então:

$$\begin{aligned} 2A &= (\text{quantidade de arestas antes da montagem de } K) = \\ &= (\text{número de vértices antes da montagem de } K) \end{aligned}$$

Além disso, depois de montar K , cada vértice em K é formado pela colagem de ao menos 3 polígonos juntos. Por isso:

$$3V \leq (\text{quantidade de vértices antes da montagem de } K) = 2A$$

Usando a característica de Euler de S , obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(S) &= V + A + F \Rightarrow \\ \mathcal{X}(S) - F &= V - A \leq \frac{2A}{3} - A = \frac{-A}{3} \Rightarrow \\ 3(F - \mathcal{X}(S)) &\geq A \Rightarrow \\ \frac{2A}{F} &\leq \frac{6(F - \mathcal{X}(S))}{F} = 6 \left(1 - \frac{\mathcal{X}(S)}{F} \right) \end{aligned}$$

□

Como consequência destes lemas, temos que, para o toro e a garrafa de Klein, $\frac{2A}{F} \leq 6$, pois $\mathcal{X}(S) = 0$. Além disso, se tomarmos $N = 7$, temos $\frac{2A}{F} < N$, logo temos que 7 cores são suficientes para colorir tanto o toro quanto a garrafa de Klein. Vamos agora descobrir se estas 7 cores são realmente necessárias para a coloração.

Proposição 3.1. *7 cores são necessárias e suficientes para colorir todos os mapas possíveis em um toro.*

Demonstração. Precisamos provar apenas que as 7 cores são necessárias. Isto pode ser feito observando a seguinte planificação:

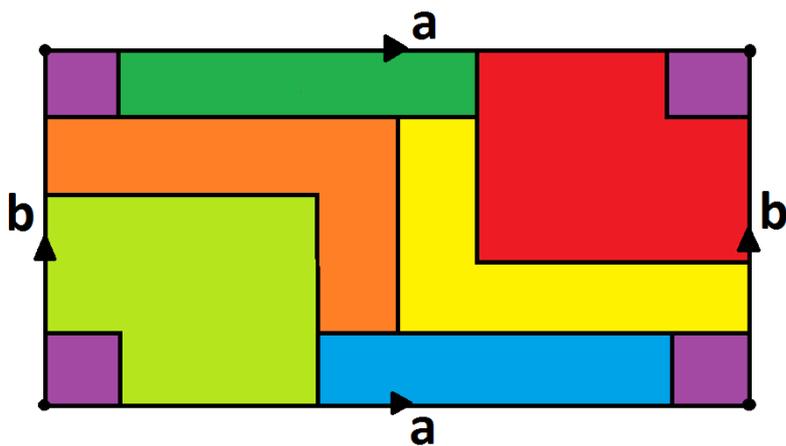


Figura 3.5: Mapa em um toro que precisa ser colorido com 7 cores.

Podemos notar que, depois da montagem, cada país faz fronteira com todos os outros. Portanto as 7 cores são necessárias. \square

Proposição 3.2. *Pelo menos 6 cores são necessárias para colorir todos os mapas possíveis em uma garrafa de Klein.*

Demonstração. De forma análoga à proposição anterior, vamos observar o seguinte mapa, que precisa de 6 cores para ser colorido.

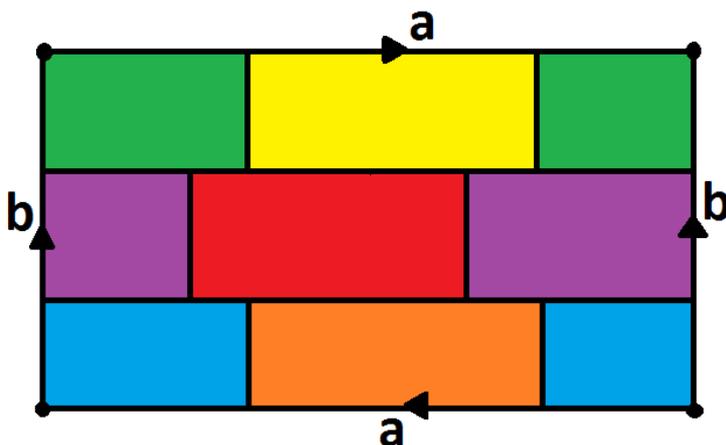


Figura 3.6: Mapa em uma garrafa de Klein que precisa ser colorido com 6 cores.

\square

Para a esfera e o plano projetivo, tem-se $\mathcal{X}(S) > 0$, portanto $\frac{2A}{F} < 6$. Isto significa que 6 cores são suficientes para colorir qualquer mapa na esfera e no plano projetivo. Quanto à necessidade, também podemos obter algumas informações:

Proposição 3.3. *Pelo menos 4 cores são necessárias para colorir todos os mapas possíveis em uma esfera.*

Demonstração. Para provar isto, basta observarmos este mapa, que precisa de 4 cores para ser colorido.

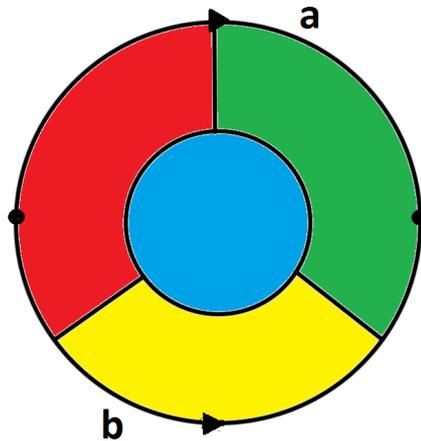


Figura 3.7: Mapa em uma esfera que precisa ser colorido com 4 cores.

□

Proposição 3.4. *6 cores são necessárias e suficientes para colorir qualquer mapa no plano projetivo.*

Demonstração. Já mostramos que 6 cores são suficientes. O mapa seguinte mostra que as 6 cores são necessárias.

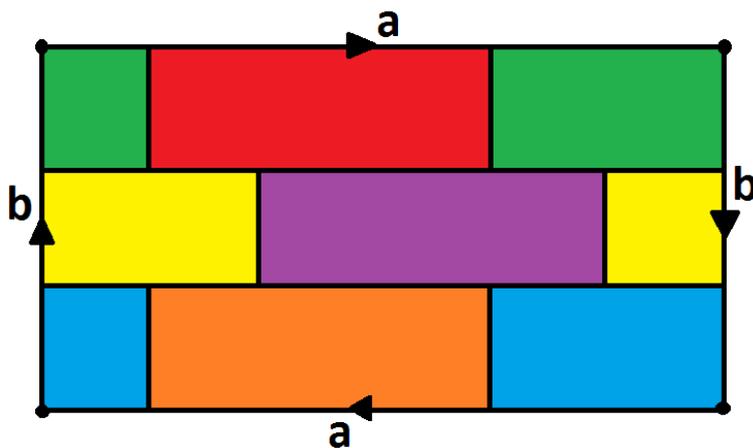


Figura 3.8: Mapa em um plano projetivo que precisa ser colorido com 6 cores.

□

Definição 3.2. *Seja S uma superfície. O número de Heawood de S é:*

$$H(S) = \left\lceil \frac{7 + \sqrt{49 - 24\mathcal{X}(S)}}{2} \right\rceil$$

Teorema 3.2. *Seja S uma superfície compacta e conexa. Então $H(S)$ cores são suficientes para colorir qualquer mapa em S .*

Demonstração. Se $\mathcal{X}(S) = 2$, temos que S é a esfera, e esta é a chamada conjectura das quatro cores, que foi provada em 1976 por Appel e Haken[7], e é bem extensa. Se $\mathcal{X}(S) = 1$, então S é o plano projetivo e $H(S) = 6$. Se $\mathcal{X}(S) = 0$, então S pode ser o toro ou a garrafa de Klein, e $H(S) = 7$. Estes casos já foram estudados anteriormente, e o teorema é válido para eles. Assuma então que $\mathcal{X}(S) < 0$. Sendo N o número mínimo de cores necessárias para coloração de S e f o número de faces, podemos assumir que $f > N$, já que caso contrário teríamos tantas cores quanto países. Pelo lema, temos que:

$$\frac{2A}{F} \leq 6 \left(1 - \frac{\mathcal{X}(S)}{F}\right) \leq 6 \left(1 - \frac{\mathcal{X}(S)}{N+1}\right), \text{ pois } F \leq N+1.$$

Nós queremos que N seja maior que $\frac{2A}{F}$, para que possamos colorir nosso mapa com N cores. Então, precisamos ter:

$$N > 6 \left(1 - \frac{\mathcal{X}(S)}{N+1}\right) \Rightarrow N(N+1) > 6(N+1) - 6\mathcal{X}(S).$$

Completando quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} N^2 - 5N + \frac{25}{4} &> 6 - 6\mathcal{X}(S) + \frac{25}{4} \Rightarrow \\ \left(N - \frac{5}{2}\right)^2 &> \frac{49}{4} - 6\mathcal{X}(S) \Rightarrow \\ \left|N - \frac{5}{2}\right| &> \sqrt{\frac{49 - 24\mathcal{X}(S)}{4}} \Rightarrow \\ N &> \frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49 - 24\mathcal{X}(S)}{4}} \end{aligned}$$

Como queremos que N tenha o menor valor possível, escolhemos o menor inteiro que temos certeza que é maior que o valor da expressão que encontramos. Assim:

$$\frac{5}{2} + \sqrt{\frac{49 - 24\mathcal{X}(S)}{4}} < N \leq \left\lceil \frac{5 + \sqrt{49 - 24\mathcal{X}(S)}}{2} \right\rceil + 1 = H(S).$$

Portanto, pelo lema, temos que $H(S)$ cores são suficientes para colorir qualquer mapa desenhado na superfície S . \square

Ringel e Youngs[5] provaram em 1968 que, de fato, $H(S)$ cores para colorir quaisquer mapas em superfícies com $\chi(S) < 0$. Além disso, Franklin[8] provou em 1934 que apenas 6 cores são suficientes para colorir qualquer mapa em uma garrafa de Klein. Com isto, $H(S)$ cores são necessárias e suficientes para colorir qualquer mapa em qualquer superfície compacta e conexa, menos na garrafa de Klein.

Referências

- [1] KINSEY, L.C. *Topology of Surfaces*. New York: Springer, 1993. 269p. (Undergraduate Texts in Mathematics)
- [2] LEE, J.M. *Introduction to Topological Manifolds*. 2ª ed. Seattle: Springer, 2011. 448p. (Graduate Texts in Mathematics)
- [3] BONDY, J.A.; MURTY, U.S.R. *Graph Theory*. 1ª ed. Springer, 2008. 655p. (Graduate Texts in Mathematics)
- [4] MUNKRES, J.R. *Topología*. (Trad. Ferrández, A.I., Saorín, P.L. Meroño, M.A.B., Hernández, M.A.C., Pastor, J.A.G., Cegarra, D.H.), 2ª ed. Madrid: Pearson Educación S.A., 2002.624p.
- [5] RINGEL, G.; YOUNGS, J.W.T. Solution of the Heawood map-coloring problem. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* (2), v.60, p. 438-445, 1968.
- [6] DOYLE, P.H.; MORAN, D.D.A. A short proof that compact 2-manifolds can be triangulated. *Inventiones mathematicae* (Issue 2), v.5, p. 160-162, 1968.
- [7] APPEL, K; HAKEN, W. Every planar map is four-colorable. *Bulletin of the American Mathematical Society*, v.82 (Nº 5), p. 711-712, 1976.
- [8] FRANKLIN, P. A Six Color Problem. *J. Math. Phys.* v.13, p. 363-379, 1934.
- [9] LUZ, S.M. *Conjuntos compactos*. 2000. 48p. Trabalho de Conclusão de Curso. Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.