Universidade Federal do Pará - UFPA

Instituto de Ciências Exatas e Naturais - ICEN

Curso de Licenciatura em Matemática

Isometrias no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Andrey César Fortuna Ribeiro

Belém - PA

2013

Universidade Federal do Pará

Instituto de Ciências Exatas e Naturais
Curso de Licenciatura em Matemática

Isometrias no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Discente: Andrey César Fortuna Ribeiro.

Docente: Prof. Dr. José Antônio Moraes Vilhena.

Trabalho de Conclusão de Curso orientado pelo Prof. Dr. José Antônio Moraes Vilhena e apresentada à Universidade Federal do Pará, como parte dos requisitos necessários para a conclusão do curso de Licenciatura em Matemática.

Belém - PA

2013

Certificado de Avaliação

Andrey César Fortuna Ribeiro.

Isometrias no $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado como requisito parcial para obtenção do título de licenciada em Matemática, pela Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará, julgado pela seguinte banca examinadora.

Orientador: Prof. Dr. José Antonio Moraes Vilhena.

Membros:

Faculdade de Matemática - UFPA

Faculdade de Matemática - UFPA

Faculdade de Matemática - UFPA

Belém - Pará

2013

Dedico a toda minha familia, e em especial ao meu pai Aguinaldo César Prestes Ribeiro, a minha mãe Angela Maria Fortuna Ribeiro e meu irmão Arleson César Fortuna Ribeiro.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus, acima de tudo pelas oportunidades que me são oferecidas, pois sem ele nada seria possível.

A Universidade Federal do Pará, que muito contribui para minha formação acadêmica, assim como todo seu corpo docente, em especial ao meu orientador, prof. Dr. José Antonio Moraes Vilhena, pela sua orientação.

Agradeço a minha família, especialmente ao meu pai Aguinaldo César Prestes Ribeiro e mãe Angela Maria Fortuna Ribeiro. E a todos os meus colegas do curso que me ajudaram direta e indiretamente, o meu muito obrigado.

Obrigado a todos!!!

“A geometria é uma ciência de todas as espécies possíveis de espaços.”

(Immanuel Kant)

Resumo

Neste trabalho fiz um estudo, por meio de pesquisa bibliográfica, de um tipo de transformação geométrica no plano e no espaço, a **isometria**, visando apresentar os seus resultados básicos e principalmente mostrar todos os tipos de isometrias existentes no plano e no espaço, sendo motivada pela curiosidade em verificar a possibilidade de se fazer um estudo completo das isometrias. Também foi abordado no mesmo, algumas propriedades da isometria em ambos os meios, fazendo com que percebamos que elas possuem certas importâncias, como encontrar caminhos diferentes na resoluções de alguns problemas de construções geométricas, de uma maneira geral, raciocinando sobre o plano e sobre o espaço, outra importância delas é que são importantes objetos de estudo em diversas áreas da matemática, como por exemplo, na Álgebra Linear, na Geometria Analítica, na Geometria Plana e na Geometria Projetiva e podemos destacar também a importância de podermos utiliza-la como uma importante ferramenta de demonstração.

Palavras-chave: Isometria. Plano. Espaço. Propriedades. Aplicações. Construções geometricas. Obejetos de estudo. Ferramenta de demonstração.

Abstract

In this paper did a study, by means of literature, a kind of geometric transformation in the plane and in space, **isometrics**, seeking to present their results mainly basic and show all kinds of isometries exist in the plan and space, being motivated by curiosity to verify the possibility of making a thorough study of isometries. Also discussed was the same, some properties and applications of isometry in both media, so that they realize they have certain amounts, such as finding ways in different resolutions some problems of geometrical constructions, in general, reasoning about plan and about space, another important one is that they are important objects of study in several areas of mathematics, for example, in Linear Algebra, in Analytical Geometry, in Plane Geometry and in Projective Geometry and we also highlight the importance we can use it as an important demonstration tool.

Keywords: Isometry. Plan. Space. Properties. Applications. Geometric constructions. Obejetos study. Demonstration tool.

Sumário

Capítulo 1

Preliminares

Para darmos início ao conteúdo a ser estudado, primeiramente tomaremos conhecimento de alguns conceitos básicos da Geometria Euclidiana, que nós necessitaremos para melhor entendimento ao estudo a ser seguido.

1.1 Conceitos básicos

Definição 1.1.1. *Sejam A e B dois pontos distintos, então definimos $\overrightarrow{AB} = \{P \in \overleftrightarrow{AB}; A - B - P\} \cup \overline{AB}$ e dizemos que $\overrightarrow{AB}$ é uma semireta com vértice A.*

Definição 1.1.2. *Seja r uma reta. Todo ponto $A \in r$ determina em r duas semiretas opostas σ_1 e σ_2, de modo que $\sigma_1 \cup \sigma_2 = r$ e $\sigma_1 \cap \sigma_2 = \{A\}$. Vamos denominar o ponto A de origem das duas semiretas.*

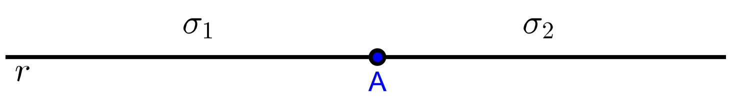


Figura 1.1: Determinação de duas semiretas

Definição 1.1.3. *Seja r uma reta. Dados três pontos distintos A, B e C sobre a reta r, diremos que C está entre A e B quando estes pertencerem a semiretas distintas de origem em C.*

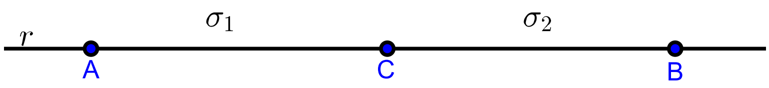


Figura 1.2: C está entre A e B

Definição 1.1.4. *Seja r uma reta. O conjunto de todos os pontos da reta r situados entre A e B, mais estes pontos, é denominado de segmento de reta AB.*

Em todo o texto, vamos usar a notação $\overline{AB}$ também como a medida do segmento de reta AB, ou seja, $\overline{AB} = \{A, B\} \cup \{X \in \overleftrightarrow{AB}; A - X - B\}$, onde sempre irá valer a seguinte desigualdade $\overline{AB} \geq 0$, e $\overline{AB} = 0$ somente acontecerá se, e somente se, $A = B$. Escreveremos também $d(A, B)$ em vez de $\overline{AB}$, quando quisermos nos referir da distância do ponto A ao ponto B.

Observação 1.1.1. *Quando $C \notin AB$ dizemos que A e B estão do mesmo lado de C, e quando $C \in AB$ dizemos que A e B estão de lados opostos de C.*

Definição 1.1.5. *Quando C está entre A e B ($C \in AB$), vale $\overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB}$ e quando C não está entre A e B ($C \notin AB$), vale $\overline{AB} = |\overline{AC} - \overline{BC}|$.*

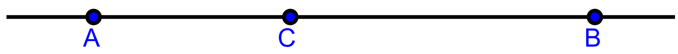


Figura 1.3: $C \in AB$

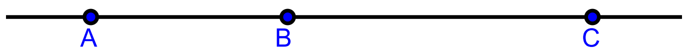


Figura 1.4: $C \notin AB$

Postulado 1.1.1 (Postulado da Régua). *Seja P um conjunto de pontos. A distância d entre os pontos A e B é uma aplicação $d : P \times P \to \mathbb{R}$ definida por*

$$\overline{AB} = |f(B) - f(A)|,$$

onde $f : r \to \mathbb{R}, f : A \mapsto f(A)$ é uma bijeção.

Teorema 1.1.1. *Dada a semireta* $\overrightarrow{AB}$ *então existe um único sistema de coordenadas* f *para* $\overleftrightarrow{AB}$ *tal que* $f(A) = 0$ *e* $\overrightarrow{AB} = \{P|f(P) \geq 0\}$.

Demonstração. Ver [2] pag. 87. □

Teorema 1.1.2. *Em uma semireta de origem em* A*, existe para cada número real* $d > 0$*, um único ponto* X *tal que* $\overline{AX} = d$.

Demonstração. Pelo Teorema 1.1.1 temos que $\overleftrightarrow{AB}$ tem um sistema de coordenadas f tal que $\overrightarrow{AB} = \{P|f(P) \geq 0\}$ e $f(A) = 0$. Para qualquer ponto $X \in \overrightarrow{AB}$, temos $f(X) = AX$. Dado um $d \in \mathbb{R}^+$ tal que $\overline{AX} = d$ e uma semireta de origem em A, mostraremos que X é o único ponto na semireta dada que acontece tal fato. Suponhemos que existe outro ponto Y na semireta dada, tal que $\overline{AY} = d$. Então,

$$\overline{AX} = d = \overline{AY} \Rightarrow \overline{AX} = \overline{AY} \Rightarrow d(A, X) = d(A, Y) \Rightarrow X - A = Y - A \Rightarrow X = Y.$$

□

Definição 1.1.6. *Se* $A - M - B$ *e* $\overline{AM} = \overline{MB}$*, então* M *é um ponto médio de* AB.

Teorema 1.1.3. *Cada segmento possui um único ponto médio.*

Demonstração. Dados os pontos A e B distintos, de modo que formam o segmento AB, então da Definição 1.1.6 temos que existe um ponto M tal que $\overline{AM} = \overline{MB}$. Suponhemos que M_1 e M_2 são pontos médios de AB distintos, assim temos

$$\overline{AM_1} = \overline{M_1B} = \frac{\overline{AB}}{2}$$
$$\overline{AM_2} = \overline{M_2B} = \frac{\overline{AB}}{2}$$

Daí,

$$\overline{AM_1} = \frac{\overline{AB}}{2} = \overline{AM_2} \Rightarrow \overline{AM_1} = \overline{AM_2} \Rightarrow d(A, M_1) = d(A, M_2) \Rightarrow M_1 - A = M_2 - A$$
$$\Rightarrow M_1 = M_2.$$

□

Quando C é o ponto médio do segmento de reta AB, dizemos que A é o simetrico de B relativamente a C, e por convenção, o simétrico de C relativamente a C é o próprio C.

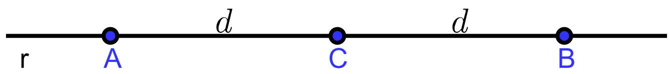


Figura 1.5: Ponto médio

Agora daremos início ao estudo das isometrias, mas primeiramente iremos ver os conceitos mais básicos deste estudo, que são as isometrias na reta, assim no decorrer do avanço do conteúdo a ser estudado, iremos ver os conceitos mais complexos, nos quais são as isometrias no plano e no espaço.

1.2 Isometrias na Reta

Definição 1.2.1. *Uma isometria da reta r na reta s é uma função $T : r \to s$ que preserva a distância entre os pontos, ou seja, se dois pontos quaisquer $X, Y \in r$ são transformados por T nos pontos $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ em s, então $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$.*

Teorema 1.2.1. *Toda isometria $T : r \to s$ é uma função bijetora, da qual sua inversa $T^{-1} : s \to r$ é ainda uma isometria.*

Demonstração. Seja $T : r \to s$ uma isometria e dados os pontos $X, Y \in r$, atribuiremos $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ de modo que $X', Y' \in s$. Primeiro iremos mostrar que T é injetora, então se

$$X \neq Y \Rightarrow \overline{XY} > 0 \Rightarrow \overline{X'Y'} = \overline{XY} > 0 \Rightarrow \overline{X'Y'} > 0 \Rightarrow X' \neq Y' \Rightarrow T(X) \neq T(Y).$$

Logo T é injetora.

Provaremos agora que T é sobrejetora, para isso pegaremos um ponto arbitrário $Y \in s$ e mostraremos que existe um ponto $X \in r$ tal que $T(X) = Y$. Para isso, tomemos um ponto qualquer $A \in r$ e coloquemos $A' = T(A)$. Seja $d = \overline{A'Y}$, assim haverá dois casos a considerar: $d = 0$ e $d > 0$.

(i) $d = 0$

Teremos que $A' = Y$ e A é o ponto X procurado.

(ii) $d > 0$

Pela consequência do Teorema 1.1.3 teremos que existe dois pontos $B, C \in r$, situados à distância d do ponto A. Pelo fato de T ser injetora, transforma B e C nos dois únicos pontos de s situados à distância d do ponto A'. Como um destes é o ponto Y, segue que se tem $T(B) = Y$ ou $T(C) = Y$.

Logo, T é sobrejetora e portanto é bijetora.

Provaremos agora a última parte do teorema, então dados $X', Y' \in s$, temos $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, onde $X = T^{-1}(X')$ e $Y = T^{-1}(Y')$. Então,

$$\overline{X'Y'} = d(X', Y') = d(T(X), T(Y)) = d(X, Y) = \overline{XY}.$$

Logo, $T^{-1} : s \to r$ é uma isometria. $\square$

Corolário 1.2.1. *A função composta de duas isometrias é ainda uma isometria.*

Demonstração. Sejam $T : r \to s$ e $U : s \to v$ isometrias, tais que dados os pontos $A, B \in r$ temos que $T(A) = A', T(B) = B', U(A') = A''$ e $U(B') = B''$. Como T e U são isometrias teremos

$$\overline{AB} = \overline{A'B'} \text{ e } \overline{A'B'} = \overline{A''B''} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{A''B''}.$$

Como,

$$U \circ T(A) = U(T(A)) = U(A') = A'' \text{ e } U \circ T(B) = U(T(B)) = U(B') = B''.$$

Logo, $U \circ T$ é uma isometria. $\square$

Teorema 1.2.2. *A imagem do segmento de reta $AB \subset r$ por uma isometria $T : r \to s$ é o segmento de reta $A'B' \subset s$, onde $A' = T(A)$ e $B' = T(B)$.*

Demonstração. De fato, dado o ponto $C \in r$ e colocando $C' = T(C)$ e tomando a isometria $T : r \to s$, em que $A' = T(A)$ e $B' = T(B)$. Então, se

$$C \in AB \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{AC} + \overline{CB} \Leftrightarrow \overline{A'B'} = \overline{A'C'} + \overline{C'B'} \Leftrightarrow C' \in A'B'$$

e se

$$C \notin AB \Leftrightarrow \overline{AB} = |\overline{AC} - \overline{BC}| \Leftrightarrow \overline{A'B'} = |\overline{A'C'} - \overline{B'C'}| \Leftrightarrow C' \notin A'B'.$$

□

Corolário 1.2.2. *A isometria $T : r \to s$, que transforma o segmento de reta AB no segmento de reta $A'B'$, leva necessariamente o ponto médio M de AB no ponto médio $M' = T(M)$ de $A'B'$.*

Demonstração. De fato, considerando a isometria $T : r \to s$ que leva o segmento AB ao segmento $A'B'$ e M o ponto médio de AB, então como $M \in AB$ pelo Teorema 1.2.2 teremos que $M' \in A'B'$ e como

$$\overline{M'X'} = \overline{MX} = \overline{MY} = \overline{M'Y'} \Rightarrow \overline{M'X'} = \overline{M'Y'}.$$

Portanto, a isometria T leva o ponto médio M de AB ao ponto médio M' de $A'B'$. □

1.2.1 Reflexão em torno de um ponto

Definição 1.2.1.1. *Consideremos um ponto A sobre a reta r. A reflexão em torno de A é a função $R_A : r \to r$ que associa a cada ponto $X \in r$ seu simétrico $X' = R_A(X)$ relativamente ao ponto A. Tem-se portanto $R_A(A) = A$, e para todo $X \neq A$ em r, A é o ponto médio do segmento de reta XX', onde $X' = R_A(X)$. Assim, X e X' pertencem a semi-retas opostas de origem em A.*

Segue-se da Definição de Reflexão em torno de um ponto, que dois pontos $X, Y \in r$ estão do mesmo lado do ponto A se, e somente se, suas respectivas imagens X' e Y' por R_A também estão. Do mesmo modo, dois pontos $X, Y \in r$ estão em lados opostos de A se, e somente se, suas respectivas imagens X' e Y' por R_A também estão.

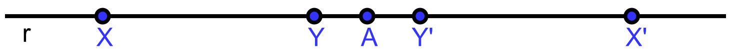


Figura 1.6: X, Y estão do mesmo lado do ponto A

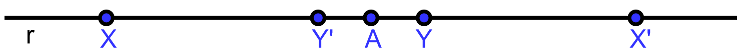


Figura 1.7: X, Y estão em lado opostos de A

Teorema 1.2.1.1. *Seja A um ponto arbitrário da reta r, então toda reflexão $R_A : r \to r$ é uma isometria.*

Demonstração. Tomemos dois pontos $X, Y \in r$, de modo que $X' = R_A(X)$ e $Y' = R_A(Y)$. Há dois casos a considerar:

(i) Se X e Y estão do mesmo lado do ponto A. Temos que

$$\overline{XY} = d(X,Y) = |d(X,A) - d(Y,A)| = |d(X',A) - d(Y',A)| = d(X',Y') = \overline{X'Y'}$$

(ii) Se X e Y estão em lados opostos de A. Teremos

$$\overline{XY} = d(X,Y) = d(X,A) + d(A,Y) = d(X',A) + d(A,Y') = d(X',Y') = \overline{X'Y'}.$$

Portanto, a reflexão R_A é uma isometria. □

Lema 1.2.1.1. *Uma isometria $T : r \to r$ que possui dois pontos fixos distintos é a função identidade.*

Demonstração. Sejam os pontos $A, B \in r$, tais que $T(A) = A$ e $T(B) = B$, ou seja, A e B são pontos fixos da isometria $T : r \to r$. Portanto, se existisse um ponto que não fosse fixo, isto é, $X \in r$ tal que $X' = T(X) \neq X$ então, como se tem

$$d(A,X) = d(T(A),T(X)) = d(A,X')$$

Logo, o ponto A seria o ponto médio do segmento XX'. Do mesmo modo, B seria também o ponto médio desse segmento. De fato, como temos

$$d(B,X) = d(T(B),T(X)) = d(B,X')$$

Logo, $A = B$. $\square$

Daí, toda isometria $T : r \to r$ diferente da identidade, possui no máximo um ponto fixo.

Observação 1.2.1. *Mais afrente veremos uma isometria do tipo* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *que irá servir como um contraexemplo para o Lema citado anteriormente, na qual é a Reflexão em torno de uma reta, pois ela fixará todos os pontos na reta.*

Lema 1.2.1.2. *Sejam* $T, S : r \to s$ *isometrias. Se existirem pontos* $A \neq B$ *em* r *tais que* $S(A) = T(A)$ *e* $S(B) = T(B)$*, então* $S = T$*, isto é,* $S(X) = T(X), \forall X \in r$.

Demonstração. De fato, se tomarmos as isometrias $T, S : r \to s$ e $R = T^{-1} \circ S : r \to r$, teremos daí que

$$R(A) = T^{-1} \circ S(A) = T^{-1}(S(A)) = T^{-1}(T(A)) = A \Rightarrow R(A) = A$$

e

$$R(B) = T^{-1} \circ S(B) = T^{-1}(S(B)) = T^{-1}(T(B)) = B \Rightarrow R(B) = B$$

Logo, $R =$ identidade, ou seja, $S = T$. $\square$

Teorema 1.2.1.2. *Se a isometria* $T : r \to r$ *possui um ponto fixo* A *então, ou* T *é a função identidade ou* T *é a reflexão em torno de* A.

Demonstração. É fácil ver, que com um ponto fixo T é a função identidade, usando o Lema 1.2.1.1. Se T não é a função identidade, então existe algum ponto $B \in r$ diferente de A não fixo, ou seja, $T(B) = B' \neq B$. Daí, temos

$$d(A, B') = d(T(A), T(B)) = d(A, B)$$

Logo, A é o ponto médio do segmento de reta BB'. Então, a isometria T coincide com a reflexão R_A nos pontos A e B. Assim, pelo Lema 1.2.1.2 temos que $T = R_A$.

$\square$

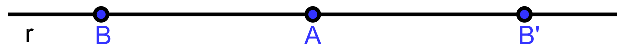


Figura 1.8: A é o ponto médio de BB'

Teorema 1.2.1.3. *Sejam $S, T : r \to s$ isometrias. Se existir um ponto $A \in r$ tal que $S(A) = T(A)$, então ou $S = T$ ou $S = T \circ R_A$, onde $R_A : r \to r$ é a reflexão em torno do ponto A.*

Demonstração. Tomando a isometria $U = T^{-1} \circ S : r \to r$, na qual admite o ponto fixo A, logo pelo Teorema 1.2.1.2, ou U é a identidade, ou seja, $S = T$, ou $U = R_A$ e, neste caso,

$$T^{-1} \circ S = R_A \Rightarrow T \circ T^{-1} \circ S = T \circ R_A \Rightarrow S = T \circ R_A.$$

□

1.2.2 Translação

Definição 1.2.2.1. *Tomemos dois pontos distintos A, B sobre a reta r. A translação $T_{AB} : r \to r$ é a função que faz corresponder a cada ponto $X \in r$ o ponto $X' = T_{AB}(X)$ tal que $\overline{XX'} = \overline{AB}$ e, além disso, o sentido de percurso de X para X' é o mesmo de A para B.*

A noção de *sentido de percurso* sobre uma reta é evidentimente clara. Em termos matemáticos mais precisos, dizer que $d(X, X') = d(A, B)$ e que os sentidos de percurso $A \to B$ e $X \to X'$ coincidem, é a mesma coisa que afirmar que o ponto médio M do segmento AX' é também ponto médio do segmento BX.

Figura 1.9: M é o ponto médio dos segmentos AX' e BX

Teorema 1.2.2.1. *Seja A e B pontos arbitrários da reta r, então toda translação T_{AB} : $r \to r$ é uma isometria.*

Demonstração. Podemos observar que, se $T_{AB}(X) = X'$ e $T_{AB}(Y) = Y'$, então $d(X, X') = d(A, B) = d(Y, Y')$. Dados $X, Y \in r$, para mostrar que $d(X', Y') = d(X, Y)$, teremos que considerar dois casos:

(i) Os segmentos XX' e YY' não tem pontos interiores em comum. Então,

$$d(X', Y') = d(X', Y) + d(Y, Y') = d(X', Y) + d(X, X') = d(X, Y) \Rightarrow d(X', Y') = d(X, Y).$$

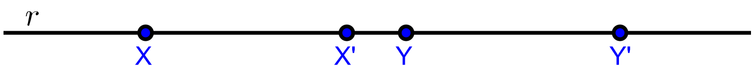


Figura 1.10: XX' e YY' não tem pontos em comum

(ii) Os segmentos XX' e YY' tem pontos interiores em comum. Então,

$$d(X', Y') = d(X, Y') - d(X, X') = d(X, Y') - d(Y, Y') = d(X, Y) \Rightarrow d(X', Y') = d(X, Y).$$

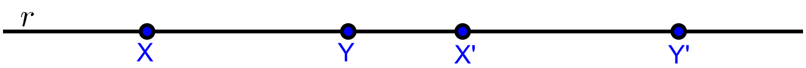


Figura 1.11: XX' e YY' tem pontos em comum

Em ambos os casos temos, $d(X', Y') = d(X, Y)$. □

Teorema 1.2.2.2. *Se $T : r \to r$ é uma isometria, então T é a função identidade ou uma translação ou a reflexão em torno de um ponto de r.*

Demonstração. Segue do Lema 1.2.1.1 para mostrar que T é identidade. Se T não é a função identidade, então existe $A \in r$ tal que $A' = T(A) \neq A$. Seja $A'' = T(A')$. Uma vez que T é uma isometria, tem-se $d(A', A'') = d(A', A) > 0$. Há duas possibilidades:

(i) $A'' \neq A$.

Neste caso, A' é o ponto médio do segmento de reta AA'', portanto T coincide com a translação $T_{AA'}$ nos pontos distintos A e A', assim $T = T_{AA'}$, em virtude do Lema 1.2.1.2.

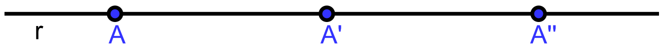


Figura 1.12: A' é o ponto médio de AA''

(ii) $A'' = A$.

Se chamarmos de M o ponto médio do segmento AA', notemos que

$$d(T(M), A') = d(T(M), T(A)) = d(M, A) = d(M, A') = d(T(M), T(A')) =$$
$$d(T(M), A'') = d(T(M), A) \Rightarrow d(T(M), A') = d(T(M), A).$$

Portanto, $T(M)$ é o ponto médio de AA', ou seja, $T(M) = M$. Logo, T coincide nos dois pontos distintos A e M, com a reflexão R_M em torno do ponto M. Pelo Lema 1.2.1.2 temos que $T = R_M$. □

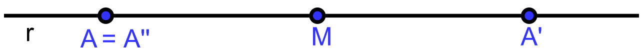


Figura 1.13: M é o ponto médio de AA'

Capítulo 2

Isometrias no Plano

Continuamos admitindo uma unidade de comprimento fixada e indicando com $d(A, B)$ ou $\overline{AB}$ a distância do ponto A ao ponto B no plano Π, ou seja, o comprimento do segmento de reta AB.

Além disso, teremos que lembrar que o ponto C pertence ao segmento de reta AB se, e somente se,

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B).$$

Definição 2.0.2. *Uma isometria entre os planos Π e Π' é uma função $T : \Pi \to \Pi'$ que preserva distâncias. Isto significa que, para quaisquer pontos $X, Y \in \Pi$, pondo $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, tem-se $d(X', Y') = d(X, Y)$.*

Teorema 2.0.3. *Toda isometria $T : \Pi \to \Pi'$ transforma retas em retas.*

Demonstração. Seja $r \subset \Pi$ uma reta. Assumindo dois pontos distintos A e B em r, colocando $A' = T(A), B' = T(B)$ e chamemos de r' a reta no plano Π' que passa por A' e B'. Dado um ponto arbitrário $X \in r$, um dos três pontos A, B e X está entre os outros dois. Suponhemos que B esteja entre A e X, ou seja, que $B \in AX$. Daí, $\overline{AX} = \overline{AB} + \overline{BX}$ portanto, pondo $X' = T(X)$, teremos $\overline{A'X'} = \overline{A'B'} + \overline{B'X'}$, assim $B' \in \overline{A'X'}$. Desta forma os pontos A', B' e X' são colineares. Os outros dois casos, que são de que A está entre$B$ e X e que X está entre A e B, são mostrados analogamente. Isto mostra que $X \in r \Rightarrow X' \in r'$.

Por consequência a restrição de T a r é uma isometria entre r e r'. Como toda isometria entre retas é sobrejetora, tem-se $T(r) = r'$. □

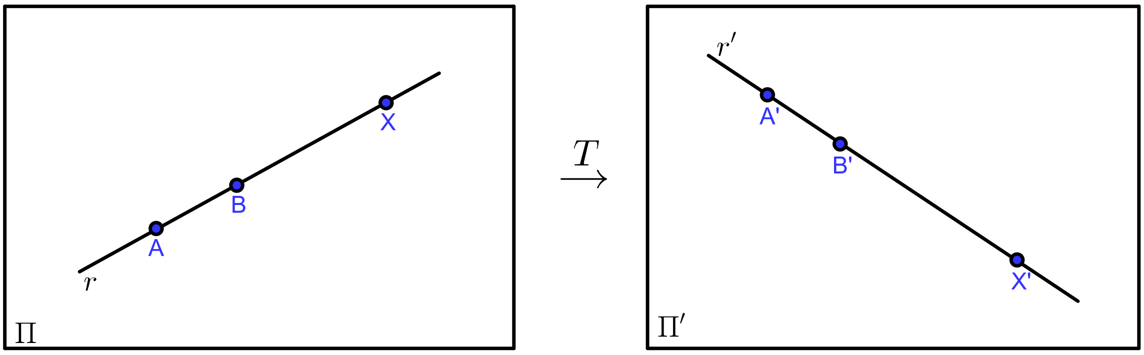


Figura 2.1: Isometria entre retas

Teorema 2.0.4. *Uma isometria $T : \Pi \to \Pi'$ transforma retas perpendiculares em retas perpendiculares.*

Demonstração. Tomando as retas perpendiculares $r, s \in \Pi$, suponhemos o ponto A como ponto de interseção de r e s, dois pontos $B, C \in r$ equidistantes de A e um ponto $D \in s$. A isometria T transforma a mediana AD do triângulo isósceles BCD na mediana $A'D'$ do triângulo isósceles $B'C'D'$, portanto $A'D'$ é perpendicular a $B'C'$, ou seja, r' é perpendicular a s'. □

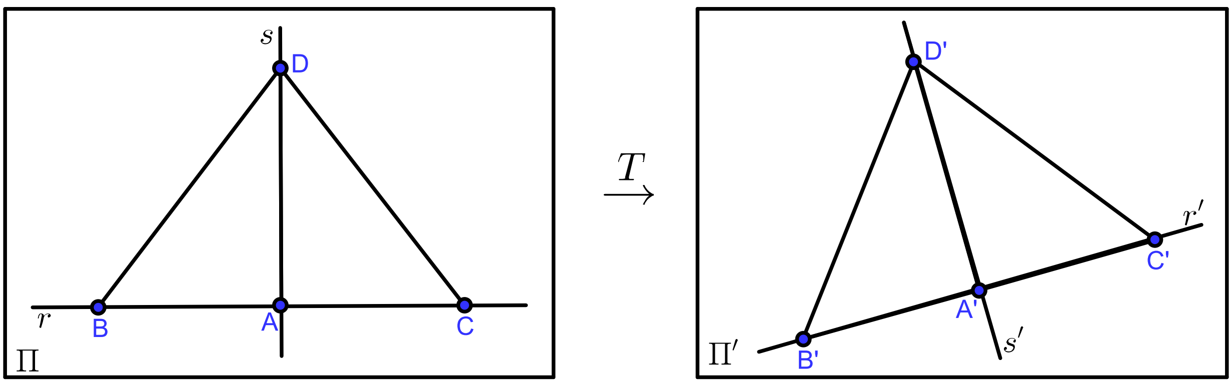


Figura 2.2: Retas perpendiculares

Teorema 2.0.5. *Toda isometria $T : \Pi \to \Pi'$ é uma bijeção, cuja inversa $T^{-1} : \Pi' \to \Pi$ é ainda uma isometria.*

Demonstração. Seja $T : \Pi \to \Pi'$ uma isometria e dados $X, Y \in \Pi$, ponhemos $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$ de modo que $X', Y' \in \Pi'$. Primeiro iremos mostrar que T é injetora, então se

$$X \neq Y \Rightarrow d(X,Y) > 0 \Rightarrow d(X',Y') = d(X,Y) > 0 \Rightarrow d(X',Y') > 0 \Rightarrow X' \neq Y' \Rightarrow \\ T(X) \neq T(Y)$$

Logo, T é injetora.

Provemos agora que T é sobrejetora, para isso tomaremos um ponto arbitrário $X' \in \Pi'$ e mostraremos que existe um ponto $X \in \Pi$ tal que $T(X) = X'$. Para isso, delineamos uma reta qualquer r em Π. A imagem de r por T é uma reta $r' = T(r)$ no plano Π', pelo Teorema 2.0.3. Se $X' \in r'$, então por definição de imagem, existe um ponto $X \in r$ tal que $T(X) = X'$. Caso contrário, seja s' a perpendicular baixada de X' sobre r'. Chamaremos de Y' o ponto de interseção de r' com s'. Já que $Y' \in r'$, então existe $Y \in r$ tal que $T(Y) = Y'$. Seja s a reta perpendicular a r passando por Y. A imagem de s pela isometria T é a perpendicular a r' e contém Y', pelo Teorema 2.0.4. Logo, $T(s) = s'$. Como $X' \in s'$, então existe $X \in s$ tal que $T(X) = X'$.

Portanto, T é sobrejetora, assim T é bijetora.

Agora mostremos a última parte do teorema, então dados $X', Y' \in \Pi'$, temos $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$, onde $X = T^{-1}(X')$ e $Y = T^{-1}(Y')$. Então,

$$d(X',Y') = d(T(X),T(Y)) = d(X,Y) = d(T^{-1}(X'),T^{-1}(Y')) \\ \Rightarrow d(X',Y') = d(T^{-1}(X'),T^{-1}(Y')).$$

Logo, $T^{-1} : \Pi' \to \Pi$ é uma isometria. □

Teorema 2.0.6. *Se $T : \Pi \to \Pi'$ e $S : \Pi' \to \Pi''$ são isometrias entre planos, então a composta $S \circ T : \Pi \to \Pi''$ é também uma isometria.*

Demonstração. Sejam $T : \Pi \to \Pi'$ e $S : \Pi' \to \Pi''$ isometrias entre planos, tais que dados os pontos $A, B \in \Pi$ temos que $T(A) = A', T(B) = B', S(A') = A''$ e $S(B') = B''$. Como T e S são isometrias entre planos, então

$$d(A, B) = d(A', B') \text{ e } d(A', B') = d(A'', B'') \Rightarrow d(A, B) = d(A'', B'').$$

Como,

$$S \circ T(A) = S(T(A)) = S(A') = A'' \text{ e } S \circ T(B) = S(T(B)) = S(B') = B''.$$

Logo, $S \circ T$ é uma isometria. □

2.1 Simetria em torno de um ponto

Definição 2.1.1. *Tomemos um ponto A no plano Π. A simetria em torno de A é a função $S_A : \Pi \to \Pi$ assim definida, $S_A = A$ e para $X \neq A$, $S_A(X) = X'$ é o simétrico de X relativamente ao ponto A. Noutras palavras, A é o ponto médio do segmento de reta XX'.*

Teorema 2.1.1. *Seja A um ponto arbitrário do plano Π, então toda simetria $S_A : \Pi \to \Pi$ é uma isometria.*

Demonstração. Dados $X, Y \in \Pi$ tal que $S_A(X) = X'$ e $S_A(Y) = Y'$, podemos observar que $\overline{AX} = \overline{AX'}$, $\overline{AY} = \overline{AY'}$ por definição de simetria e $X\widehat{A}Y = X'\widehat{A}Y'$ por serem ângulos opostos pelo vértice. Assim, os triângulos AXY e $AX'Y'$ são congruentes pelo caso $L-A-L$.
Logo, $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$. □

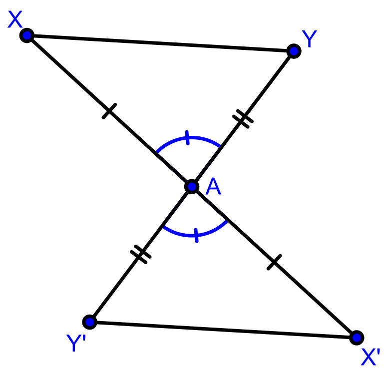


Figura 2.3: Simetria em torno de um ponto

2.2 Reflexão em torno de uma reta

Definição 2.2.1. *Seja r uma reta no plano Π. A reflexão em torno da reta r é a função $R_r : \Pi \to \Pi$ assim definida $R_r(X) = X$, $\forall X \in r$ e para $X \notin r$, $R_r(X) = X'$ é tal que a mediatriz do segmento XX' é a reta r. Noutras palavras, seja Y o pé da perpendicular baixada de X sobre r. Então, Y é o ponto médio do segmento de reta XX'.*

Teorema 2.2.1. *Seja $R_r : \Pi \to \Pi$ uma reflexão em torno da reta r, mostremos que R_r é uma isometria.*

Demonstração. Dada a reta $r \in \Pi$ e a reflexão $R_r : \Pi \to \Pi$ tal que $R_r(X) = X'$ e $R_r(Y) = Y'$. Iremos considerar dois casos:

(i) X e Y estão do mesmo lado da reta r no plano Π e o segmento XY não é paralelo a reta.

Nesse caso, traçamos os segmentos XA e $X'A'$ paralelos a r, com A e A' sobre YY'. Os triângulos retângulos XAY e $X'A'Y'$ têm os catetos com o mesmo comprimento, logo o mesmo ocorre com suas hipotenusas, isto é, $\overline{XY} = \overline{X'Y'}$, pelo fato de os triângulos retângulos serem congruentes pelo caso *cateto* $-$ *cateto*.

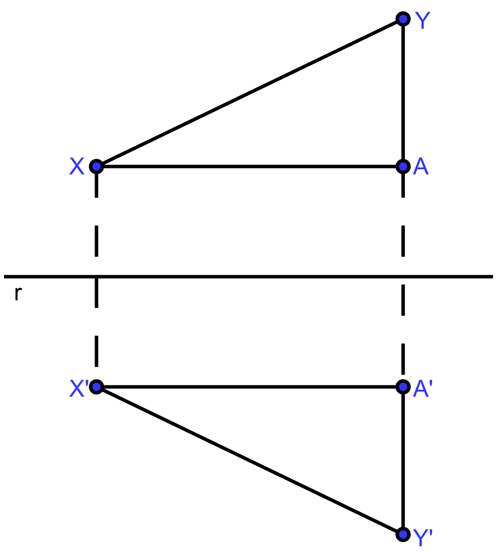


Figura 2.4: Reflexão dos pontos X e Y do mesmo lado de r e XY não é paralelo

(ii) X e Y estão do mesmo lado da reta r no plano Π e o segmento XY é paralelo a reta. Agora, iremos traçar o segmento XY de tal modo que seja paralelo à reta r, tal que $R_r(X) = X'$ e $R_r(Y) = Y'$. Podemos notar facilmente que o segmento $X'Y'$ também é paralelo à reta r. Assim, podemos formar um retângulo de lados XY, YY', XX' e $X'Y'$. Logo por definição de retângulo temos que $XY = X'Y'$.

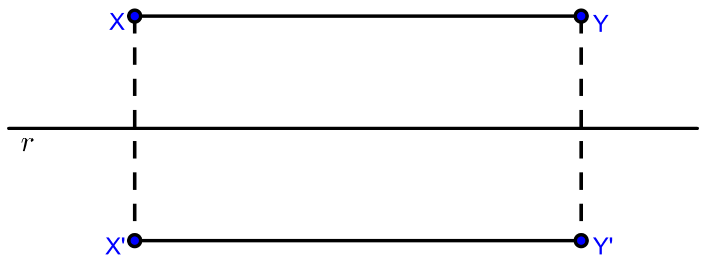


Figura 2.5: Reflexão dos pontos X e Y do mesmo lado de r e XY é paralelo

(iii) X e Y estão em lados opostos da reta r no plano Π.
Sejam A e B os pontos de interseção de XY e XX' com a reta r, respectivamente. Os triângulos retângulos ABX e ABX' tem o cateto AB em comum e $\overline{BX} = \overline{BX'}$ por definição de reflexão, logo suas hipotenusas têm o mesmo comprimento $\overline{AX} = \overline{AX'}$, em consequência de serem dois triângulos retângulos congruentes pelo caso *cateto − cateto*. Analogamente, $\overline{AY} = \overline{AY'}$. Deste modo os triângulos AXX' e AYY' são isósceles, portanto suas medianas são bissetrizes, assim $\alpha = \alpha'$ e $\beta = \beta'$. Por outro lado, $\alpha = \beta'$ como ângulos opostos pelo vértice. Então, $\alpha + \alpha' = \beta + \beta'$. Como, $\beta + \beta'$ é o suplemento do ângulo $X\widehat{A}Y'$, segue-se que $\alpha + \alpha'$ também é suplemento do mesmo, logo X', A e Y' são colineares. Portanto,

$$\overline{X'Y'} = \overline{X'A} + \overline{AY'} = \overline{XA} + \overline{AY} = \overline{XY}.$$

$\square$

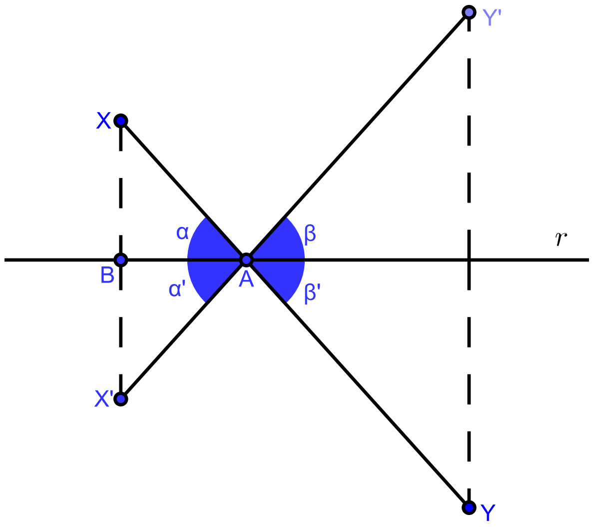


Figura 2.6: Reflexão dos pontos X e Y de lados opostos de r

Uma ocorrência geométrica importante a respeito da reflexão $R_r : \Pi \to \Pi$ é que ela transforma o triângulo ABC num triângulo $A'B'C'$ no qual o sentido de rotação dos vértices $A' \to B' \to C'$ é oposto do sentido $A \to B \to C$.

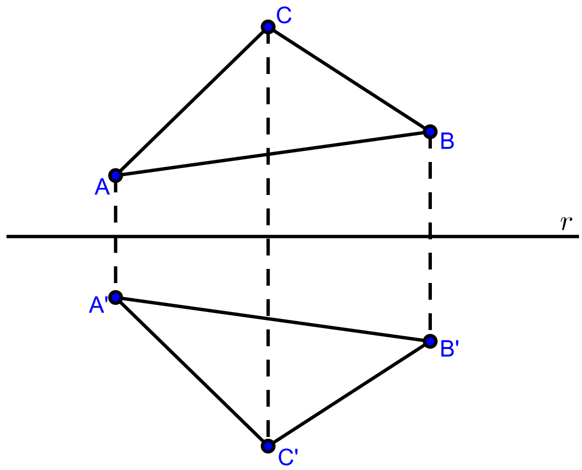


Figura 2.7: Reflexão do Triângulo em torno de r

2.3 Translação no Plano

Definição 2.3.1. *Sejam A, B pontos distintos do plano Π. A translação $T_{AB} : \Pi \to \Pi$ é a função assim definida: dado $X \in \Pi$, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ é o quarto vértice do paralelogramo que tem AB e AX como lados.*

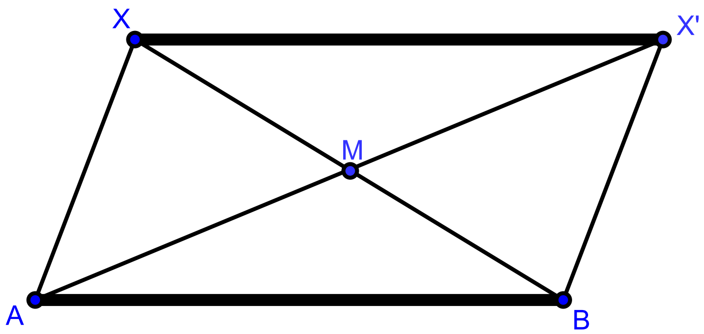


Figura 2.8: Paralelogramo de lado AB

Esta definição de $T_{AB}(X)$ se emprega apenas quando A, B e X não são colineares. Se os pontos A, B e X forem colineares, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ já foi definida quando estudamos as isometrias da reta.

Qualquer que seja a posição de X no plano Π, sua imagem $X' = T_{AB}(X)$ fica completamente caracterizada pelo fato de que os segmentos de reta AX' e BX tem o mesmo ponto médio M. Desta maneira, se quisermos construir X' geometricamente a partir de A, B e X pegamos o ponto médio M do segmento BX e prolongamos o segmento AM até X' de modo que $\overline{MX'} = \overline{AM}$.

Destaquemos que a translação T_{AB} não possui pontos fixos. Na realidade, para todo ponto $X \in \Pi$, com $T_{AB}(X) = X'$, tem-se $d(X, X') = d(A, B)$.

Teorema 2.3.1. *Sejam A e B pontos arbitrários do plano Π, então toda translação T_{AB} : $\Pi \to \Pi$ é uma isometria.*

Demonstração. Consideremos dois pontos arbitrários $X, Y \in \Pi$, de modo que suas imagens sejam $X' = T_{AB}(X)$ e $Y' = T_{AB}(Y)$. Se a reta r que comporta X e Y é paralela ou igual à reta s que contém AB então, T_{AB} restrita a r, é a translação $T_{XX'} : r \to r$, logo $d(X', Y') = d(X, Y)$. Se r não é paralela nem igual a s então XX' e YY' são lados opostos de um paralelogramo, logo o mesmo ocorre com XY e $X'Y'$. Segue-se que $d(X', Y') = d(X, Y)$. $\square$

2.4 Rotação

Definição 2.4.1. *Sejam O um ponto tomado no plano Π e $\alpha = A\widehat{O}B$ um ângulo de vértice O. A rotação de ângulo α em torno do ponto O é a função $\rho_{O,\alpha} : \Pi \to \Pi$ assim definida: $\rho_{O,\alpha}(O) = O$ e, para todo ponto $X \neq O$ em Π, $\rho_{O,\alpha}(X) = X'$ é o ponto do plano Π tal que $d(X, O) = d(X', O), X\widehat{O}X' = \alpha$ e o sentido de rotação de A para B é o mesmo de X para X'.*

A circunstância $X\widehat{O}X' = \alpha$ significa, em termos geométricos, que se pegarmos os pontos A e B tais que $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OX} = \overline{OX'}$ então $\overline{AB} = \overline{XX'}$, pelo caso de congruência de triângulos $L - A - L$. A condição de que o sentido de rotação de X para X' seja o mesmo que o sentido de A para B é clara intuitivamente e pode ser elaborada de maneira precisa dizendo-se que os ângulos $B\widehat{O}X$ e $A\widehat{O}X'$ têm a mesma bissetriz.

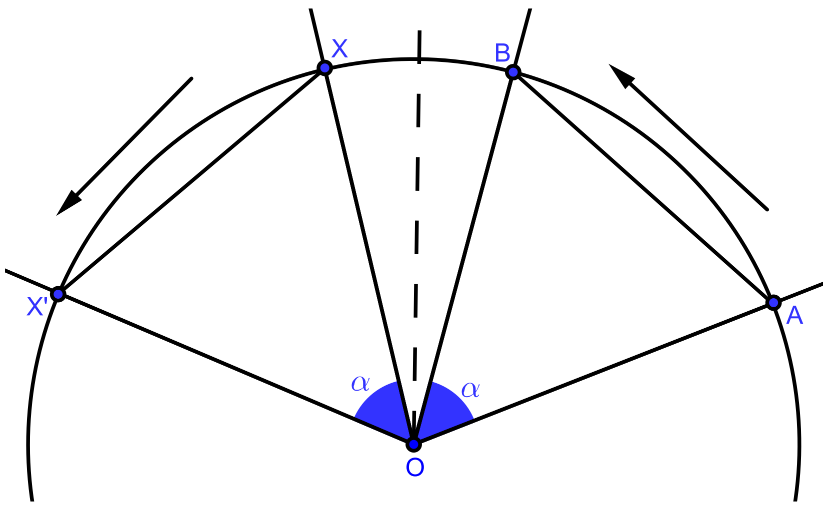


Figura 2.9: Bissetriz de $B\widehat{O}X$ e $A\widehat{O}X'$

Agora, se forem dados dois pontos $X, Y \in \Pi$, diferentes de O, faça-se X' e Y' suas imagens pela rotação $\rho_{O,\alpha}$. Como os ângulos $X'\widehat{O}Y$ e $X\widehat{O}Y'$ têm a mesma bissetriz, procede-se que $X\widehat{O}Y = X'\widehat{O}Y'$. Sendo $\overline{OX} = \overline{OX'}$ e $\overline{OY} = \overline{OY'}$, concluímos que os triângulos XOY e $X'OY'$ são congruentes pelo caso $L - A - L$. Logo, $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$, ou seja, $\rho_{O,\alpha}$ é uma isometria, cujo o único ponto fixo é O.

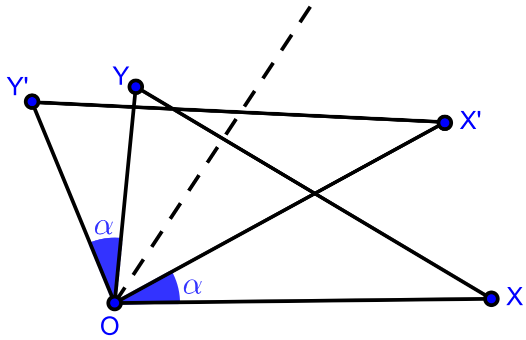


Figura 2.10: Bissetriz de $X'\widehat{O}Y$ e $X\widehat{O}Y'$

Com isso, fica demosntrado o seguinte Teorema.

Teorema 2.4.1. *Sejam O um ponto arbitrário no plano Π e $\alpha = A\widehat{O}B$ um ângulo de vértice O, então toda rotação $\rho_{O,\alpha} : \Pi \to \Pi$ é uma isometria.*

Observação 2.4.1. *Quando o ângulo $\alpha = A\widehat{O}B$ é raso, ou seja, quando OA e OB são semi-retas opostas, a rotação $\rho_{O,\alpha}$ coincide com a simetria S_O, em torno do ponto O.*

2.5 Reflexão com deslizamento

Definição 2.5.1. *Sejam $v = \overrightarrow{AB}$ um vetor não-nulo e r uma reta paralela a v no plano Π. A reflexão com deslizamento, determinada pelo vetor v e pela reta r, é a isometria $T = T_v \circ R_r : \Pi \to \Pi$, obtida fazendo a translação T_v seguir-se à reflexão R_r. A reflexão com deslizamento, como a translação T_v, não possui ponto fixo.*

Como, a reflexão com deslizamento por definição é a composição de duas isometrias, então pelo Corolário 1.2.1, a mesma é uma isometria.

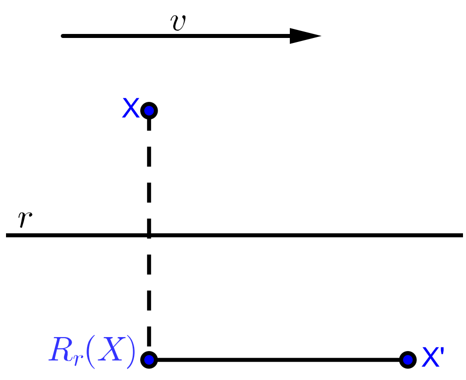


Figura 2.11: Reflexão com deslizamento

Teorema 2.5.1. *Se uma isometria $T : \Pi \to \Pi$ possui três pontos fixos não colineares, então $T =$ identidade.*

Demonstração. Sejam A, B e C pontos não colineares no plano Π, tais que $T(A) = A, T(B) = B$ e $T(C) = C$, ou seja, são pontos fixos. Tome as retas r que passa por AB e s que passa por AC. A imagem da reta r pela isometria T é a reta que passa pelos pontos $T(A) = A$ e $T(B) = B$. Logo $T(r) = r$. Deste modo, a restrição $T|r$ é uma isometria da reta r, com dois pontos fixos distintos A e B. Pelo Lema 1.2.1.1, tem-se $T(X) = X$ para todo $X \in r$. Analogamente tem-se que $T(Y) = Y$ para todo $Y \in s$. Seja agora Z um ponto arbitrário do plano Π. Façamos passar por Z uma reta t que corta r e s respectivamente nos pontos X e Y. Já que $T(X) = X$ e $T(Y) = Y$, concluimos que T deixa fixos todos os pontos da reta t. Em particular, $T(Z) = Z$. Sendo Z um ponto arbitrário de Π, resulta que $T =$ identidade. $\square$

Teorema 2.5.2. *Sejam $S, T : \Pi \to \Pi'$ isometrias. Se existirem em Π três pontos não-colineares A, B e C tais que $S(A) = T(A), S(B) = T(B)$ e $S(C) = T(C)$, tem-se $S = T$, isto é, $S(X) = T(X)$ para todo $X \in \Pi$.*

Demonstração. Considerando as condições acima a isometria $S^{-1} \circ T : \Pi \to \Pi$ deixa fixos os pontos A, B e C, logo pelo Teorema 2.5.1 temos $S^{-1} \circ T =$ identidade, donde $S = T$. $\square$

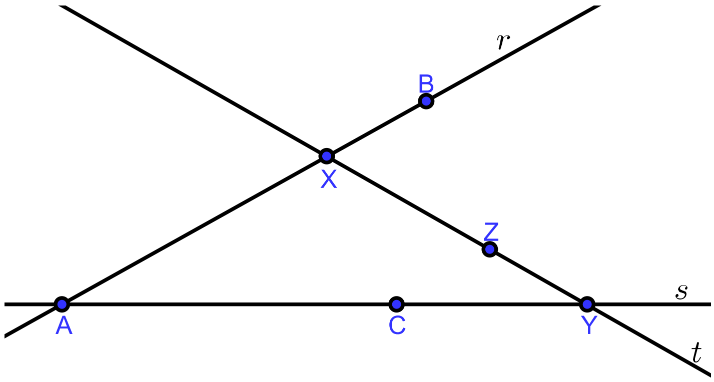


Figura 2.12: Isometria T com os pontos A, B e C fixos

Teorema 2.5.3. *Se uma isometria $T : \Pi \rightarrow \Pi$ possui dois pontos fixos distintos então ou T é a identidade ou é a reflexão em torno da reta que contém esses pontos.*

Demonstração. Sejam $A \neq B$ pontos de Π tais que $T(A) = A$ e $T(B) = B$. Assim sendo, T deixa fixos todos os pontos da reta r que passa por AB. Adotemos um ponto C no plano Π, que não esteja na reta r. Se $T(C) = C$ então $T =$ identidade porque tem três pontos fixos não-colineares, utilizando o Teorema 2.5.1. Se, no entanto, for $C' = T(C) \neq C$ então, como $\overline{AC} = \overline{AC'}$ e $\overline{BC} = \overline{BC'}$, a reta r é a mediatriz do segmento CC' assim $C' = R_r(C)$. Portanto T coincide, nos pontos não-colineares A, B e C, com a reflexão em torno de r, logo $T = R_r$, pelo Teorema 2.5.2. $\square$

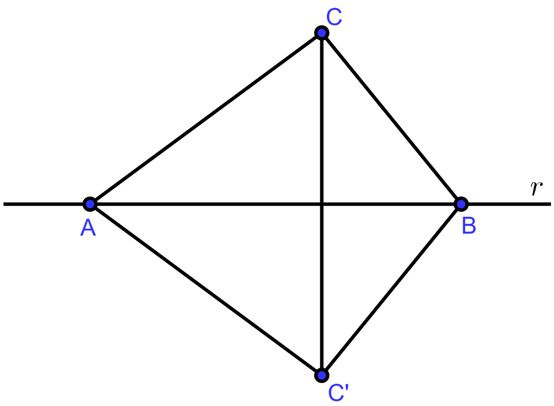


Figura 2.13: Reflexão de C em torno de r

Teorema 2.5.4. *Sejam $S, T : \Pi \to \Pi'$ isometrias. Se existem em Π dois pontos distintos A, B tais que $S(A) = T(A)$ e $S(B) = T(B)$ então ou $S = T$ ou $S = T \circ R_r$, onde $R_r : \Pi \to \Pi$ é a reflexão em torno da reta $r = AB$.*

Demonstração. Como $T^{-1} \circ S : \Pi \to \Pi$ é uma isometria com dois pontos fixos diferentes A e B, então pelo Teorema 2.5.3 temos que ou $T^{-1} \circ S =$ identidade, assim $T = S$, ou então $T^{-1} \circ S = R_r$, donde $S = T \circ R_r$. □

Teorema 2.5.5. *Existem apenas cinco tipos de isometrias $T : \Pi \to \Pi$ do plano Π, a saber: Função Identidade, Translação, Rotação, Reflexão e Reflexão com deslizamento.*

Demonstração. Tomando $T : \Pi \to \Pi$ uma isometria diferente da identidade e $A \in \Pi$ um ponto tal que $A' = T(A) \neq A$. Seja $A'' = T(A')$. Evidentemente $\overline{A'A''} = \overline{AA'} > 0$. Assim, há três casos a considerar.

(i) A, A' e A'' são pontos distintos e não-colineares.

A imagem do triângulo $AA'A''$ pela isometria T é um triângulo que tem A' e A'' como vértices. Já que os lados desse triângulo têm medidas iguais às dos lados de $AA'A''$, há duas posições possíveis, B_1 e B_2, para o seu terceiro vértice, à medida que ele e o ponto A estejam ou não no mesmo lado da reta $A'A''$.

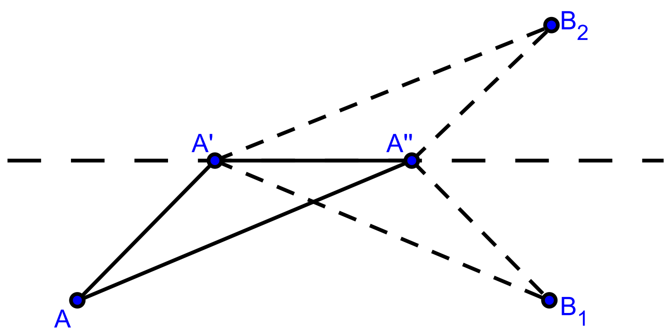


Figura 2.14: Imagens do Triângulo $AA'A''$ por T

Na primeira hipótese, o ponto $B_1 = T(A'')$ forma com $AA'A''$ a poligonal convexa $AA'A''B_1$, na qual os lados têm a mesma medida e os ângulos $\widehat{A'}$ e $\widehat{A''}$ são iguais, portanto ela pode ser inscrita numa circunferência de raio $\overline{OA}$, onde o centro O é o ponto de encontro das mediatrizes dos segmentos $AA', A'A''$ e $A''B_1$. Seja $O' = T(O)$ então, visto que $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$, temos $\overline{O'A'} = \overline{O'A''} = \overline{O'B_1}$, por isso O' pertence às mediatrizes dos segmentos $A'A''$ e $A''B_1$, donde $O' = O$. Deste modo, se cosiderarmos a rotação ρ de centro O e ângulo $A\widehat{O}A'$, vamos ter $\rho(A) = A' = T(A), \rho(A') = A'' = T(A')$ e $\rho(A'') = B_1 = T(A'')$. Resulta-se então do Teorema 2.5.2 que $T = \rho$ é uma rotação.

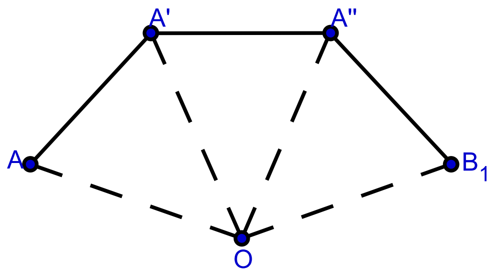


Figura 2.15: Poligonal convexa $AA'A''B_1$

Na segunda hipótese temos um paralelogramo no qual AA' e $A''B_2$ são lados opostos e $A'A''$ é uma diagonal. Resulta-se que os pontos médios M, P e N desses três segmentos estão sobre uma mesma reta r. Se considerarmos a isometria $S = T_{MN} \circ R_r$, composta da translação T_{MN} com a reflexão em torno de r, veremos que S e T coincidem nos pontos não-colineares A, A' e A'', logo pelo Teorema 2.5.2 temos que, $T = S$. Comprovamos assim que T é uma reflexão com deslizamento.

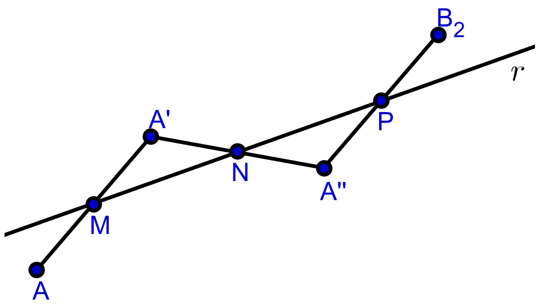


Figura 2.16: Paralelogramo $AA'B_2A''$

(ii) A, A' e A'' são pontos distintos e colineares.

Como $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$, podemos observar que A' é o ponto médio do segmento AA''. A reta r, que contém os três pontos dados, é convertida em si mesma pela isometria T. Além disso T coincide, nos pontos A e A' com a translação $T_{AA'} : r \to r$, então pelo Lema 1.2.1.2 temos que, em todos os pontos de r, T se iguala com esta translação. Suponhemos um ponto B fora da reta r.

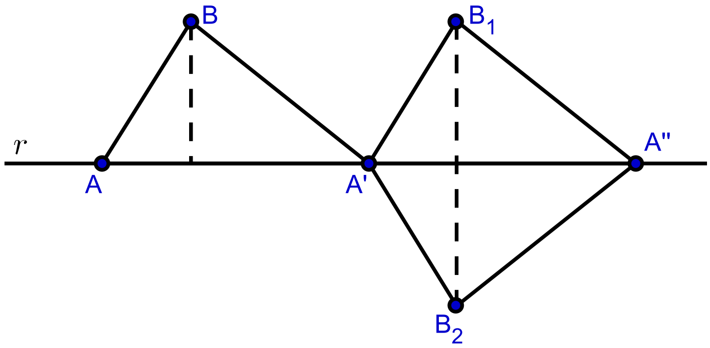


Figura 2.17: Imagens do triângulo ABA'

O triângulo $AA'B$ é transformado pela isometria T em outro triângulo que tem A' e A'' como vértices e lados com as mesmas medidas que os de $AA'B$. Há duas posições possíveis, B_1 e B_2, para o terceiro vértice desse triângulo, de modo que ele e B estejam do mesmo lado ou em lados opostos da reta r.

Na primeira hipótese, AB e $A'B_1$ são lados opostos de um paralelogramo por consequência, tomando a translação $T_{AA'} : \Pi \to \Pi$, podemos observar que ela coincide com a isometria T nos pontos não-colineares A, A' e B. Então usando o Teorema 2.5.2 temos que $T = T_{AA'}$, logo T é uma translação.

Na segunda hipótese, como o ponto B_2 é o simetrico de B_1 em relação à reta r, considerando a reflexão com deslizamento $S = T_{AA'} \circ R_r : \Pi \to \Pi$, observamos que $S(A) = T(A) = A, S(A') = T(A') = T(A') = A''$ e $S(B) = T(B) = B_2$, logo $S = T$, em virtude do Teorema 2.5.2. Portanto T é uma reflexão com deslizamento.

(iii) $A'' = A$.

Neste caso, a isometria T converte o segmento de reta AA' em si mesmo, assim $T(M) = M$ se M é o ponto médio de AA'. A mediatriz s desse segmento é portanto transformada em si mesma por T.

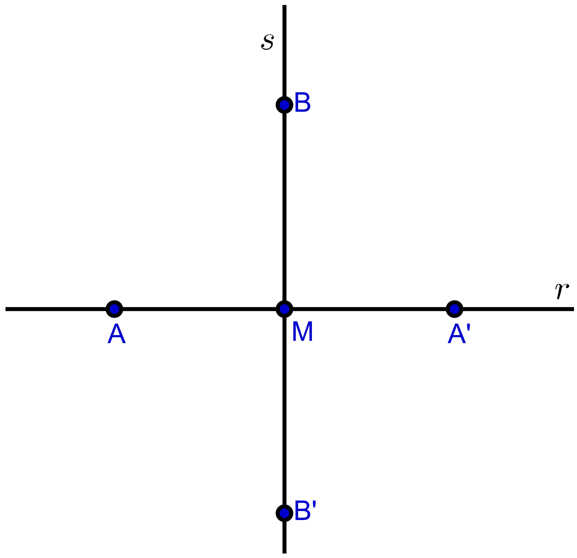


Figura 2.18: Mediatriz do segmento AA'

Assumindo B como um ponto dessa mediatriz, diferente de M. Há duas possibilidades: ou $T(B) = B$ ou $T(B) = B'$, no qual é o ponto simétrico de B relativamente à reta $r = AA'$. Na primeira hipótese, T coincide com a reflexão $R_s : \Pi \to \Pi$ nos pontos A, A' e B, por consequência $T = R_s$.

Na segunda hipótese, T coincide com a rotação $\rho : \Pi \to \Pi$ em torno do ponto M, com ângulo de 180°, nos pontos não-colineares A, B e M, logo $T = \rho$. Desse modo, neste terceiro caso, T é uma translação ou uma rotação de 180°. $\square$

Capítulo 3

Isometrias no Espaço

Indicaremos com E o espaço euclidiano tri-dimensional. Aqui a ideia de isometria será mantida igualmente como nos capítulos anteriores, ou seja, uma função $T : E \to E$ irá se chamar de isometria quando preservar a distância entre pontos de E, isto é, quando $d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$ para quaisquer $X, Y \in E$.

Teorema 3.0.6. *Seja $T : E \to E$ uma isometria. A isometria $T : E \to E$ transforma pontos colineares em pontos colineares.*

Demonstração. Dados os pontos $A, B, C \in E$, com $A \neq B$ e fazendo $A' = T(A), B' = T(B)$ e $C' = T(C)$. Se o ponto $C \in AB$, então

$$d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Rightarrow d(A', B') = d(A', C') + d(C', B'),$$

por T ser uma isometria. Portanto $C' \in A'B'$. □

Teorema 3.0.7. *A imagem de uma reta por uma isometria $T : E \to E$ é uma reta.*

Demonstração. Tomemos uma reta $r \subset E$ que possui os pontos A, B e a reta $r' \subset E$ que contém A', B'. Daí podemos observar que $T(r) \subset r'$, dessa forma a restrição de T a r é uma isometria entre as retas r e r'. Pelo Teorema 1.2.1, temos que $T(r) = r'$. □

Teorema 3.0.8. *A imagem de um plano $\Pi \subset E$ por uma isometria $T : E \to E$ é um plano $\Pi' \subset E$.*

Demonstração. Sejam r e s retas no plano Π que se cortam no ponto A. As imagens dessas retas pela isometrias T usando o Teorema 3.0.7, são as retas r' e s' que se cortam no ponto $A' = T(A)$. Tomando Π' o plano determinado por r' e s'. Garantimos que

$$X \in \Pi \Rightarrow X' = T(X) \in \Pi'.$$

Efetivamente, dado um ponto arbitrário X no plano Π, façamos passar por ele uma reta $t \subset \Pi$, que não seja paralela a r nem a s e que não passe por A. A reta t corta r e s nos pontos Z e Y, respectivamente, com $Z \neq Y$. Logo, sua imagem t' é uma reta em E que contém X' e passa pelos pontos $Y' = T(Y)$ e $Z' = T(Z)$. Como Y' e Z' pertencem a Π', segue-se que $t' \subset \Pi'$, donde $X' \in \Pi'$. Deste modo $T(\Pi) \subset \Pi'$. A restrição de T a Π é uma isometria entre Π e Π'. Assim, pelo Teorema 2.0.5 temos que $T(\Pi) = \Pi'$. $\square$

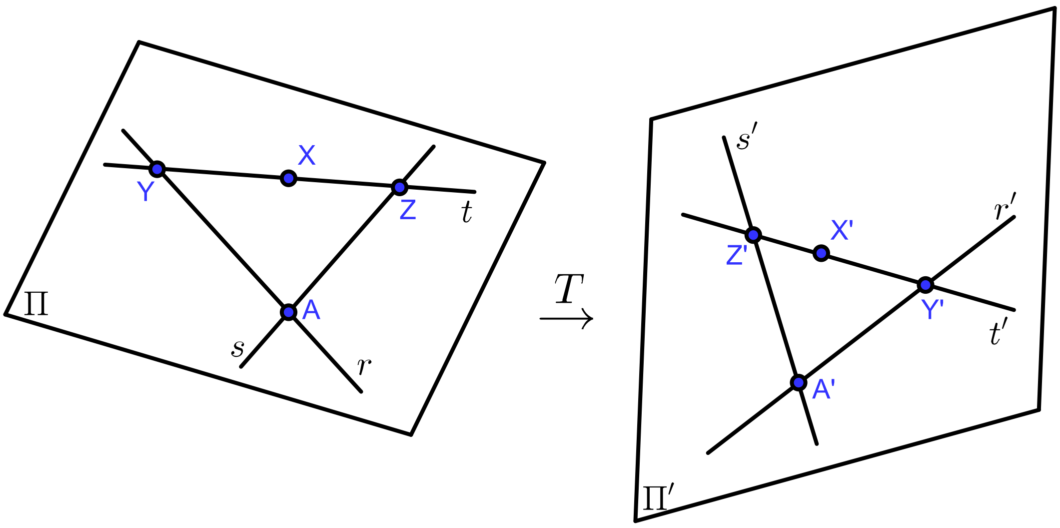


Figura 3.1: T leva o plano Π em Π'

Definição 3.0.2. *Duas retas $r, s \subset E$ são perpendiculares quando têm um ponto A em comum e, além disso, tomando-se pontos $B \in r$ e $C \in s$, vale a relação de Pitágoras $d(A,B)^2 + d(A,C)^2 = d(B,C)^2$.*

Da definição acima, se pode suceder de imediato que toda isometria $T : E \to E$ converte retas perpendiculares em retas perpendiculares, pelo Teorema 2.0.4.

Definição 3.0.3. *Uma reta $r \in E$, que corta o plano $\Pi \in E$ no ponto A, diz-se perpendicular a esse plano quando é perpendicular a toda reta de Π que passa por A.*

Para que ocorra a definição acima, basta que a reta r seja perpendicular a duas retas distintas em Π e passando por A.

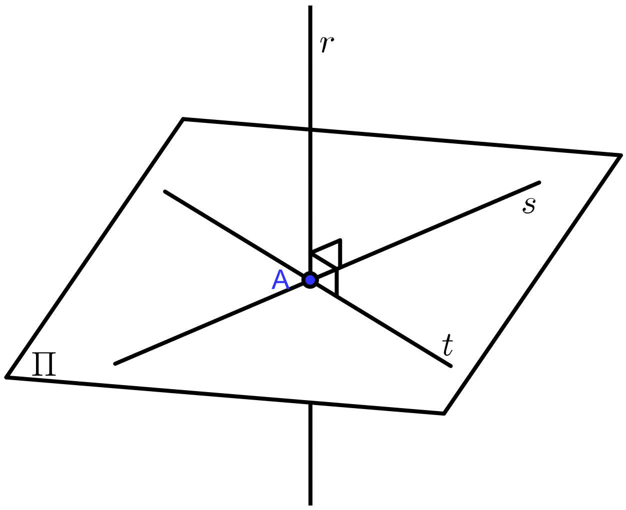


Figura 3.2: Reta perpendicular ao plano Π

Teorema 3.0.9. *Seja $T : E \to E$ uma isometria. Se a reta r é perpendicular ao plano Π então sua imagem $r' = T(r)$ é perpendicular ao plano $\Pi' = T(\Pi)$.*

Demonstração. Se s e t são retas distintas em Π, passando pelo ponto A, que é o ponto de interseção de r com Π, assim $r' = T(r)$ e $s' = T(s)$ são retas distintas no plano Π', que se cortam em $A' = T(A)$. Já que r e Π são perpendiculares, temos que s e t são perpendiculares a r, então s' e t' são perpendiculares a r', portanto r' é perpendicular ao plano Π'. $\square$

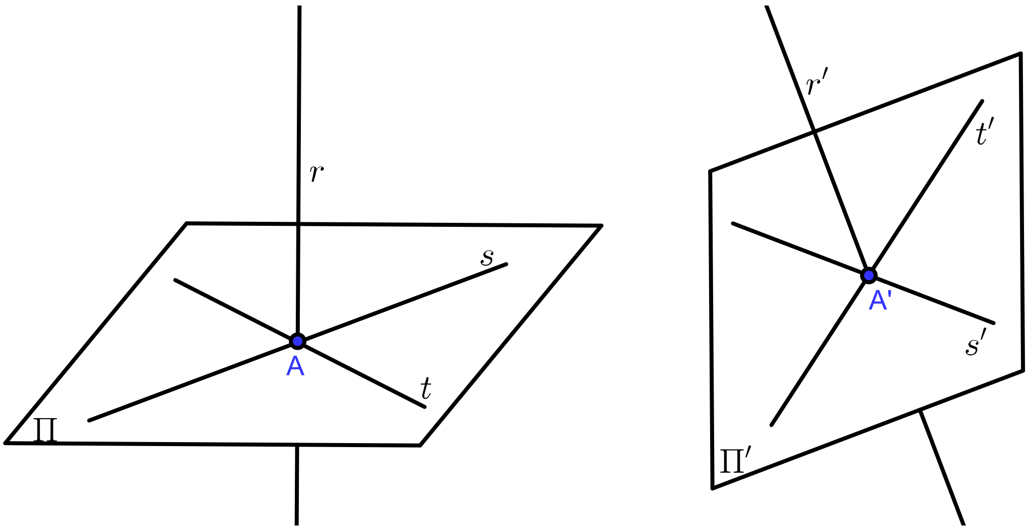


Figura 3.3: Reta perpendicular ao plano Π transformada por T

Teorema 3.0.10. *Toda isometria $T : E \to E$ é uma bijeção, cuja inversa $T^{-1} : E \to E$ é ainda uma isometria.*

Demonstração. Dados $X, Y \in E$ e ponhamos $X' = T(X)$ e $Y' = T(Y)$. Então,

$$T(X) = T(Y) \Rightarrow d(T(X), T(Y)) = 0 \Rightarrow d(X, Y) = d(T(X), T(Y)) = 0$$

$$\Rightarrow d(X, Y) = 0 \Rightarrow X = Y.$$

Logo, T é injetora.

Agora mostraremos que T é sobrejetora. Dado um ponto qualquer $X' \in E$, com intenção de adquirir um ponto $X \in E$ tal que $T(X) = X'$, consideramos um plano qualquer $\Pi \in E$ e chamamos de Π' sua imagem por T. Se $X' \in \Pi'$, então existe $X \in \Pi$ com $T(X) = X'$. Agora se $X' \notin \Pi'$, pegamos a reta r', perpendicular ao plano Π' que passa por X'. Seja A' o ponto de interseção de r' com Π'. Já que $\Pi' = T(\Pi)$, então existe um ponto $A \in \Pi$ tal que $T(A) = A'$. Seja r a perpendicular ao plano Π passando pelo ponto A. Usando o Teorema 3.0.9 obtemos $T(r) = r'$. Dado que $X' \in r'$, deve haver um ponto $X \in r$ com $T(X) = X'$.

Logo, T é sobrejetora.

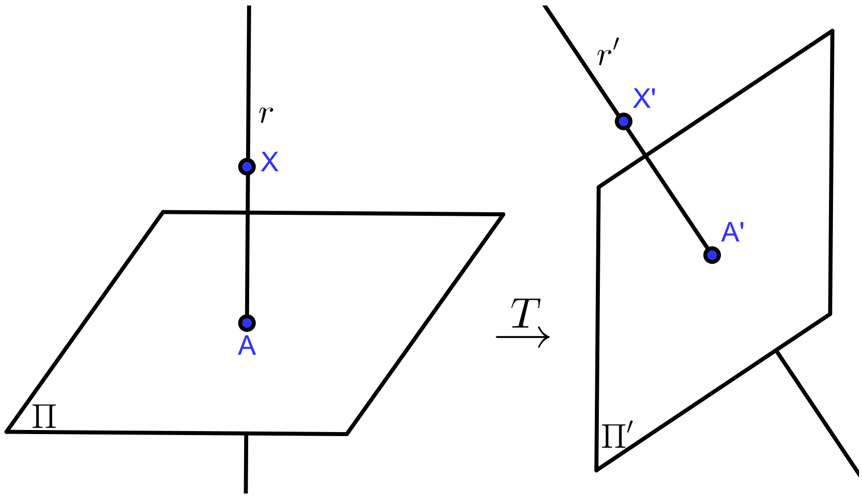


Figura 3.4: Imagens da reta r, dos pontos A, X e do plano por T

Finalmente, dados dois pontos arbitrários $X, Y \in E$ e assumindo $X = T(T^{-1}(X))$ e $Y = T(T^{-1}(Y))$, então

$$d(X, Y) = d(T(T^{-1}(X)), T(T^{-1}(Y))) = d(T^{-1}(X), T^{-1}(Y)).$$

Portanto, $T^{-1} : E \to E$ é uma isometria. $\square$

Teorema 3.0.11. *Uma isometria do espaço que deixa fixos quatro pontos não coplanares é a função identidade.*

Demonstração. Tomando os pontos fixos A, B, C e D não coplanares e a isometria $T : E \to E$. Denotemos por Π e Π' os planos determinados pelos pontos A, B, C e A, C, D, respectivamente. A isometria T, em decorrência do Teorema 2.5.1, deixa fixo todos os pontos de Π e de Π'. Faça-se agora X um ponto do espaço, não pertencente a Π e nem a Π'. Dizemos que por X passa uma reta que não é paralela a nenhum deses planos e encontra Π e Π' nos pontos P e Q, respectivamente. Assim, $T(P) = P$ e $T(Q) = Q$. Usando o Lema 1.2.1.1 temos que T, restrita a essa reta, é a identidade, então $T(X) = X$. Portanto, T deixa fixo todos os pontos do espaço, ou seja, T é a função identidade. $\square$

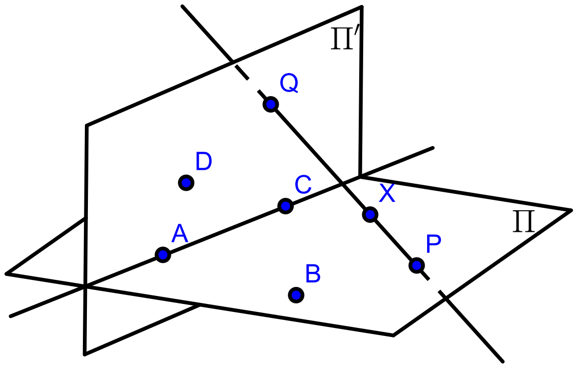


Figura 3.5: Isometria que deixa quatro pontos fixos

3.1 Simetria em torno de um ponto

Definição 3.1.1. *Fixado um ponto A no espaço E, a simetria em torno de A é a função $S_A : E \to E$ que faz corresponder a cada ponto $X \in E$ o ponto $X' = S_A(X)$ tal que A é o ponto médio do segmento XX'.*

Teorema 3.1.1. *Seja A um ponto arbitrário do espaço E, então toda simetria $S_A : E \to E$ é uma isometria.*

Demonstração. Tomando os pontos $X, Y \in E$, se X, Y e A forem não-colineares eles estabelecem um plano Π, restrito ao qual S_A é ainda a simetria em torno de A, assim $d(S_A(X), S_A(Y)) = d(X, Y)$ pelo Teorema 2.1.1.

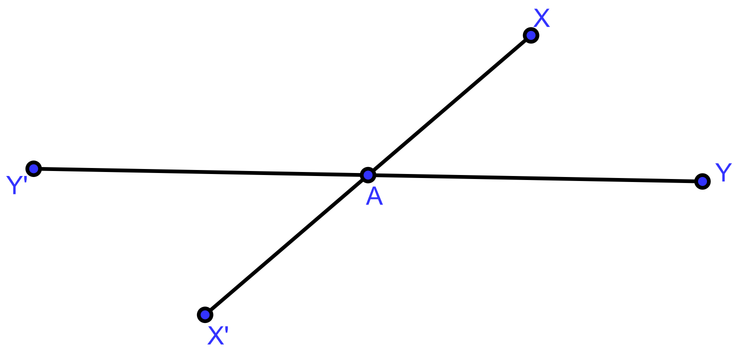


Figura 3.6: Simetria em torno de A

Se X, Y e A forem colineares, esta igualdade segue-se da Definição 1.2.1.1. $\square$

3.2 Reflexão em torno de um plano

Definição 3.2.1. *Seja $\Pi \subset E$ um plano. A reflexão em torno de Π é a função $R_\Pi : E \to E$ que associa a cada ponto $X \in E$ o ponto $X' = R_\Pi(X)$ tal que Π é o plano mediador do segmento XX'. Isto significa que XX' é perpendicular a Π e, além disso, se $A = XX' \cap \Pi$ então $\overline{XA} = \overline{AX'}$. Então para todo ponto $B \in \Pi$ tem-se também $\overline{XB} = \overline{BX'}$*

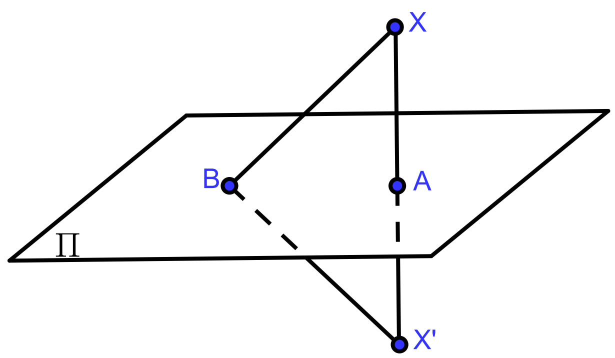


Figura 3.7: Reflexão em torno de Π

Teorema 3.2.1. *Seja Π um plano arbitrário do espaço E, então toda reflexão $R_\Pi : E \to E$ é uma isometria.*

Demonstração. Suponhamos que X e Y são pontos quaisquer do espaço, com $X' = R_\Pi(X)$ e $Y' = R_\Pi(Y)$. Se X e Y acham-se ambos em Π então $X' = X$ e $Y' = Y$ então, $d(X', Y') = d(X, Y)$. Se um desses pontos, proponhemos que seja X, não está em Π, tomaremos o plano Π' contendo a perpendicular XX' e o ponto Y. Assumindo $r = \Pi \cap \Pi'$. Restrita ao plano Π', R_Π coincide com a reflexão $R_r : \Pi' \to \Pi'$, em torno de r. Então, pelo Teorema 2.2.1 teremos que $d(X', Y') = d(X, Y)$. $\square$

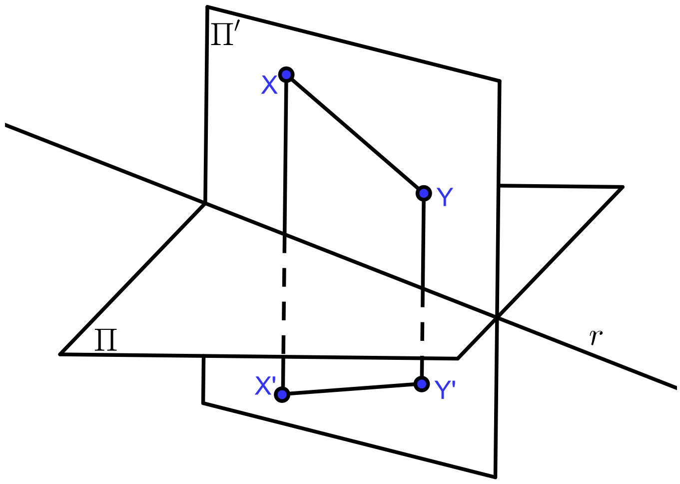


Figura 3.8: R_{Π} é uma isometria

3.3 Rotação em torno de uma reta

Definição 3.3.1. *Sejam r uma reta e $\alpha = A\widehat{O}B$ um ângulo cujo vértice O pertence a r e cujos lados estão sobre um plano perpendicular a r. O ângulo α é considerado orientado, isto é, subtende-se que OA é o primeiro lado e OB é o segundo. Isto posto, definimos a rotação de ângulo α em torno da reta r como a função $\rho = \rho_{r,\alpha} : E \to E$ que faz corresponder a cada ponto X o ponto $X' = \rho(X)$ determinado pelas seguintes condições:*

1) X' pertence ao plano Π que passa por X e é perpendicular a r;

2) se O é o ponto de interseção desse plano Π com r, tem-se $\overline{OX} = \overline{OX'}$;

3) o ângulo orientado $X\widehat{O}X'$ é igual a α.

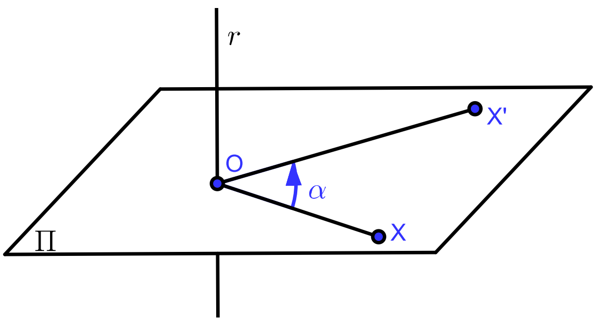


Figura 3.9: Rotação em torno de r

Teorema 3.3.1. *Seja r uma reta do espaço E e α um ângulo orientado dado, então toda rotação $\rho = \rho_{r,\alpha} : E \to E$ é uma isometria.*

Demonstração. Vamos pegar dois pontos arbitrários $X, Y \in E$ e suponhemos $X' = \rho(X), Y' = \rho(Y)$, teremos que mostrar que $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$. Faça-se Π o plano perpendicular a r, o qual possui os pontos X e X'. Tomando os pontos Y_0 e Y_0', como projeções ortogonais sobre Π dos pontos Y e Y' respectivamente. O segmento de reta XY é a hipotenusa do triângulo retângulo XYY_0, cujos catetos são XY_0 e Y_0Y. Analogamnete, $X'Y'$ é hipotenusa do triângulo retângulo $X'Y'Y_0'$, cujos catetos são $X'Y_0'$ e $Y_0'Y'$. Contudo, $\overline{X'Y_0'} = \overline{XY_0}$ porque ρ, restrita ao plano Π, é uma isometria, pois coincidira com a rotação de centro $O = r \cap \Pi$ e ângulo α. Também temos, $\overline{YY_0} = \overline{Y'Y_0'}$ pois Y e Y' pertencem ao mesmo plano perpendicular a r. Portanto, $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$, por serem triângulos congruentes. $\square$

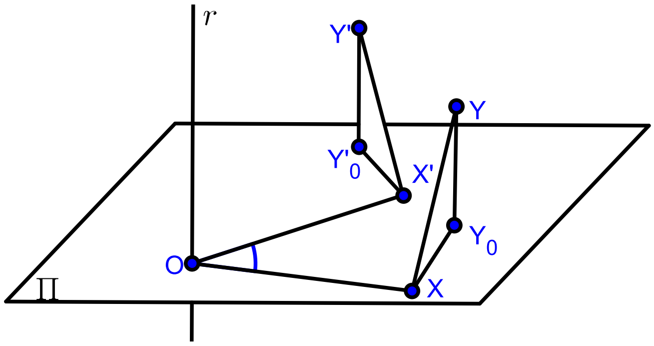


Figura 3.10: $\rho_{r,\alpha}$ é uma isometria

3.4 Translação

Definição 3.4.1. *Sejam A, B pontos distintos do espaço. A translação $T_{AB} : E \to E$ é a função que faz corresponder a cada ponto $X \in E$ o ponto X' tal que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB}$, ou seja, tal que $\overline{XX'} = \overline{AB}$, XX' é paralelo a AB e o sentido de percurso $X \to X'$ coincide com o sentido $A \to B$.*

Definição 3.4.2. *Dois segmentos de reta AB e CD no espaço chamam-se equipolentes quando têm o mesmo comprimento, são paralelos ou então colineares e o sentido $A \to B$*

coincide com o sentido $C \to D$.

Estas condições acima citadas, se agrupam em uma única, a de que os pontos médios dos segmentos de reta AD e BC coincidem.

Teorema 3.4.1. *Seja A e B pontos distintos do espaço E, então toda translação $T_{AB} : E \to E$ é uma isometria.*

Demonstração. Dados os pontos X e Y, com $X' = T_{AB}(X)$ e $Y' = T_{AB}(Y)$, daí podemos observar que $\overrightarrow{XX'} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{YY'}$, assim os segmentos XX' e YY' são equipolentes, ou seja, os pontos médios de XY' e $X'Y$ coincidem. Isto consiste também que $X'Y'$ e XY são equipolentes. Em particular, $\overline{X'Y'} = \overline{XY}$. $\square$

3.5 Reflexão com deslizamento

Definição 3.5.1. *A reflexão com deslizamento é uma isometria do tipo $R = T_{AB} \circ R_\Pi = R_\Pi \circ T_{AB}$, onde $R_\Pi : E \to E$ é a reflexão em torno de um plano Π e T_{AB} e o segmento AB é paralelo ao plano Π ou está contido nele.*

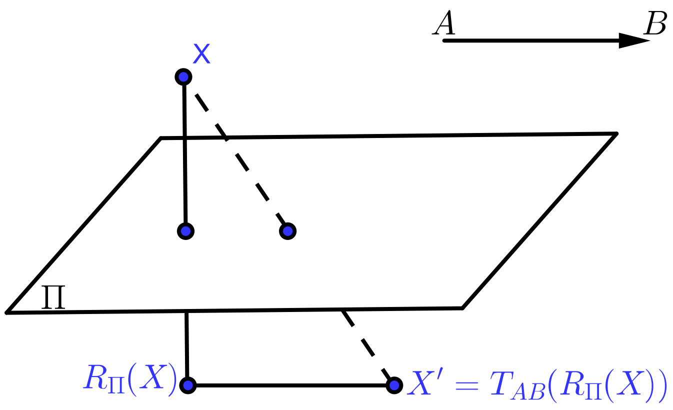


Figura 3.11: Reflexão com deslizamento

Segue do Corolário 1.2.1, que a reflexão com deslizamento é uma isometria.

3.6 Isometria helicoidal

Definição 3.6.1. *Uma isometria helicoidal* $T : E \to E$ *é a composta* $T = T_{AB} \circ \rho_{r,\alpha} = \rho_{r,\alpha} \circ T_{AB}$ *de uma rotação em torno da reta* r *com uma translação* T_{AB}*, onde o segmento* AB *é paralelo à retra* r *ou está contido nela.*

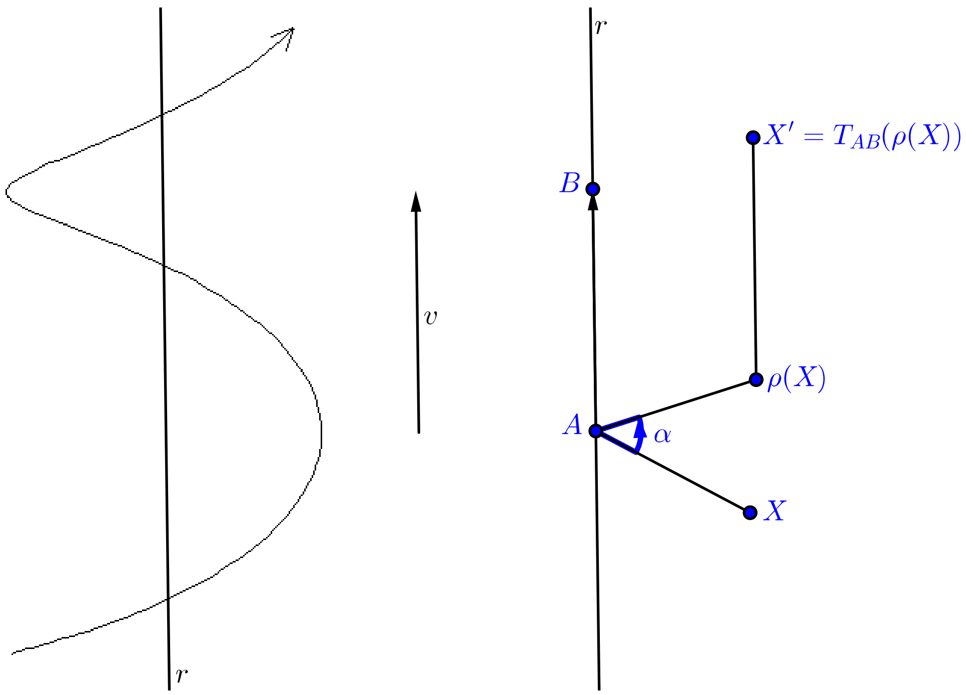
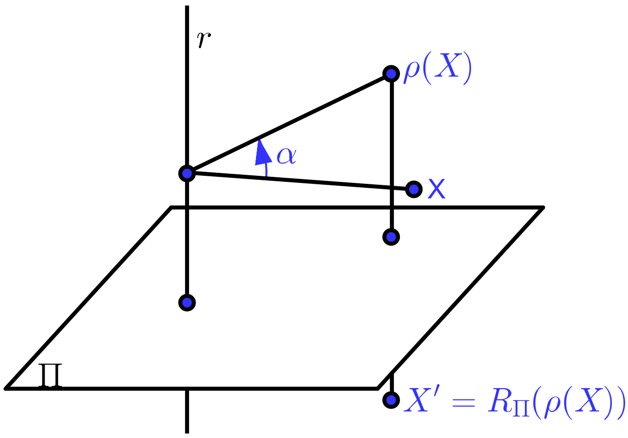


Figura 3.12: Isometria helicoidal

A isometria helicoidal de fato preserva distância pois é a composta de duas isometrias.

3.7 Rotação refletida

Definição 3.7.1. *Uma rotação refletida* $T : E \to E$ *é a composta* $T = R_\Pi \circ \rho_{r,\alpha} = \rho_{r,\alpha} \circ R_\Pi$*, onde* R_Π *é a reflexão em torno de um plano* Π *e* $\rho_{r,\alpha}$ *é a rotação de ângulo* α *em torno de uma reta* r *perpendicular a* Π*.*



Quando $\alpha = 180°$, a rotação refletida coincide com a simetria em torno do ponto O, interseçãode Π com r, conforme à Definição 2.5.1.

Pelo mesmo fato da isometria helicoidal e da reflexão com deslizamento, a rotação refletida é uma isometria.

3.8 Isometrias Próprias e Impróprias no Espaço

Primeiramente definiremos o que é um movimento no espaço, para podermos entender a idéia de isometrias próprias e impróprias no mesmo.

Definição 3.8.1. *Um movimento no espaço é uma família de isometrias $H_t : E \to E$, uma para cada $t \in [0,1]$, com as seguintes propriedades:*

1) $H_0 =$ identidade;

2) Para cada ponto P fixado no espaço, os pontos $H_t(P)$ variam continuamente com t, descrevendo uma curva, quando t vai de 0 a 1.

Definição 3.8.2. *Uma isometria $T : E \to E$ chama-se própria quando é o resultado final de um movimento, ou seja, quando existe um movimento $H_t : E \to E$ tal que $H_1 = T$. Caso contrário diremos que a isometria é imprópria.*

É fácil ver que, se $K_t, L_t : E \to E$ são movimentos no espaço então a composta formada por elas ainda continuará sendo um movimento, ou seja, $H_t = K_t \circ L_t$ é um movimento. Teremos também que suas inversas K_t^{-1}, L_t^{-1} continuarão sendo movimentos.

Segue-se daí que a composta $S \circ T : E \to E$ de duas isometrias próprias S, T e a inversa T^{-1} de uma isometria própria T são ainda isometrias próprias. De maneira alternativa, se uma das ismotrias S, T é própria e a outra é imprópria então a composta $R = S \circ T$ é imprópria.

Alguns exemplos de isometrias próprias no espaço são: Translações, Rotações e Isometrias helicoidais. E alguns exemplos de isometrias impróprias no espaço são: Reflexões, Reflexões com deslizamento e Rotações refletidas.

Proposição 3.8.1. *Uma isometria própria, diferente da identidade, que admite algum ponto fixo é a rotação em torno de uma reta.*

Demonstração. Tomando uma isometria própria $T : E \to E$ diferente da identidade e um ponto O tal que $T(O) = O$. Já que $T \neq$ identidade, então existe um ponto A de modo que $A' = T(A) \neq A$. Faça-se $A'' = T(A')$. Assim $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$, portanto teremos $A'' \neq A'$. Analisaremos as posições relativas dos pontos A, A' e A''. Há três situações possíveis, no entanto somente duas podem acontecer.

(i) A, A' e A'' são pontos distintos em uma mesma reta r.

Assim sendo, a reta r seria transformada em si mesma por T, então a restrição de T a r seria uma isometria, ou seja, $T|_r : r \to r$ é uma isometria. Visto que $A'' \neq A$, essa isometria não seria a reflexão em torno de um ponto de r. Logo, seria atravéz do Teorema 1.2.2.2 a translação $T_{AA'} : r \to r$. Como $T_{AA'}$ não tem ponto fixo, o ponto O não pertnece a reta r. Se tivermos $\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''} > 0$, os três pontos colineares A, A' e A'' ficariam na mesma circunferência de centro O, o que é um absurdo. Portanto essa primeira situação não ocorre.

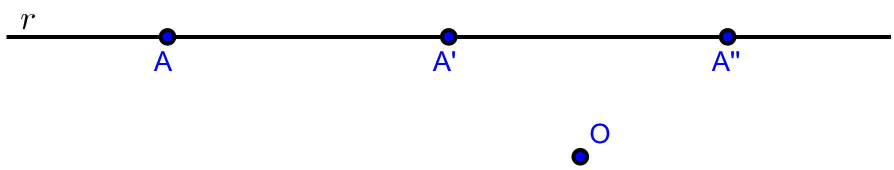


Figura 3.13: A, A' e A'' são colineares

(ii) $A'' = A$.

Tomando r como a reta que possui os pontos A, A' e M o ponto médio do segmento de reta AA'. A restrição de T à reta r é a reflexão em torno de M. Pegando o plano Π perpendicular à reta r e que passa por M, teremos que este será transformado por T nele mesmo. Assim a restrição $T' = T|_\Pi$ é uma isometria desse plano, que admite o ponto fixo M. Usando o Teorema 2.5.5, T' pode ser a identidade, uma rotação em torno de M ou a reflexão em torno de uma reta $s \subset \Pi$, com $M \in s$. Se $T' =$ identidade, então assumindo um ponto $A \neq M$ em r e três pontos não-colineares $B, C, D \in \Pi$, poderiamos observar que T coincidiria com a reflexão R_π nesses quatro pontos, onde $T = R_\Pi$ e T seria imprópria, o que contradiz a hipótese. Se T' fosse uma rotação de ângulo $\alpha \neq 0$ em torno de M, assim pegando em Π um ponto $B \neq M$, veríamos que T coincidiria, nos quatro pontos não-colineares A, M, B e B', com a rotação refletida $R_\Pi \circ T'$, portanto seria imprópria, o que também contradiz a hipótese. Logo só nos resta a alternativa de T' ser a reflexão em torno de uma reta $s \subset \Pi$. Então T coincide, nos pontos A, A' e em todos os pontos de s, com a rotação de 180° em torno de s.

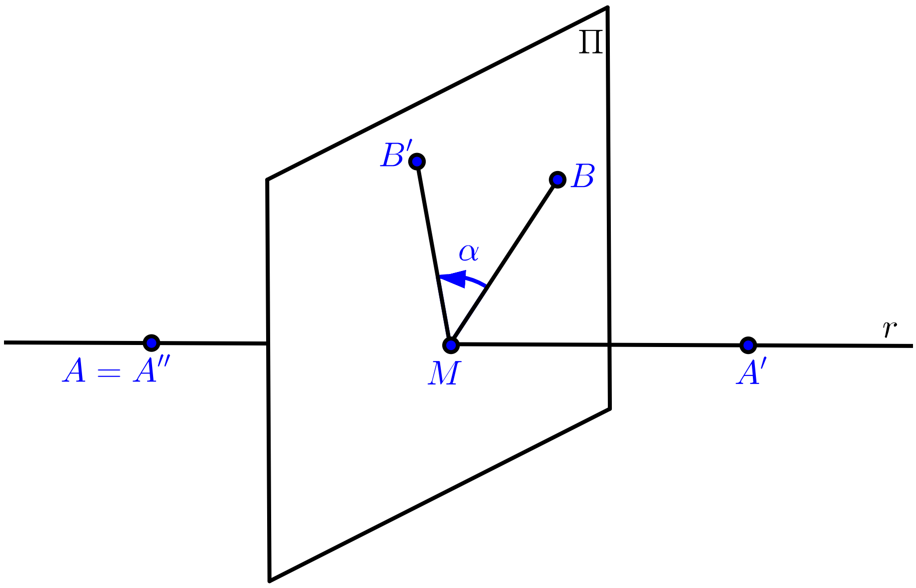


Figura 3.14: $A'' = A$ e A' são colineares

(iii) Os pontos A, A' e A'' são não-colineares.

Tomando o plano Π estabelecido pelos pontos A, A' e A''. Se o ponto Fixo $O \in \Pi$, então teremos que

$$\overline{OA} = \overline{OA'} = \overline{OA''}$$

e

$$\overline{AA'} = \overline{A'A''},$$

assim podemos observar que os triângulos OAA' e $OA'A''$ tem os lados respectivos iguais, por esse motivo vamos obter $A\widehat{O}A' = A'\widehat{O}A'' = \alpha$. Deste modo, a isometria própria T coincide, nos três pontos não-colineares A, A' e A'', com a rotação de ângulo α em torno da reta perpendicular ao plano Π e que passa por O.

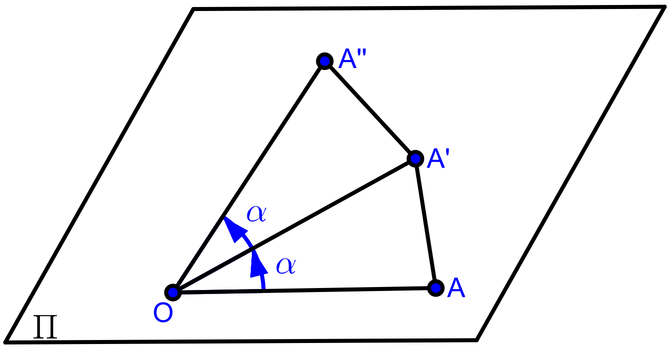


Figura 3.15: A, A' e A'' são não-colineares com $O \in \Pi$

Se o ponto $O \notin \Pi$, iremos tomar a reta r baixada por O e perpendicular ao plano dado. Faça-se P o pé dessa perpendicular. Os triângulos retângulos OPA e OPA' têm o cateto OP em comum e as hipotenusas OA e OA' possuem o mesmo comprimento, logo $\overline{PA} = \overline{PA'}$, pois os triângulos retângulos citados anteriormente são congruentes pelo caso *cateto−hipotenusa*. Igualmente podemos ver que $\overline{PA'} = \overline{PA''}$. Como $\overline{AA'} = \overline{A'A''}$, notemos que os triângulos PAA' e $PA'A''$ tem os três lados respectivos iguais. Daí, $A\widehat{P}A' = A'\widehat{P}A'' = \alpha$. Portanto a isometria própria T coincide nos três pontos não-colineares O, A e A', com a rotação de ângulo α em torno da reta $r = OP$. $\square$

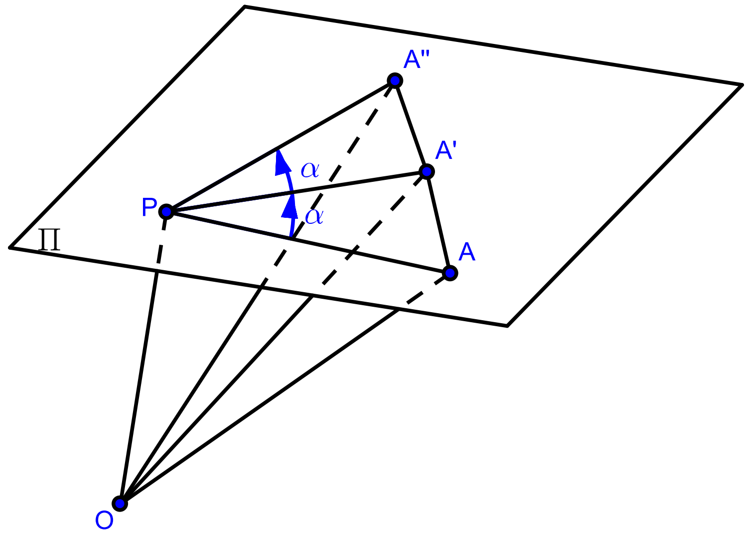


Figura 3.16: A, A' e A'' são não-colineares com $O \notin \Pi$

Proposição 3.8.2. *Uma isometria própria sem ponto fixo é uma translação ou uma isometria helicoidal.*

Demonstração. Tomando $T : E \to E$ como sendo uma isometria própria sem ponto fixo. Pegando um ponto $O \in E$ e pondo $P = T(O)$. Iremos compor T com a translação T_{PO}, onde vamos obter a isometria $S = T_{PO} \circ T : E \to E$, na qual continuará própria, tal que $S(O) = O$. Usando a Proposição 3.8.1, teremos que, ou $S =$ identidade e daí $T = T_{OP}$, ou seja, T é uma translação, ou então S é a rotação de ângulo α em torno de uma reta r que possui o ponto O. Assim, temos $T = T_{OP} \circ S$. Sejam Π o plano perpendicular a reta r que passa por O e Q o pé da perpendicular baixada de P sobre Π, então $T = T_{QP} \circ (T_{OQ} \circ S)$. Restrigindo a isometria $T_{OQ} \circ S$ ao plano Π, teremos que a mesma é a rotação de centro O e ângulo α seguida da translação T_{OQ}. Pelo Teorema 1.2.1.3, esta composição é uma rotação $\rho : \Pi \to \Pi$ com o mesmo ângulo α e com centro em outro ponto $M \in \Pi$. Se chamarmos de s a reta perpendicular ao plano Π e levantada por M, iremos poder observar que T se iguala em todos os pontos do plano Π e da reta s, com a isometria helicoidal $T_{QP} \circ \rho_{s,\alpha} : E \to E$, portanto T é igual a essa isometria helicoidal.

□

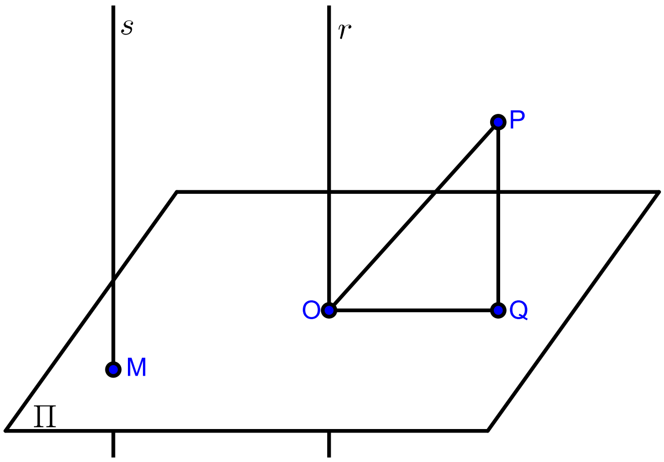


Figura 3.17: Isometria própria sem ponto fixo

Proposição 3.8.3. *Uma isometria imprópria $T : E \to E$ com ponto fixo é a reflexão em torno de um plano ou uma rotação refletida.*

Demonstração. Sejam O um ponto fixo de T e $S = S_O : E \to E$ a simetria em torno de O. Já sabemos que S é imprópria, assim pode ser considerada como rotação de 180° em torno de uma reta qualquer r e que passa pelo ponto O, seguida da reflexão em torno do plano perpendicular à reta r pelo mesmo ponto. Por consequência $S \circ T$ é uma isometria própria que tem o ponto O fixo. Pela Proposição 3.8.1, $S \circ T$ é a rotação em torno de uma reta r que passa por O ou é a identidade. Caso $S \circ T =$ identidade, teremos que $T = S^{-1} = S$, consequentemente T é uma rotação refletida. Agora, se $S \circ T = \rho_{r,\alpha} = \rho$, ou seja, $T = S \circ \rho$, nessa situação T coincide com a composta da rotação de ângulo $\alpha + 180°$ em torno da reta r com a reflexão em torno do plano Π, no qual é perpendicular a r pelo ponto O. Então, T é uma rotação refletida, ao menos que se $\alpha = 180°$. Nesta condição, a rotação com o ângulo $\alpha + 180°$ e em torno da reta r é a identidade e portanto T é a reflexão em torno do plano Π. $\square$

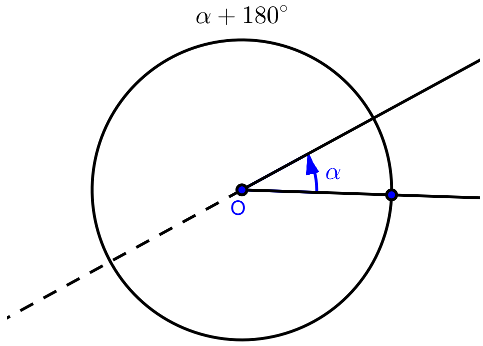


Figura 3.18: Isometria imprópria com ponto fixo

Proposição 3.8.4. *Uma isometria imprópria $T : E \to E$ sem ponto fixo é a reflexão com deslizamento.*

Demonstração. Pegando um ponto qualquer O no espaço tal que $P = T(O)$, podemos observar que a isometria $S = T_{PO} \circ T : E \to E$ é imprópria e tem o ponto O fixo. Pela Proposição 3.8.3, teremos que $S = R_\Pi$, ou seja, S é a reflexão em torno do plano Π passando por O, ou $S = R_\Pi \circ \rho_{r,\alpha}$, isto é, S é a composta da rotação de ângulo α em torno da reta r que possui o ponto O, com a reflexão em torno do plano Π, no qual é perpendicular à reta r. Assim sendo, $T = T_{OP} \circ R_\Pi$ ou $T = T_{OP} \circ R_\Pi \circ \rho_{r,\alpha}$. Se assumirmos o pé da perpendicular baixada pelo ponto O como Q, obteremos $T = T_{OQ} \circ T_{QP} \circ R_\Pi$ ou $T = T_{OQ} \circ T_{QP} \circ R_\Pi \circ \rho_{r,\alpha}$.

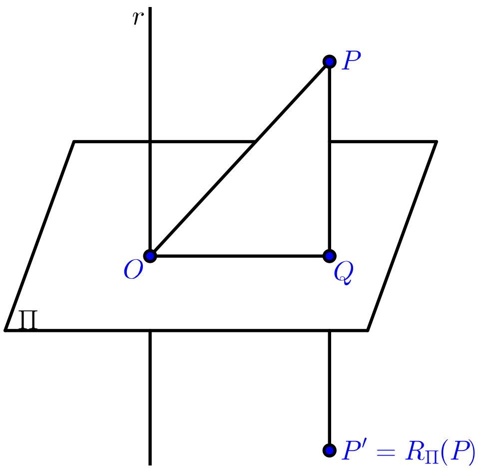


Figura 3.19: Isometria imprópria sem ponto fixo

Na prática, este último caso não ocorre, pelos seguintes motivos. Mas primeiro temos que observar que $T_{QP} \circ R_\Pi = R'_\Pi$, no qual o plano Π' é o perpendicular à reta r pelo ponto $M \in QP$, pois $T_{QP} \circ R_\Pi$ se iguala com R'_Π no ponto Q e em todos os pontos do plano Π'.

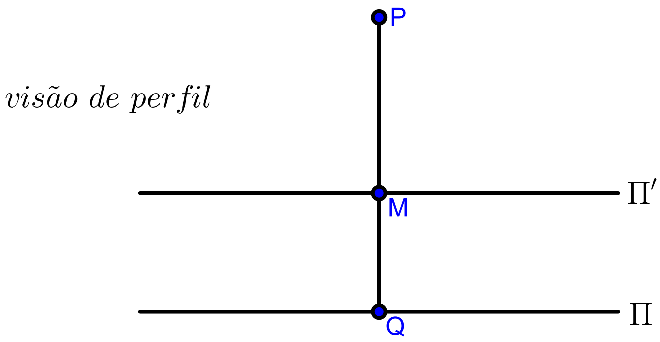


Figura 3.20: Visão de perfil da isometria imprópria sem ponto fixo

Então, assumindo a segunda alternativa iamos possuir a seguinte igualdade, $T = T_{OQ} \circ R'_\Pi \circ \rho_{r,\alpha}$. Consequentemente, quando restrita ao plano Π', teriamos $T = T_{OQ} \circ \rho_{r,\alpha}$. Daí usando o Teorema 1.2.1.3, teriamos T sendo uma rotação no plano Π', por conseguinte teria um ponto fixo, o que contradiz com nossa hipótese. Restando assim, a alternativa $T = T_{OQ} \circ T_{QP} \circ R_\Pi = T_{OQ} \circ R'_\Pi$. Como OQ é paraleo ao plano Π', concluímos que T é uma reflexão com deslizamento. $\square$

Teorema 3.8.1. *Existem apenas sete tipos de isometrias $T : E \to E$ do espaço E, a saber: Função Identidade, Translação, Rotação em torno de uma reta, Isometria Helicoidal, Reflexão em torno de um plano, Rotação refletida e Reflexão com deslizamento.*

Demonstração. Segue-se da Proposição 3.8.1 que existe a rotação em torno de uma reta, da Proposição 3.8.2 a existencia da translação ou da isometria helicoidal, da Proposição 3.8.3 obtemos a reflexão em torno de um plano ou a rotação refletida e da Proposição 3.8.4 temos a última isometria, a reflexão com deslizamento. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] Elon Lages Lima, *Isometrias*, RJ: Copyright, 2007.

[2] George E. Martin, *The Foundations of Geometry and the Non-Euclidean Plane*, NY: Springer-Verlag, 1975.