UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

Instituto de Ciências Exatas e Naturais

Faculdade de Matemática

Curso de Licenciatura Plena em Matemática

Florivaldo Pena de Sousa

Algumas Aplicações da Trigonometria Circular

Belém - Pará

2014

Florivaldo Pena de Sousa

Algumas Aplicações da Trigonometria Circular

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Belém - Pará

2014

Florivaldo Pena de Sousa

Algumas Aplicações da Trigonometria Circular

Trabalho de conclusão de curso apresentado como requisito parcial para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Pará

ORIENTADOR: Prof. Dr. Francisco Paulo Marques Lopes

Faculdade de Matemática

Prof. Dr. Joao Cláudio Brandemberg Quaresma

Prof. Dr. Manoel Silvino Batalha de Araújo

DATA DA AVALIAÇÃO: 06 / 01 / 2014

CONCEITO: BOM

Belém - Pará

2014

Dedico

A toda minha familia e amigos

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à Deus por me dar a cada dia a perseverança e a força para continuar buscando novos conhecimentos e aprendizados.

Agradeço à minha família por suportar muitas vezes a minha ausência devido a várias tarefas acadêmicas que ao longo desses seis anos fizeram parte de minha rotina.

Agradeço aos professores, em especial, ao meu orientador que foi um dos melhores professores que tive durante a graduação, pela amizade, dedicação, atenção, e maiormente pela imensa paciência tida comigo durante o desenvolvimento desse trabalho.

Agradeço aos meus amigos do curso de Licenciatura em Matemática que estiveram comigo nesses seis anos de curso e pelas grandes amizades conquistadas neste longo percurso.

Agradeço às pessoas maravilhosas que fazem parte de minha vida e que contribuem significativamente para o meu sucesso.

MUITO OBRIGADO.

"A Matemática apresenta invenções tão sutis que poderão servir não só para satisfazer os curiosos como, também para auxiliar as artes e poupar trabalho aos homens."

(Descartes)

Resumo

Este trabalho tem por objetivo mostrar ao leitor, principalmente ao aluno do curso de licenciatura em Matemática, aplicações práticas da trigonometria. Muitas vezes, no nosso curso, nos perguntamos “Onde vou usar essas fórmulas?”. Em muitas situações esclareceremos ideias matemáticas que estão sendo constituídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a esses “porquês”, desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos desse conhecimento. No decorrer dos estudos encontramos várias situações do nosso cotidiano em que precisamos da trigonometria como ferramenta para resolver problemas concretos.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem por objetivo mostrar ao leitor, principalmente ao aluno do curso de licenciatura em Matemática, aplicações práticas da trigonometria. Muitas vezes, no nosso curso, nos perguntamos "Onde vou usar essas fórmulas?". Em muitas situações esclareceremos ideias matemáticas que estão sendo constituídas pelo aluno, especialmente para dar respostas a esses "porquês", desse modo, contribuir para a constituição de um olhar mais crítico sobre os objetos desse conhecimento.

No decorrer dos estudos encontramos várias situações do nosso cotidiano em que precisamos da trigonometria como ferramenta para resolver problemas concretos. A trigonometria está presente em, praticamente, todos os ramos da Matemática e utilizada também na Física, Astronomia, Geografia e muitas outras áreas.

Apesar de sua importância, em muitas vezes a trigonometria é apresentada desconectada das aplicações, investindo-se muito tempo no cálculo algébrico e análise dos gráficos. O que deve ser assegurado são as aplicações da trigonometria na resolução dos problemas que envolvem medições, em especial o cálculo de distâncias inacessíveis e a fenômenos periódicos.

Não faremos exposições longas a respeito de cada assunto para termos mais assuntos abordados.

Apresentaremos uma breve história da trigonometria e alguns exercícios em que aplicamos as relações trigonométricas do círculo trigonométrico, as leis do seno e do cosseno e algumas aplicações trigonométricas.

Capítulo 1

Um pouco da história da trigonometria

A Matemática, desde seus primórdios, entrelaça-se tão intimamente com a história da civilização que sua história é não somente motivadora em termos de ensino como também muito rica em aspectos culturais.

A palavra *trigonometria* tem origem no grego *trigonos* (triângulos) mais *meirum* (medida), cujo principal objetivo é estudar as relações entre os lados e ângulos de um triângulo, nasceu como resposta à necessidade da Astronomia e da Navegação.

A trigonometria desenvolveu-se como resultado de uma interação continua e fértil entre a oferta e a demanda: a oferta de teorias matemáticas aplicáveis e técnicas acessíveis em qualquer momento e a demanda de uma única ciência aplicada, a Astronomia. Assim, a história da trigonometria mostrou em seu interior o crescimento de três partes clássicas da matemática: álgebra, análise e geometria.

A trigonometria era baseada numa única função, a corda de um arco de círculo arbitrário, onde identificou-se as primeiras seqüências numéricas relacionadas com comprimentos de sombra com horas do dia. Por volta do século II essa função corda transformou-se em variações do seno. Somente por volta do século IX, a nova função seno e as antigas funções sombra (tangente, cotangente, secante') foram tabuladas em sexagenários. Com isto, surgiu a primeira trigonometria genuína, utilizando como objeto de estudos o triângulo plano ou esférico, seus lados e ângulos. No final do século XVIII, Leonhard Euler e outros já haviam apresentados todos os teoremas da trigonometria como corolários da teoria das funções complexas.

Tales (624 - 548 a.C.) foi considerado um homem de rara inteligência. No Egito ele entrou em contato com a cultura científica, em particular a astronômica e a geometria. Tales foi denominado "o primeiro matemático verdadeiro", por organizar a geometria de forma dedutiva.

O fato histórico pelo qual ele é lembrado é o de ter medido a altura da pirâmide de Quéops, no Egito, através da semelhança de dois triângulos. Observou as sombras e os raios solares e descobriu que a sombra de uma estaca qualquer era proporcional à sombra da pirâmide. Ao responder a uma pergunta de um sacerdote egipício . Tales valeu-se da proporcionalidade dos lados de triângulos semelhantes para calcular a altura da pirâmide. Disse que "espetaria, na areia, uma estaca qualquer, cujo comprimento é conhecido e mediria a sua sombra. Mediria também, na mesma hora, a sombra da pirâmide e adicionaria a metade do comprimento do lado da base". Assim, ele saberia a altura da pirâmide.

A Trigonometria grega surgiu devido às necessidades da astronomia, a fim de prever as efemérides celestes, para calcular o tempo, e para ser utilizada na Navegação e na Geografia. Assim, os estudos da Trigonometria se concentravam na trigonometria esférica, que estuda triângulos esféricos. isto é, triângulos sobre a superfície de uma esfera. No entanto, foi necessário para isso desenvolver partes da trigonometria plana. O estudo dos triângulos esféricos na Matemática grega vinha sendo feito desde os últimos pitagóricos. O próprio Euclides, que viveu em torno de 300 a.C.. em um de seus trabalhos, o Fenômenos, estudou a Geometria esférica. Aproximadamente em 20 a.C..

Teodósio compilou o que os gregos conheciam sobre o assunto em seu livro Sobre a Esfera.

Aristarco de Samos, que viveu em torno de 300 a.C., em seu livro Sobre as Distâncias do Sol e da Lua, baseando-se em observações, deduziu que

1. A distância da Terra ao Sol é maior do que 18 vezes e menor do que 20 vezes a distância da Terra à Lua. Na demonstração deste fato vemos pela primeira vez a aproximação do seno de um ângulo pequeno.

2. Os diâmetros do Sol e da Lua têm a mesma razão que suas distâncias da Terra.

3. A razão do diâmetro do Sol pelo diâmetro da Terra é maior do que 19:3 e menor do que 43:6.

Os erros cometidos por Aristarco devem -se aos dados experimentais que utilizou. Seus raciocínios estavam certos.

Pode-se dizer que o fundador da Trigonometria foi Hiparco de Nicéia, que viveu em torno de 120 a.C.. Semelhantemente a muitos matemáticos gregos, inclusive o próprio Euclides, pouco sabe-se sobre sua vida. A maior parte do que se conhece sobre ele é devida a Ptolomeu (100(?) - 180(?) d.C.) o qual cita vários resultados de Hiparco sobre Trigonometria e Astronomia, e a fragmentos de descrições de seus trabalhos contidos nas obras de outros autores gregos.

Hiparco foi o primeiro a determinar com precisão o nascer e o ocasos de várias estrelas, usando para isso a tabela de cordas (função sombra) por ele calculada. Construiu uma tabela trigonométrica com os valores das cordas de uma série de ângulos entre $0°$ e $180°$, a qual apresentava a correspondência entre o arco e a sua corda. Foram construídas para serem utilizadas na Astronomia.

É provável que a divisão do círculo em $360°$ tenha se originado com a tabela de cordas de Hiparco. Ele provavelmente seguiu a ideia do matemático grego Hipsiclo, o qual por sua vez tinha dividido o dia em 360 partes, uma divisão possivelmente inspirada na astronomia babilônica.

A Trigonometria grega atingiu seu ápice com Cláudio Ptolomeu (viveu em torno de 150 d.C.) em seu principal trabalho, o *Almagesto*. O *Almagesto* tem por objetivo descrever matematicamente o funcionamento do sistema solar, supondo que a Terra está em seu centro (teoria geocêntrica, que seria substituida já no século XV pela teoria heliocêntrica, introduzida por Copérnico (1473 - 1543)). Ptolomeu desenvolveu a Trigonometria em dois capítulos do Almagesto, sendo que em um deles apresenta a tabela de cordas (tabela de senos), que usou uma circunferência com um raio de 60 unidades. Para a construção desta tabela, a partir do fato de que em um quadrilátero inscritivel $ABCD$ vale a relação

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$$

Ptolomeu deduz o que em notação moderna e usando as funções seno e cosseno é a expressão para sen $(a \pm b)$. Além, disso, demonstrou que $\operatorname{sen} 2A + \cos 2A = 1$, onde A é um ângulo agudo.

Com os hindus, a Trigonometria continuou sendo aplicada à Astronomia. No século V depois de Cristo, os astrônomos hindus abandonaram as tabelas de cordas e adotaram as de senos; o matemático hindu Aryabhata (476 - ?) passou a trabalhar com a corda AB do arco AB, em um circulo de raio 3439.5 (este número é obtido supondo que o comprimento da circunferência é 360.60 e usando o valor de 3,14 para π). Com a mudança de raio, as tabelas de Ptolomeu não mais puderam ser utilizadas, sendo portanto necessário refazê-las. A Trigonometria hindu era aritmética, ao contrário da grega, muito mais geométrica.

A função seno, inicialmente conhecida como função corda, foi trabalhada com bastante intensidade durante muitos séculos anteriores a Ptolomeu.

A função corda relacionava um arco de circunferência com a corda respectiva. Com a natural evolução do pensamento matemático, quando alguém pensou em utilizar uma tábua a metade da corda de um arco duplo, estava criada a função seno, que, em latim, era designada *sinus*.

Algum tempo depois, matemáticos hindus calcularam tábuas de seno. O seno era chamado *jya*, uma das várias grafias para a palavra corda em hindu. Posteriormente os árabes a transliteraram para jya, que depois foi incorretamente lida de *jayb*. O termo co-sinus foi utilizado pela primeira vez, no século XVII. por *Edmundo Gunter*, para indicar o complemento do seno, combinando essas duas palavras, que, em português, transformaram-se em cosseno. Ideias conhecidas as tangente e cotangente apareceram há mais de três tanto em cálculos relativos a construção de pirâmides, corno em cálculos envolvendo relógios de sol. Esses relógios mostravam a relação entre as horas do dia e o comprimento da sombra de uma vara.

Enquanto os conceitos de seno e cosseno tiveram sua origem no contexto da astronomia, tangente e cotangente emergiram das necessidades mais modestas da medição de alturas e distâncias.

Os árabes herdaram a trigonometria dos gregos e hindus, adotando o ponto de vista aritmético. Introduziram, para facilitar os cálculos, a tangente, a cotangente, a secante e a cossecante. O matemático al-Battavi introduziu uma inovação, o círculo de raio unitário, e assim calculou as razões.

O interesse pela trigonometria entre gregos, hindus e árabes era motivado por suas aplicações à Astronomia. A partir do Renascimento, época da expansão marítima europeia que exigiu o desenvolvimento da Cartografia, a trigonometria passou a ser utilizada em Cartografia e em Topografia, como já proposto por Fibonacci (1175 - 1250) em seu Prática da Geometria, de 1220.

Outro fator de desenvolvimento da trigonometria foi a necessidade de refazer todos os cálculos da Astronomia posicional, com a adoção progressiva do sistema heliocêntrico de Copérnico.

A construção de tabelas trigonométricas era uma tarefa lenta e desagradável, mas essencial para o progresso da Astronomia e da Matemática. A utilização crescente da trigonometria fez com que muitos outros matemáticos construíssem tabelas, como por exemplo George Joaquim Rético (1514 - 1576). Ele fundiu ideias de outros matemáticos com suas próprias contribuições e expôs uma trigonometria do triângulo retângulo: em vez de dizer que CB é o seno do arco CD, ele considerou CB como o seno do ângulo COB, o que introduziu essencialmente a formulação da trigonometria do triângulo retângulo, como feito até hoje.

A partir de Galileu (1564 - 1642), e com a descoberta da Geometria Analítica por Descartes (1596 - 1650) e por Fermat (1601 - 1665), o estudo das curvas desenvolveu-se muito. A curva seno foi introduzida nos estudos de Roberval 8 (1602 - 1675) sobre a ciclóide; no livro Mecânica de Wallis (1616 - 1703), publicado em 1670, há um gráfico de dois períodos da função seno. É o primeiro aparecimento de uma função trigonométrica.

Usando o método dos indivisíveis, Roberval mostrou que $\int\limits_a^b \operatorname{sen} x\, dx = \cos a - \cos b$. Pouco a pouco, as funções trigonométricas passaram a figurar frequentemente em Matemática, paralelamente ao uso de tabelas cada vez mais precisas para aplicações em Topografia, Navegação e Astronomia de posição. Já nos séculos XVIII e XIX, foi visto serem elas essenciais para a solução de certos problemas de Matematica e de Física. A introdução das séries de Fourier mostrou a posição central destas funções na Análise Matemática moderna e em muitas de suas aplicações.

Na atualidade encontram-se aplicações para a trigonometria nas telecomunicações, na música, na determinação de distâncias entre estrelas, na medicina, na física, na sociologia e em muitas outras áreas cientificas. Como tal, o seu estudo é indispensável para engenheiros, físicos, informáticos e praticamente para todos os cientistas.

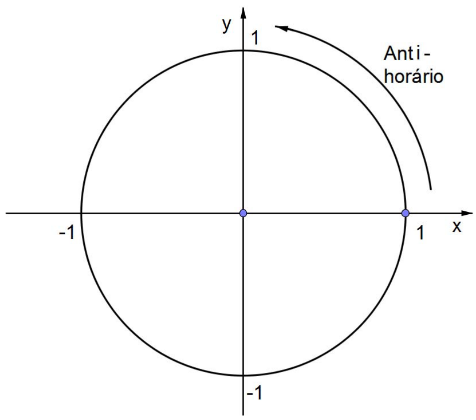
Capítulo 2

Ciclo Trigonométrico

2.1 O Ciclo Trigonométrico

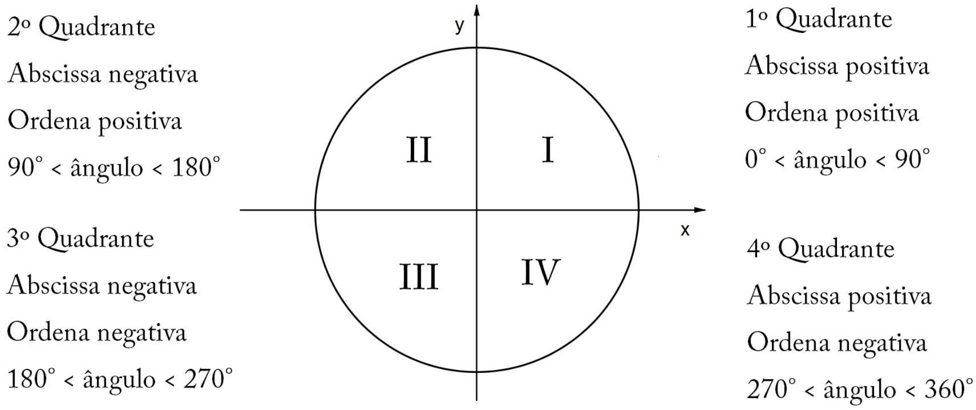
Considere uma circunferência de raio unitário com centro na origem do sistema cartesiano ortogonal e o ponto $A = (1, 0)$. O ponto A será tomado como a origem dos arcos orientados nesta circunferência e o sentido positivo considerado será o anti-horário.

Assim, chama círculo trigonométrico ou ciclo trigonométrico, ao círculo orientado de raio unitário, cujo centro é a origem do sistema de coordenadas cartesianas, conforme figura a seguir.



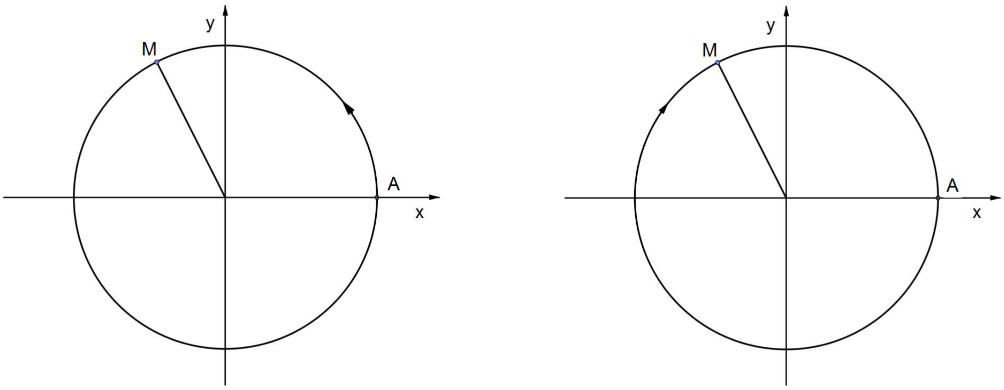
Os eixos OX e OY decompõem o ciclo trigonométrico em quatro quadrantes que são enumerados como segue:

Obs.: Os quadrantes são usados para localizar pontos e a caracterização de ângulos trigonométricos. Por convenção, os pontos situados sobre os eixos não pertencem a qualquer um dos quadrantes.



2.2 Arcos com mais de uma volta

Em Trigonometria, algumas vezes precisamos considerar arcos cujas medidas sejam maiores do que 360°. Por exemplo, se um ponto móvel parte de um ponto A sobre uma circunferência no sentido anti-horário e para em um ponto M, ele descreve um arco AM . A medida deste arco (em graus) poderá ser menor ou igual a 360° ou ser maior do que 360°. Se esta medida for menor ou igual a 360°, dizemos que este arco está em sua primeira determinação.

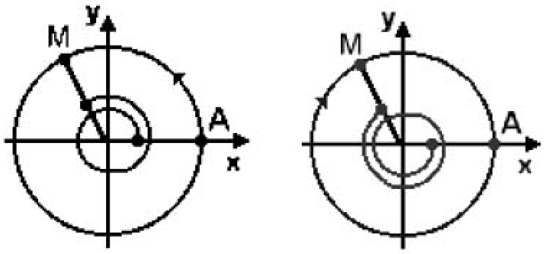


Acontece que o ponto móvel poderá percorrer a circunferência uma ou mais vezes em um determinado sentido, antes de parar no ponto M, determinando arcos maiores do que 360º ou arcos com mais de uma volta.

Existe uma infinidade de arcos, mas com medidas diferentes, cuja origem é o ponto A e cuja extremidade é o ponto M. Seja o arco AM cuja primeira determinação tenha medida igual a m. Um ponto móvel que parte de A e pare em M, pode ter várias medidas algébricas, dependendo do percurso.

Se o sentido for o anti-horário, o ponto M da circunferência trigonométrica será extremidade de uma infinidade de arcos positivos de medidas:

$$m, m + 2\pi, m + 4\pi, m + 6\pi, \ldots$$



Se o sentido for o horário, o ponto M será extremidade de uma infinidade de arcos negativos de medidas:

$$m - 2\pi, m - 4\pi, m - 6\pi, \ldots$$

Generalizando este conceito, se m é a medida da primeira determinação positiva do arco AM, podemos representar as medidas destes arcos por:

$$\mu(AM) = m + 2k\pi$$

onde k é um número inteiro, isto é, k pertence ao conjunto $Z = \{\ldots, -2, -3, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Família de arcos: Uma família de arcos $\{AM\}$ é o conjunto de todos os arcos com ponto inicial em A e extremidade em M.

Exemplo: Se um arco de circunferência tem origem em A e extremidade em M, com a primeira determinação positiva medindo $2\pi/3$, então os arcos desta família $\{AM\}$, medem:

Determinações positivas (sentido anti-horário)

$$\begin{array}{ll}
k = 0 & \mu(AM) = 2\pi/3 \\
k = 1 & \mu(AM) = 2\pi/3 + 2\pi = 8\pi/3 \\
k = 2 & \mu(AM) = 2\pi/3 + 4\pi = 14\pi/3 \\
k = 3 & \mu(AM) = 2\pi/3 + 6\pi = 20\pi/3 \\
 & \vdots \\
k = n & \mu(AM) = 2\pi/3 + 2n\pi = (2 + 6n)\pi/3
\end{array}$$

Determinações negativas (sentido horário)

$$
\begin{array}{ll}
k=-1 & \mu(AM)=2\pi/3-2\pi=-4\pi/3 \\
k=-2 & \mu(AM)=2\pi/3-4\pi=-6\pi/3 \\
k=-3 & \mu(AM)=2\pi/3-6\pi=-16\pi/3 \\
k=-4 & \mu(AM)=2\pi/3-8\pi=-22\pi/3 \\
 & \vdots \\
k=-n & \mu(AM)=2\pi/3-2n\pi=(2-6n)\pi/3
\end{array}
$$

2.3 Arcos Côngruos

Dois arcos trigonométricos são ditos côngruos, quando a diferença entre eles é um número múltiplo de 360°. Assim é que sendo x e y dois arcos trigonométricos, eles serão côngruos se e somente se: $x - y = k \ . \ 360°$, onde k é um número inteiro. Portanto, para descobrir se dois arcos são côngruos, basta verificar se a diferença entre eles é um múltiplo de 360° (ou 2π radianos, pois $2\pi rad = 360°$).

Obs. Arcos de uma mesma família são côngruos.

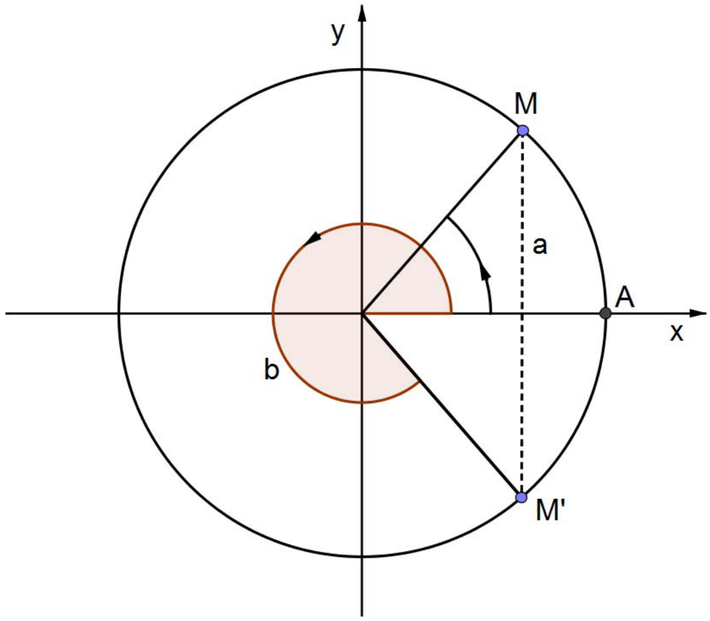
Exemplo:

Os arcos 2780° e 1700°, são côngruos, pois:

$2780° - 1700° = 1080°$ e 1080° é divisível por 360° (1080° / 360° = 3).

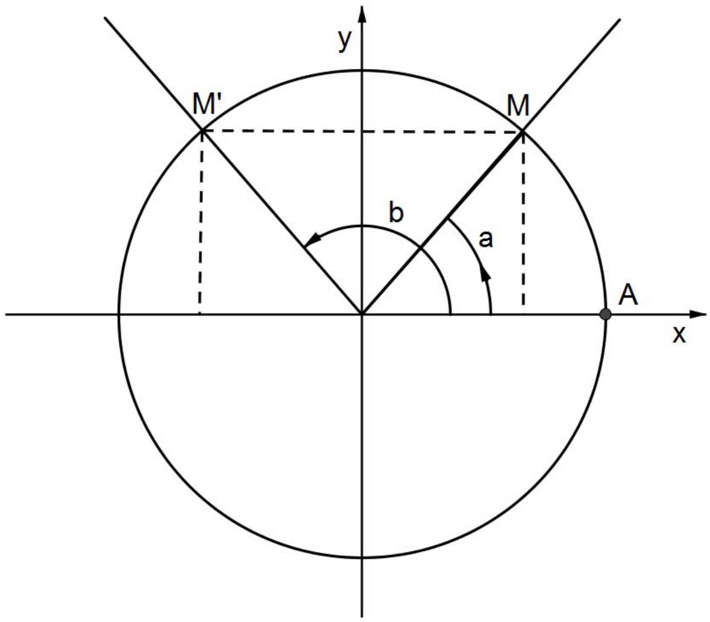
2.4 Arcos de mesma origem, simétricos em relação ao eixo OX

Sejam AM e AM' arcos no círculo trigonométrico, com $A = (1, 0)$ e os pontos M e M' simétricos em relação ao eixo horizontal OX. Se a medida do arco AM é igual a m, então a medida do arco AM' é dada por: $\mu(AM') = 2\pi - m$.



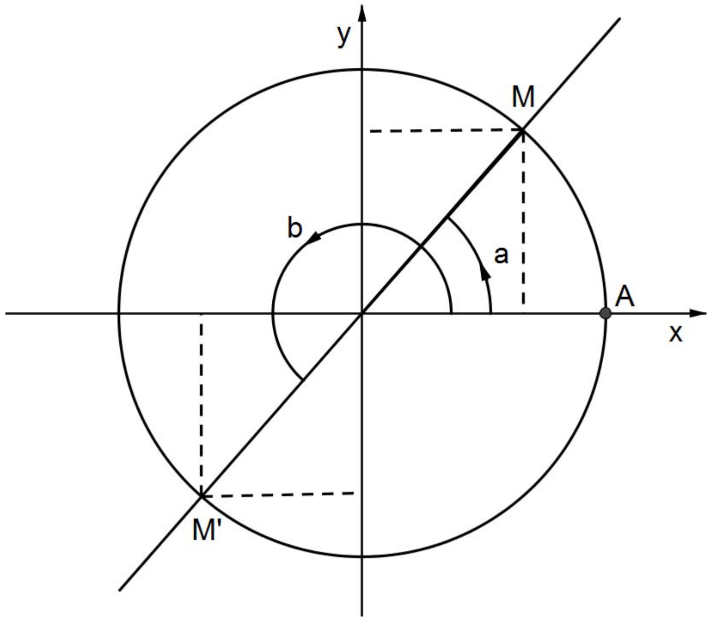
2.5 Arcos de mesma origem, simétricos em relação ao eixo OY

Sejam AM e AM' arcos no círculo trigonométrico, com $A = (1, 0)$ e os pontos M e M' simétricos em relação ao eixo vertical OY. Se a medida do arco AM for igual a m, então a medida do arco AM' será dada pela expressão $\mu(AM') = \pi - m$.



2.6 Arcos com a mesma origem e extremidades simétricas em relação à origem

Sejam AM e AM' arcos no círculo trigonométrico, com $A = (1, 0)$ e os pontos M e M' simétricos em relação a origem $(0, 0)$. Se a medida do arco AM é igual a m, então a medida do arco AM' é dada por: $\mu(AM') = \pi + m$.



Capítulo 3

Funções Trigonométricas

3.1 Conceitos Iniciais

3.1.1 Funções circulares

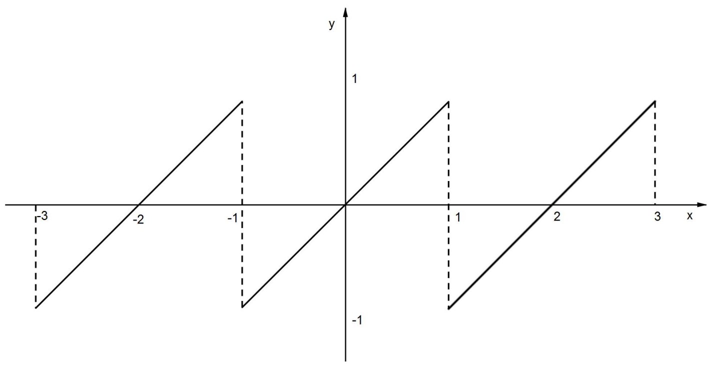
As funções circulares constituem o objeto fundamental da trigonometria circular e são importantes devido à sua periodicidade pois elas podem representar fenômenos naturais periódicos, como as variações da temperatura terrestre, o comportamento ondulatório do som, a pressão sanguínea no coração, os níveis de água dos oceanos, etc.

3.1.2 Função periódica

Dizemos que uma função $f(x)$ é periódica se existe um número real $T \neq 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$.

O número T é chamado período da função $f(x)$. O gráfico de uma função periódica se repete a cada intervalo de comprimento T.

Exemplos de gráficos de funções periódicas são observadas nas Figuras abaixo:



3.1.3 Função limitada

Uma função f de domínio A contido em $\mathbb{R}$ é limitada, se existe um número real positivo L, tal que para todo x em A, valem as desigualdades:

$$-L \leq f(x) \leq L$$

Esta última expressão pode ser escrita como:

$$|f(x)| \leq L.$$

3.1.4 Função par

Uma função f é uma função par, se para todo x do domínio de f:

$$f(-x) = f(x)$$

Funções pares são simétricas em relação ao eixo vertical OY.

Exemplo:

A função $f(x) = x^2$, pois: $f(-x) = (-x)^2 = x^2$.

3.1.5 Função ímpar

Uma função f é uma função ímpar, se para todo x do domínio de f:

$$f(-x) = -f(x)$$

Funções ímpares são simétricas em relação à origem $(0, 0)$ do sistema de eixos cartesiano.

Exemplo:

A função $f(x) = x$ é uma função par, pois $f(-x) = -x = -f(x)$.

3.2 Função seno

Definição 3.2.1. Chamamos de função seno , a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, a cada número real x, associa o seno desse número.

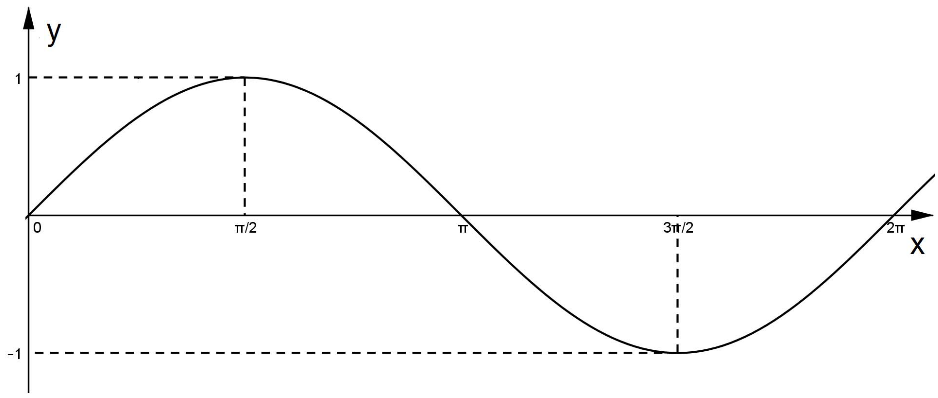
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x$$

A função é denotada por $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ ou $y = \operatorname{sen}(x)$.

Gráfico 3.2.2. O gráfico da função $f(x) = \operatorname{sen} x$, denomina-se **senóide**. Para construir o gráfico da função, atribuímos valores para x e encontramos $f(x)$. Segue uma tabela com valores de f no intervalo $[0, 2\pi]$.

x	$y = \operatorname{sen} x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	-1
2π	0



onde:

Dom: $\mathbb{R}$

Im : $[-1, 1]$

$P = 2\pi rad$ (A função seno é periódica, pois: $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = senx$.)

Crescente: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Decrescente: $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$

Limitada: $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

Ímpar : $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x)$

Para todo x em $\mathbb{R}$ e para todo k em Z:

$$\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x + 4\pi) = \ldots = \operatorname{sen}(x + 2k\pi)$$

Completamos o gráfico da função seno, repetindo os valores da tabela em cada intervalo de medida 2π, teremos:

Intervalo	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{\pi}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
Função seno	positiva	positiva	negativa	negativa

3.3 Função Cosseno

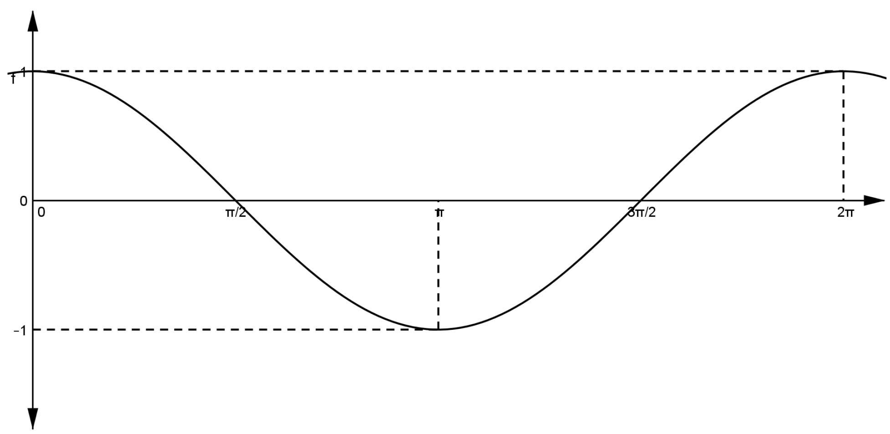
Definição 3.3.1. Chamamos de função cosseno , a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que, a cada número real x, associa o cosseno desse número.

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = \cos x$$

A função é denotada por $f(x) = \cos(x)$ ou $y = \cos(x)$.

Gráfico 3.3.2. O gráfico da função $f(x) = \cos x$, denomina-se **cossenóide**. Para construir o gráfico da função, atribuímos valores para x e encontramos $f(x)$, conforme a tabela abaixo.

x	$y = \cos x$
0	1
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-1
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	1



onde:

Dom: $\mathbb{R}$

Im : $[-1,1]$ $P = 2\pi rad$ (A função cosseno é periódica, pois: $\cos(x+2\pi) = \cos x$.)

Crescente: $[\pi, 2\pi]$

Decrescente: $[0, \pi]$

Limitada: $-1 \leq \cos x \leq 1$

Par : $\cos(-x) = \cos x$

Completamos o gráfico da função cosseno, repetindo os valores da tabela em cada intervalo de medida 2π, teremos:

Sinal

Intervalo	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{\pi}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
Função cosseno	positiva	negativa	negativa	positiva

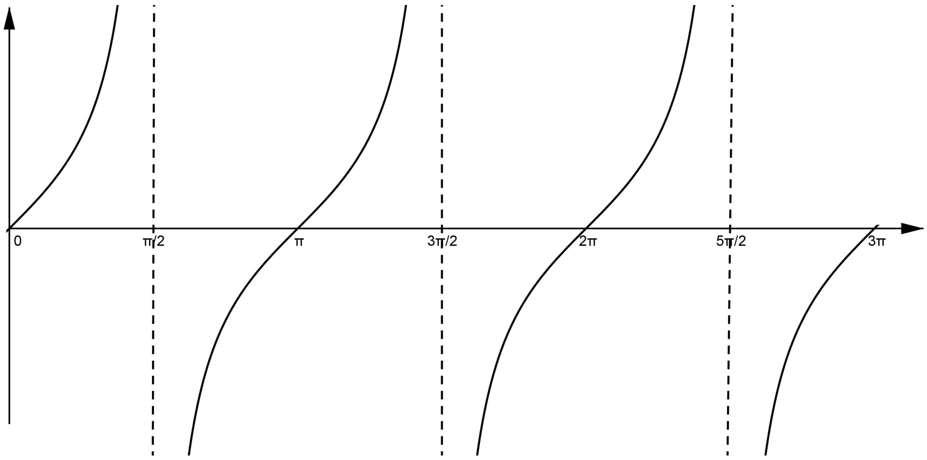
3.4 Função tangente

Definição 3.4.1. Chama-se função tangente aquela que associa a todo x real, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, o número real $y = \tan x$.

A função é denotada por $f(x) = \tan x$ ou $y = \tan x$.

Gráfico 3.4.2. O gráfico da função tangente é chamado de **tangentóide**, para construir o gráfico da função, atribuímos valores para x e encontramos $f(x)$. Como a tangente não existe para arcos da forma: $k\pi + \frac{\pi}{2}$ onde $k \in Z$, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores, conforme a tabela abaixo.

x	$y = \tan x$
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\notin$
π	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\notin$
2π	0



onde: Dom: $\left\{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right\}$

Im : $\mathbb{R}$

$P = \pi rad$ (A função tangente é periódica, pois: $\tan(x+\pi) = \tan x$.)

Sempre Crescente.

Limitação: A função tangente não é limitada

A função tangente é ímpar, pois para todo x real onde a tangente está definida, tem-se que: $\tan(x) = -\tan(-x)$

Observação 3.4.1. Para os arcos da forma $K\pi + \dfrac{\pi}{2}$ a função tangente não é definida, apresentando nesses pontos assíntotas verticais.

Observação 3.4.2. Na figura anterior, temos que:

$$\tan AM = \tan x = \overline{AT}$$

pela semelhança dos triângulos retângulos ONM e OAT, assim:

$$\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{NM}}{\overline{ON}} \quad \text{mas,} \quad \overline{AT} = \tan x,$$

$\overline{OA} = r = 1$, $\overline{NM} = \operatorname{sen} x$ e $\overline{OQ} = \cos x$

Substituindo na expressão $\dfrac{\tan x}{1} = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, teremos:

$\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$, onde $x \neq K\pi + \dfrac{\pi}{2}$

Completamos o gráfico da função tangente, repetindo os valores da tabela na mesma ordem em que se apresentam, teremos:

Intervalo	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{\pi}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
Função tangente	positiva	negativa	positiva	negativa

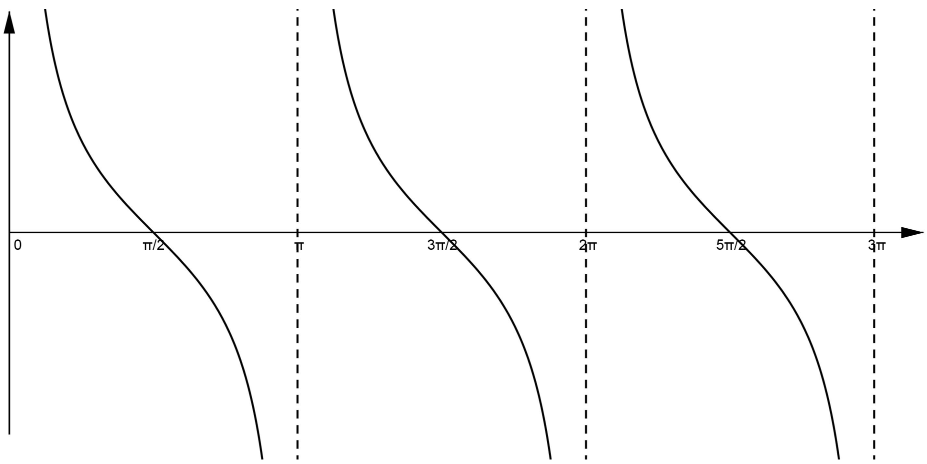
3.5 Função cotangente

Definição 3.5.1. Chama-se função cotangente aquela que associa a todo x real, $x \neq k\pi$, o número real $y = \cot x$.

A função é denotada por $f(x) = \cot x$ ou $y = \cot x$.

Gráfico 3.5.2. O gráfico da função cotangente é chamado de **cotangentóide**, para construir o gráfico da função, atribuímos valores para x e encontramos $f(x)$. Como a cotangente não existe para arcos da forma: $k\pi$, onde $k \in Z$, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores, conforme a tabela abaixo.

x	$y = \cot x$
0	$\notin$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	$\notin$
$\frac{3\pi}{2}$	0
2π	$\notin$



onde: Dom:$\{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi\}$ Im : $\mathbb{R}$

$P = \pi rad$ (A função tangente é periódica, pois: $\cot(x + \pi) = \cot x$.)

Sempre Decrescente.

Limitação: A função tangente não é limitada.

A função tangente é ímpar, pois para todo x real onde a tangente está definida, tem-se que: $\cot(x) = -\cot(-x)$

Observação 3.5.1. Para os arcos da forma $K\pi$ a função tangente não é definida, apresentando nesses pontos assíntotas verticais.

Observação 3.5.2. Por analogia ao que foi feito na tangente, podemos mostrar que $\cot = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \dfrac{1}{\tan x}$

Completamos o gráfico da função cotangente, repetindo os valores da tabela na mesma ordem em que se apresentam, teremos:

Sinal:

Intervalo	$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	$\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \frac{3\pi}{\pi}\right]$	$\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
Função cotangente	positiva	negativa	positiva	negativa

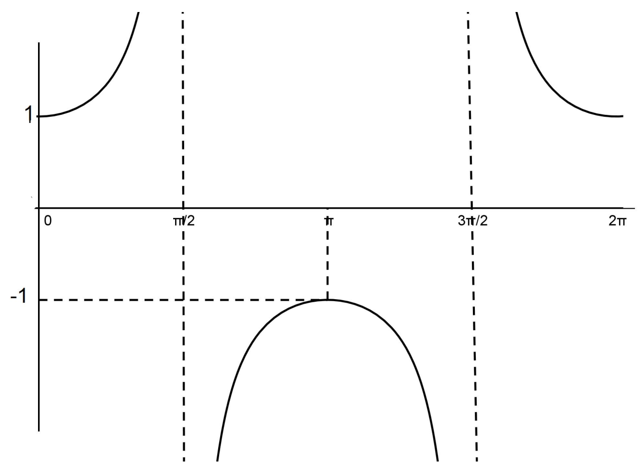
3.6 Função secante

Definição 3.6.1. Chama-se função secante aquela que associa a todo x real, $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, o número real $y = \sec x$.

A função é denotada por $f(x) = \sec x$ ou $y = \sec(x)$

Gráfico 3.6.2. Para construir o gráfico da função, atribuímos valores para x e encontramos $f(x)$. Como a secante não existe para arcos da forma: $k\pi + \dfrac{\pi}{2}$ onde $k \in Z$, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores, conforme a tabela abaixo.

x	$y = \sec x$
0	1
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	$\notin$
$\frac{3\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
π	-1
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	$\notin$
$\frac{7\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
2π	1



onde:

Dom: $\{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$

Im : $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$P = 2\pi rad$

Crescente: $[0, \pi]$

Decrescente: $[\pi, 2\pi]$

Limitação: A função secante não é limitada

A função secante é par, pois para todo x real onde a secante está definida, tem-se que:

$\sec x = \sec(-x)$

Observação 3.6.1. Para os arcos da forma $K\pi + \frac{\pi}{2}$ a função secante não é definida, apresentando nesses pontos assíntotas verticais.

Observação 3.6.2. Por analogia ao que foi feito na tangente, podemos mostrar que $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Completamos o gráfico da função secante, repetindo os valores da tabela na mesma ordem em que se apresentam, teremos:

Sinal

Intervalo	$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$	$\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \dfrac{3\pi}{\pi}\right]$	$\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
Função secante	positiva	negativa	negativa	positiva

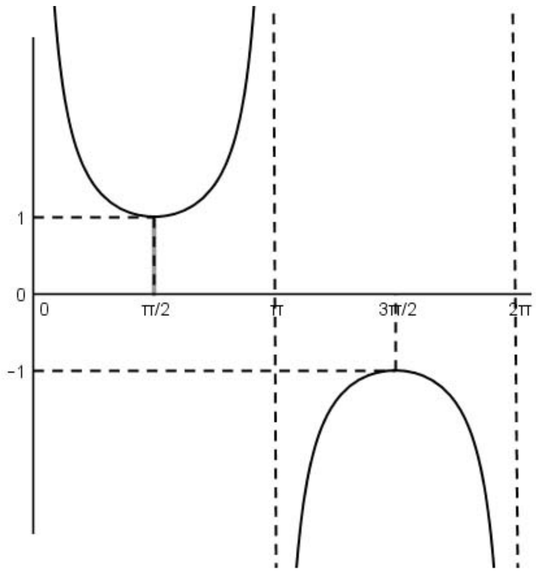
3.7 Função cossecante

Definição 3.7.1. Chama-se função cosssecante aquela que associa a todo x real, $x \neq k\pi$, o número real $y = \text{cossec}(x)$.

A função é denotada por $f(x) = \text{cossec}(x)$ ou $y = \text{cossec}(x)$

Gráfico 3.7.2. Para construir o gráfico da função, atribuímos valores para x e encontramos $f(x)$. Como a secante não existe para arcos da forma: $k\pi$ onde $k \in Z$, estaremos considerando o conjunto dos números reais diferentes destes valores, conforme a tabela abaixo.

x	$y = \sec x$
0	$\notin$
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{2}$	1
$\frac{3\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
π	$\notin$
$\frac{5\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
$\frac{3\pi}{2}$	1
$\frac{7\pi}{4}$	$-\sqrt{2}$
2π	$\notin$



onde: Dom:$\{x \in \mathbb{R}/x \neq k\pi\ k \in \mathbb{Z}\}$

Im : $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Período $= 2\pi rad$

Crescente: $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \cup \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

Decrescente: $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$

Limitação: A função cossecante não é limitada.

A função cossecante é ímpar, pois para todo x real onde a cossecante está definida, tem-se que: $\text{cossec}(-x) = -\text{cossec}(x)$

Observação 3.7.1. Para os arcos da forma $K\pi$ a função cossecante não é definida, apresentando nesses pontos assíntotas verticais.

Observação 3.7.2. Por analogia ao que foi feito na cotangente, podemos mostrar que $\text{cossec}x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Completamos o gráfico da função secante, repetindo os valores da tabela na mesma ordem em que se apresentam, teremos:

Sinal

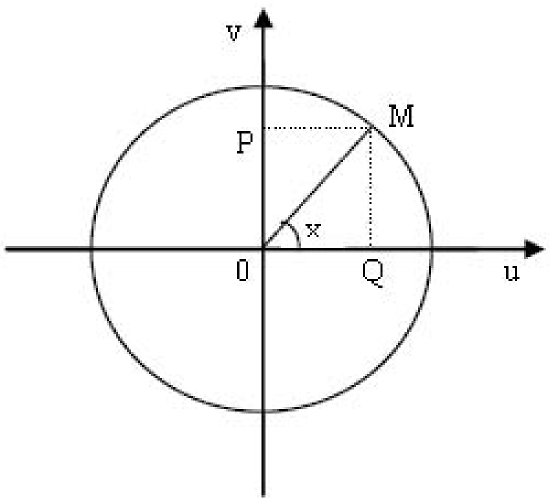
Intervalo	$\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$	$\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$	$\left[\pi, \dfrac{3\pi}{\pi}\right]$	$\left[\dfrac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$
Função secante	positiva	positiva	negativa	negativa

Capítulo 4

Relações Trigonométricas

4.1 Relações Trigonométricas Fundamentais

Seja a figura:



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo OQM, temos:

$$(\overline{QM})^2 + (\overline{OQ})^2 = (\overline{OM})^2$$

como:

$\overline{QM} = \overline{OP} = \operatorname{sen} x$

$\overline{OQ} = \cos x$

$\overline{OM} = r = 1$, temos a relação trigonométrica fundamental nº 01:

Dividindo a relação fundamental 01 por $\operatorname{sen}^2(x)$ e por $\cos^2(x)$ e aplicando os conceitos de tangente, cotangente, secante e cossecante, teremos outras duas relações fundamentais, a saber:

$$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x \quad \text{e} \quad \text{cotan}^2 + 1 = \text{cossec}^2 x$$

Exemplo 4.1.1. Simplifique a expressão $\dfrac{\text{cossec} x - \operatorname{sen} x}{\text{cotan } x - \sec x}$

Solução:

Utilizando os conceitos vistos, temos:

$$\frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x}{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}} = \frac{\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}} = 1 - \operatorname{sen}^2 x = \cos^2 x$$

Exemplo 4.1.2. Sendo x um arco tal que $\cos x = \tan x$, calcule $\operatorname{sen} x$.

Solução:

Sabemos que $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Substituindo $\tan x$ por $\cos x$ (dado do problema), vem: $\cos x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$ donde vem: $\cos^2 x = \operatorname{sen} x$.

Mas, $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. Substituindo, fica: $1 - \operatorname{sen}^2 x = \operatorname{sen} x$.

Daí, vem: $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0$.

Fazendo $\operatorname{sen} x = y$ e substituindo: $y^2 + y - 1 = 0$. Resolvendo esta equação do 2º grau, fica:

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-1)}}{2.1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Como $y = \operatorname{sen} x$ e , temos somente um dos valores acima satisfazendo o problema, ou seja: $\operatorname{sen} x = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$, que é a resposta procurada.

4.2 Identidades Trigonométricas

Uma igualdade entre expressões trigonométricas é chamada Identidade, quando a igualdade é satisfeita para todos os valores que pertencem aos domínios das funções que envolvem.

Para provarmos uma identidade trigonométrica, podemos proceder de duas maneiras:

Tomando um dos membros (geralmente o mais "complicado") transformando-o no outro.

Tomando os dois membros e transformando simultaneamente em expressões iguais.

Exemplo 4.2.1. 1. $\cos^4 x - \operatorname{sen}^4 x + 2 \operatorname{sen}^2 x = 1$

2. $(1+\tan x)^2 + (1-\tan x)^2 = 2\sec^2 x$

3. $\dfrac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \dfrac{\sec x}{1+\cos x}$

4.3 Operações com Arcos

Conhecidas as linhas trigonométricas dos arcos a e b, determinaremos as funções circulares dos arcos da forma $a+b$, $a-b$, $2.a$ e $\dfrac{a}{2}$.

Fórmulas de Adição e Subtração de arcos

1. $\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

2. $\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

3. $\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

4. $\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

5. $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$

6. $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$

4.4 Arco Duplo

Fazendo $a = b$ nas fórmulas da soma, vem:

1. $\cos(2a) = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$

2. $\operatorname{sen}(2a) = 2 \operatorname{sen} a \cdot \cos a$

3. $\tan(2a) = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$

Obs. A fórmula acima somente é válida para $\tan a \neq 1$ e $\tan a \neq -1$, já que nestes casos o denominador seria nulo.

4.5 Arco Metade

Vamos agora achar as funções trigonométricas da metade de um arco, partindo das anteriores.

4.5.1 Cosseno do arco metade

Sabemos que:

$$\cos 2a = \cos^2 a - \operatorname{sen}^2 a$$

Substituindo $\operatorname{sen}^2 a$, por: $1 - \cos^2 a$ e $\operatorname{sen}^2 a + \cos^2 a$ por 1, vem: $\cos 2a = 2.cos^2 a - 1$, isolando $\cos^2 a$ temos que $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$

Fazendo $a = \dfrac{x}{2}$, vem, $\cos^2\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{1 + \cos x}{2}$. Podemos escrever então a fórmula do cosseno do arco metade como:

- $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

4.5.2 Seno do arco metade

De maneira análogo, obtemos o seno e do arco metade.

- $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

4.5.3 Tangente do arco metade

Dividindo membro membro as equações anteriores, lembrando que $\tan\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}{\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)}$, vem:

- $\tan \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{1 + \cos x}}$

Obs: o sinal algébrico de cada expressão, vai depender do quadrante ao qual pertence o arco $x/2$.

4.6 Transformação de somas em Produto

Veremos nesta seção transformações de expressões da forma $\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q$ e $\cos p \pm \cos q$, em produto, cujas fórmulas são de grande importância nas simplificações de expressões trigonométricas.

Já sabemos que:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(a+b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a \\ \operatorname{sen}(a-b) &= \operatorname{sen} a \cdot \cos b - \operatorname{sen} b \cdot \cos a \end{aligned}$$

Fazendo: $\begin{cases} a+b=p \\ \\ a-b=q \end{cases}$, temos $\begin{cases} a=\dfrac{p+q}{2} \\ \\ b=\dfrac{p-q}{2} \end{cases}$

Somando membro a membro estas igualdades, obteremos:

$\operatorname{sen}(a+b)+\operatorname{sen}(a-b)=2\cdot\operatorname{sen}a\cdot\cos b$. Daí:

- $\operatorname{sen}p+\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$

  Analogamente, obteríamos as seguintes fórmulas:

- $\operatorname{sen}p-\operatorname{sen}q=2\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}\cdot\cos\dfrac{p+q}{2}$

- $\cos p+\cos q=2\cos\dfrac{p+q}{2}\cdot\cos\dfrac{p-q}{2}$

- $\cos p-\cos q=-2\operatorname{sen}\dfrac{p+q}{2}\cdot\operatorname{sen}\dfrac{p-q}{2}$

4.7 Equações trigonométricas

Toda igualdade que possui uma ou mais funções trigonométricas em pelo menos um dos membros, recebe o nome de equações trigonométricas.

Exemplo 4.7.1. 1. $\operatorname{sen}x+\cos x=\dfrac{3}{4}$ e $\operatorname{sen}2x=\cos^2 x$ são equações trigonométricas.

2. $x+\tan(\frac{\pi}{6})=x^2$ e $x+\operatorname{sen}(\frac{\pi}{3})=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, não são equações trigonométricas.

Resolver uma equação trigonométrica consite em determinar os valores dos arcos que verificam a equação.

Dizemos que r é uma raiz ou solução da equação trigonométrica $f(x)=g(x)$ se r for elemento do domínio de f e g e se $f(r)=g(r)$ for verdadeira.

4.7.1 Equações Trigonométricas Fundamentais

Quase todas as equações trigonométricas, quando convenientemente tratadas e transformadas, podem ser reduzidas a pelo menos uma das três equações seguintes:

1. $\operatorname{sen}x=a$

2. $\cos x=a$

3. $\tan x = a$

Estas são as equações trigonométricas elementares ou equações trigonométricas fundamentais. As soluções destas equações podem ser resumidas no seguinte quadro:

1. $\operatorname{sen} x = a \Rightarrow \begin{cases} x = 2\pi \cdot k + m_1 \\ x = 2\pi \cdot k + m_2 \end{cases}$ para $-1 < a < 1$.

2. $\cos x = a \Rightarrow x = 2\pi \cdot k \pm m$ para $-1 < a < 1$

3. $\tan x = a \Rightarrow x = \pi \cdot k + m$

Capítulo 5

Funções circulares inversas

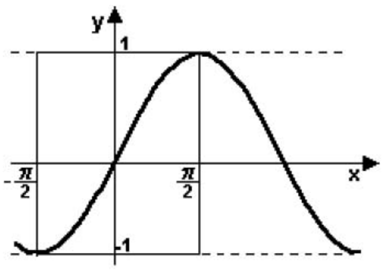
5.1 Considerações Iniciais

Sabemos que uma função f de domínio D possui inversa somente se f for bijetora. As funções circulares, conforme definidas, não são bijetoras, mas podemos tomar subconjuntos desses domínios para gerar novas função que possuam inversas.

Exemplo 5.1.1. A função $f(x) = \operatorname{sen} x$ não é bijetora em seu domínio de definição que é o conjunto dos números reais, pois para um valor de y correspondem infinitos valores de x, isto quer dizer que não podemos definir a inversa de $\operatorname{sen}(x)$ em seu domínio. Devemos então restringir o domínio para um subconjunto dos números reais onde a função é bijetora.

5.2 Função Arco-Seno

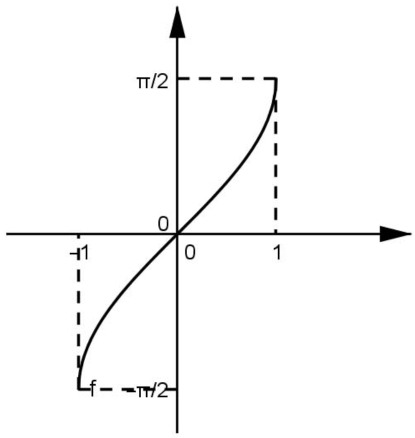
Consideremos a função $f(x) = \operatorname{sen} x$, com domínio no intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ e imagem no intervalo $[-1, 1]$.



A função inversa de f, denominada arco seno de x, definida por $f^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$ é denotada por $f^{-1}(x) = \operatorname{arcsen}(x)$.

Lê-se: “ o arco cujo seno é x”

Gráfico da função arco-seno: o gráfico da inversa é simétrico do gráfico de $y = \operatorname{sen} x$ em relação à bissetriz do 1º e 3º quadrantes.

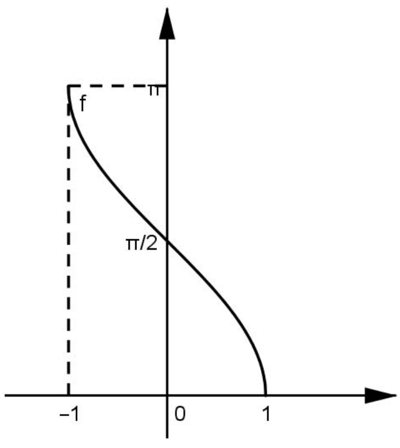


5.3 Função arco-cosseno

Seja a função $g(x) = \cos x$, com domínio $[0, \pi]$ e imagem $[-1, 1]$. De modo análogo ao estudo da função seno, podemos definir a função de f, denominada arco-cosseno de x, definida por $g^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$ e denotada por: $g^{-1}(x) = \arccos(x)$.

Lê-se: “ o arco cujo cosseno é x”.

Gráfico da função arco-cosseno:

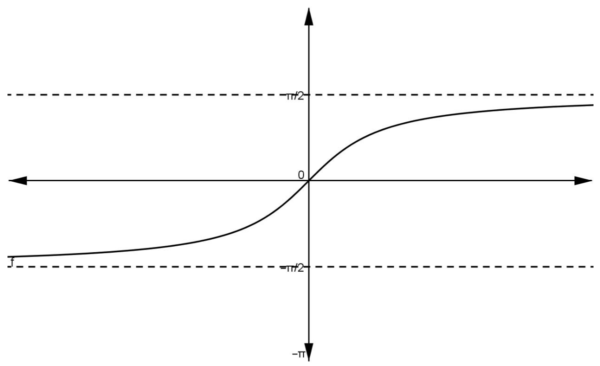


5.4 Função arco-tangente

Dada a função $f(x) = \tan(x)$, com domínio $(-\pi/2, \pi/2)$ e imagem em $\mathbb{R}$, a função inversa de f, denominada arco-tangente é definida por $f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ e denotada por: $f^{-1}(x) = \arctan(x)$.

Lê-se: " o arco cuja tangente é x".

Gráfico da função arco-tangente:

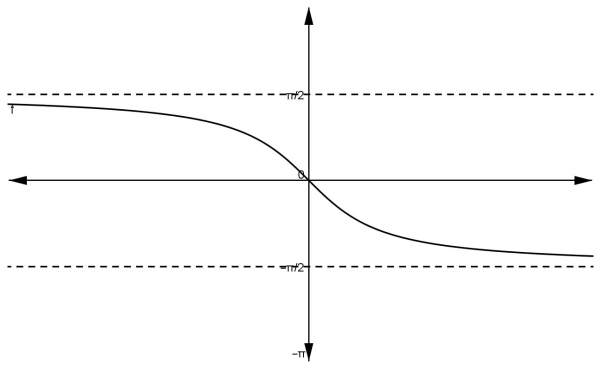


5.4.1 Função arco-cotangente

Dada a função $f(x) = \operatorname{cotan} x$, com domínio $(0, \pi)$ e imagem em $\mathbb{R}$, a função inversa de f, denominada arco-cotangente é definida por $f^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)$ e denotada por: $f^{-1}(x) = \operatorname{arccot}(x)$.

Lê-se: " o arco cuja cotangente é x".

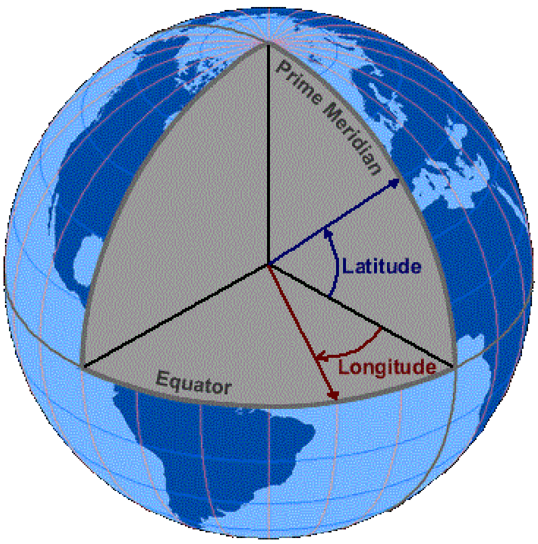
Gráfico da função arco-cotangente:



Capítulo 6

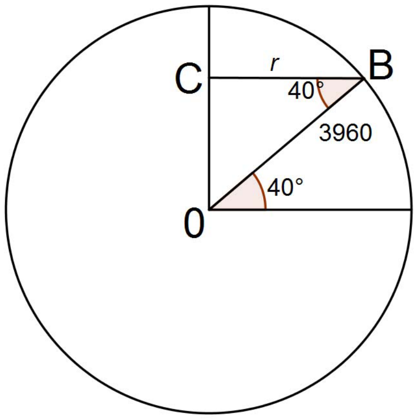
Aplicações

Aplicação 6.1. A figura abaixo representa o planeta terra, onde cada ponto pode ser representado por coordenas geográficas expressas por uma latitude e longitude. A latitude é o arco de meridiano compreendido entre o Equador e o paralelo de um lugar. É medido ao longo de um meridiano, de 0° a 90° para o norte e sul do Equador e a longitude é o arco de paralelo com Equador, compreendido entre meridiano de Greenwich e o meridiano de um lugar.



Considere a Terra como uma esfera de raio 3960 milhas, determine o raio e a tangente do paralelo de latitude 40°.

Observe a figura.



Solução

$$\cos 40° = \frac{r}{3960}$$

$$r = 3960 \times \cos 40°$$

$$r = 3960 \times 0,7660$$

$$r = 3033 \text{ milhas}$$

$$\text{sen}\, 40° = \frac{\overline{OC}}{3960}$$

$$\overline{OC} = 3960 \times \text{sen}\, 40°$$

$$\overline{OC} = 3960 \times 0,6428$$

$$\overline{OC} = 2545 \text{ milhas}$$

$$\tan 40° = \frac{\overline{OC}}{r}$$

$$\tan 40° = \frac{2545}{3033}$$

$$\tan 40° = 0,8391 \text{ milhas}$$

Aplicação 6.2. Encontre o perímetro de um octógono inscrito em uma circunferência de $150cm$ de raio.

Na figura, dois vértices consecutivos do octógono, A e B, são unidos ao centro O da circunferência. O triângulo OAB é isósceles com lados congruentes medindo 150 e o ângulo $AOB = 360°/8 = 45°$. Como no problema 4.9, traçamos a bissetriz do ângulo AOB, formando o triângulo MOB.

Então, $MB = OB \operatorname{sen} \angle MOB = 150 \operatorname{sen} 22°30' = 150(0,3827) = 57,4$. O perímetro do octógono é $16MB = 16(57,4) = 918cm$.

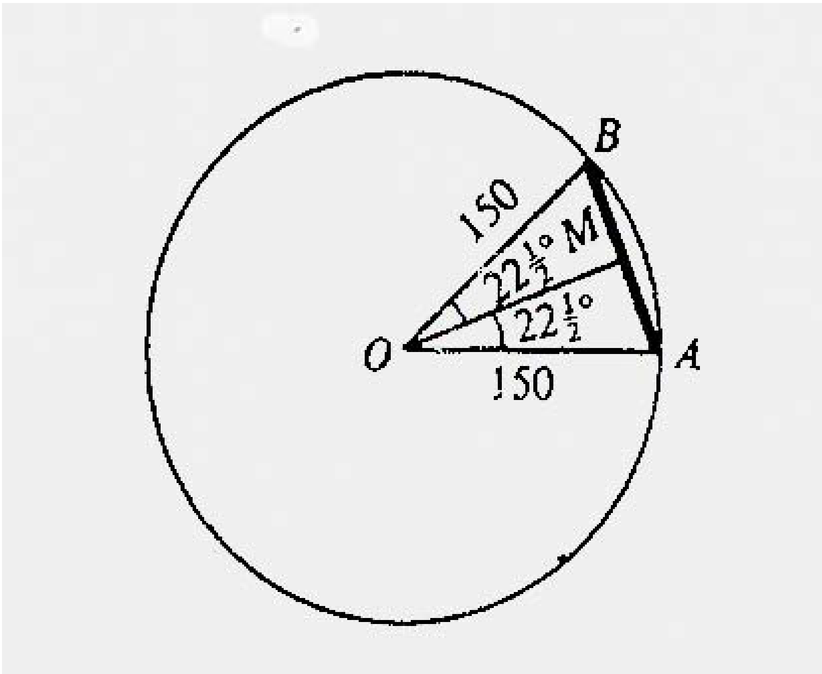


Figura 6.1: 2

Aplicação 6.3. A figura ilustra um avião voando a 240 Kt com proa de 60° com o vento de 30 Kt de 330°.

Para construir essa figura, colocamos o vetor velocidade no ar em O, então, em seu ponto final (observe as direções dos vetores) representamos o vetor velocidade do ar e fechamos o triângulo. Observe que o vetor velocidade de solo não tem mesma direção ou mesmo módulo que o vetor velocidade no ar.

Nesse triângulo temos:

Velocidade de solo $= \sqrt{(240)^2 + (30)^2} = 242\text{Kt}$

$\tan\theta = 30/240 = 0,1250$ e $\theta = 7°10'$

Rota $= 60° + \theta = 67°10'$

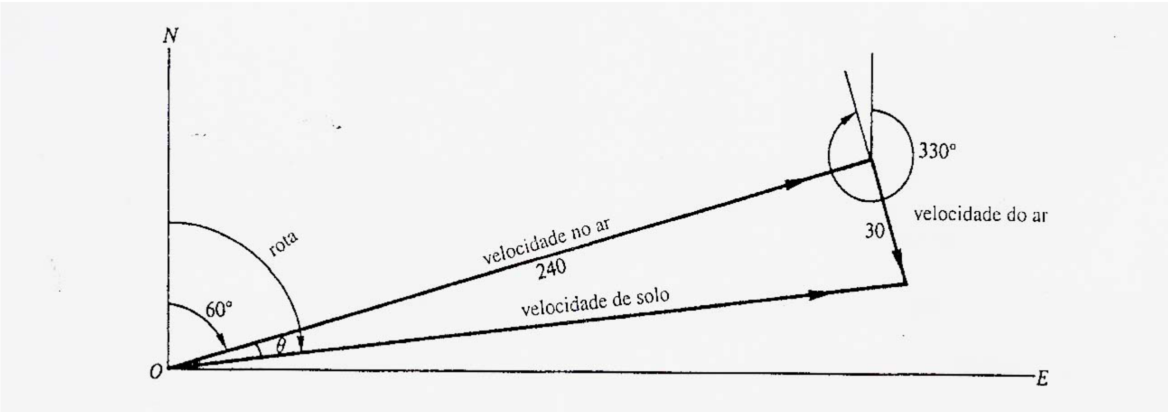


Figura 6.2: 3

Aplicação 6.4. A proa de um avião é $75°$ e a velocidade no ar é de 200 Kt. Determine a velocidade de solo sabendo que há um vento e 40 Kt vindo de $165°$. Observe a figura.

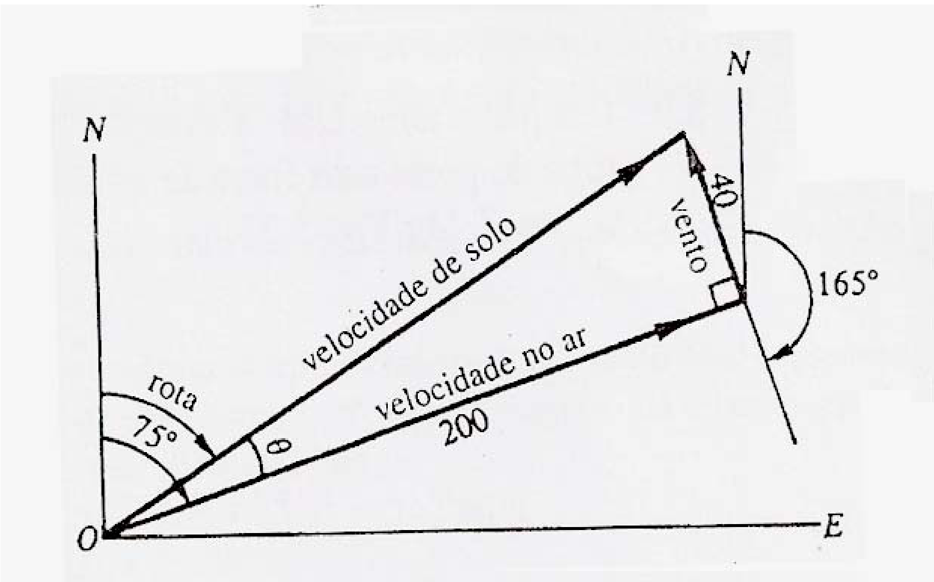


Figura 6.3: 4

Construção: Represente o vetor no ar começando em um ponto O, no final deste vetor represente o vetor velocidade e feche o triângulo.

Solução: Velocidade de solo $= \sqrt{(200)^2 + (40)^2} = 240Kt$, $\tan\theta = 40/200 = 0,2000$; assim, $\theta = 11°20$ e a rota é $75° - \theta = 63°40'$.

Aplicação 6.5. A velocidade no ar de um avião é 200km/h. Há um vento de 30 km/h vindo de 270°. Determine a proa na velocidade de solo para se ter uma rota de 0°. Observe a Figura.

Construção: A velocidade no solo é na direção de ON. Represente o vetor velocidade do vento em O e, em seu ponto final, represente o vetor velocidade no ar com módulo de 200 e feche o triângulo.

Solução: Velocidade de solo $= \sqrt{(200)^2 - (30)^2} = 198km/h$, $\operatorname{sen}\theta = 30/200 = 0,1500$ e $\theta = 8°40'$. A proa é de $360° - \theta = 351°20'$.

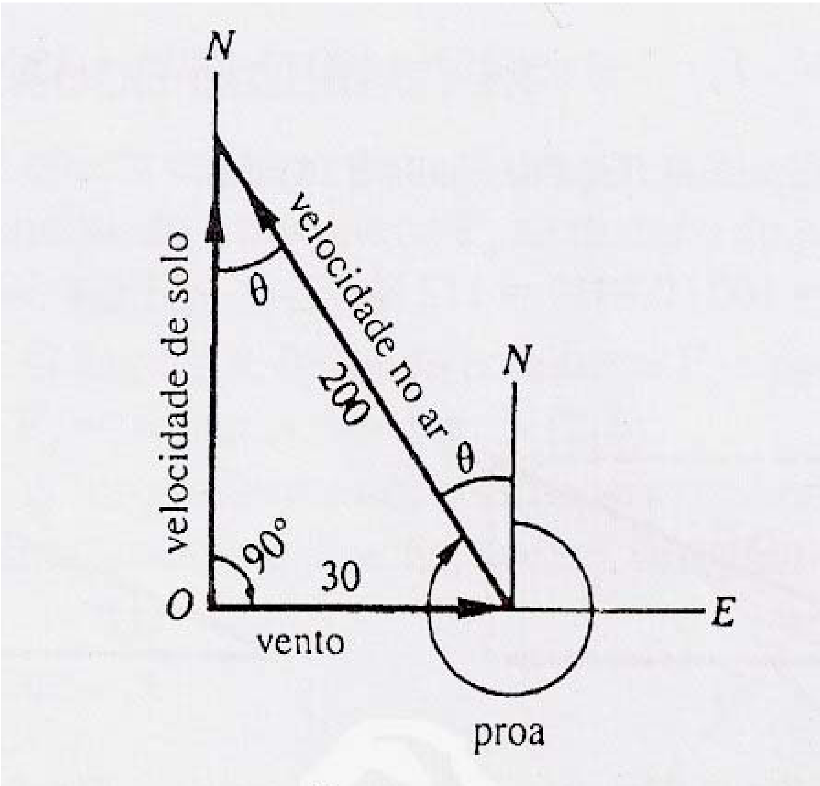
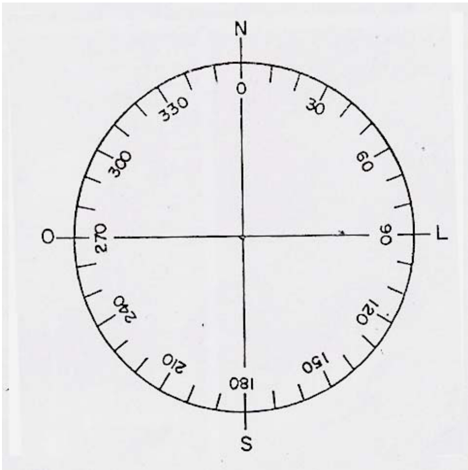
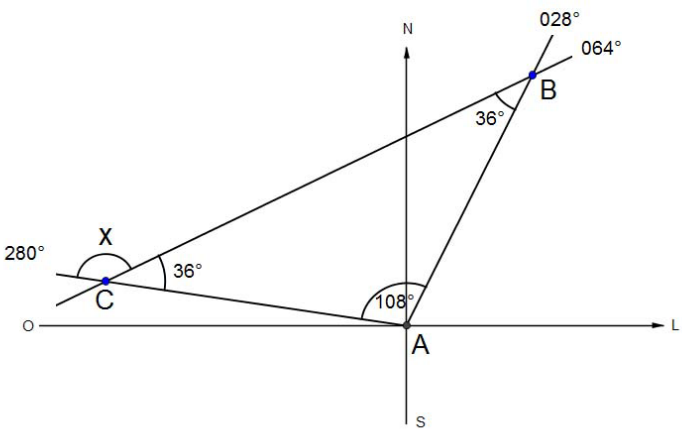


Figura 6.4: 5

Aplicação 6.6. Um piloto decola de certa cidade A com seu avião, devendo alcançar a cidade B após duas horas de vôo na rota 28° (ver bússula). Porém, duas horas após a decolagem, o piloto notou que, por engano, tinha tomado a rota 280° e sobrevoo para a cidade C. Supondo que a aeronave voou a uma velocidade media de 400kt e possuia uma autonomia total de 4h e 30mim. Determine o rumo e a distância da cidade C para a cidade B e analíse se o combustível é o suficiente para que aeronave pouse na cidade B com segurança.
(Adote 1kt = 1,85 km)





Solução

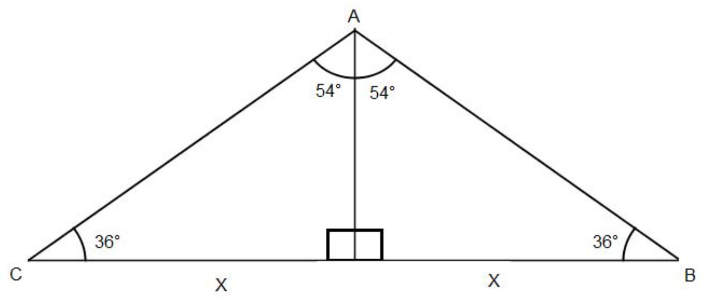
V = 400 kt = 740 km/h

T = 2 h

S = V.T =400 × 2 = 800NM

Como BAC é um triângulo isósceles, logo $AB = AC = 800\text{NM} = 1480\text{km}$; como $x + 36 = 180$ um ângulo raso, logo $x = 144°$.

Para voar do ponto C para o ponto B a aeronave poderia curvar 144° para a direita ou 216° pela esquerda, onde voaria no rumo 064 para a cidade B. $\operatorname{sen} 54° = \dfrac{x}{AC}$



$x = AC. \operatorname{sen} 54°$

$x = 800NM \times 0,8090 = 647,21NM$

ou

$x = 647,21NM \times 1,85 = 1.193,3km$

Como $BC = 2x$, logo $2 \times 647,21NM$ então

$BC = 1.294,42NM$ ou $BC = 2.394,6km$

Agora vamos achar o tempo de voo de C para B.

$$\Delta V = \frac{\Delta S}{\Delta T} \Rightarrow \Delta T = \frac{\Delta S}{\Delta V} = \frac{2.394,6}{740} = 3h\,14mim.$$

Como a autonomia da aeronave era de 4h e 30mim e já havia consumido duas horas de combustível no trecho AC, logo não chegaria no ponto B partindo de C.

Referências Bibliográficas

[1] GIOVANNI, José Ruy; BONFORNO, José Roberto. *Matemática, Uma nova abordgem.* 2º ano.

[2] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. *Um Curso de Cálculo Vol. 1* 5 ed. São Paulo, 2008.

[3] LEZZI, Gelson *Fundamentos de Matemática Elementar* Vol. 3 , Ed. Atual, 2004.

[4] MOYER, Roberto E. *Teoria e Problemas de Trigonometria* 3.Ed. Porto Alegre: Bookman, 2003.

[5] WAGNER, Eduardo; MORGADO, Augusto Cesar de Oliveira; CARMO, Manfredo Persigão do *Trigonometria e Números Complexos.* SBM.