UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Bruna Cristina Soares do Nascimento

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem e Aplicações.

BELÉM - PA

Dezembro 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

Bruna Cristina Soares do Nascimento

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem e Aplicações

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva.

BELÉM - PA

Dezembro 2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

BRUNA CRISTINA SOARES DO NASCIMENTO

Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem e Aplicações.

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

____

Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva.

____

Prof. Dr. .

____

Prof. Dr. .

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ____________________

Dedicatória

Aos meus pais Manoel Fagundes, Nelma Soares e meu irmão Rodrigo Soares, que me educaram e ensinaram da melhor maneira possivél com exemplos maravilhosos e uma base cheia de amor,dedicação,amizade,compreensão,respeito e motivação nos estudos,meus exemplos de uma vida toda.

Agradecimentos

Muitas pessoas foram importantes nesse meu processo de aprendizagem,grandes amigos,colegas e professores.Mas antes de tudo agradeço a Deus pelo que tenho conquistado até hoje. Pela força e nunca me deixar desabar no momentos difícieis que as vezes me encontrava, me ajudando a superar barreiras e obstáculos todos os dias, por não me abandonar e sempre me proteger. Aos meus pais e irmãos que sempre me deram todo o apoio que eu precisava, sempre dispostos quando eu precisava.

A minha turma 2009 b ao qual aprendi valiosas lições que vou levar sempre comigo, aos alunos de outras turmas que torceram por mim.

Aos grandes professores que conheci ao longo do curso que contribuiram sem igual para minha formação,em especial ao meu orientador Prof. Dr. João Pablo Pinheiro da Silva, pela paciência,atenção,orientação e por me dar o privilégio de dividir o conhecimento comigo.

A Jonatan Abreu, Andrey Ribeiro e Helen Machado pela ajuda na revisão ortográfica e ajuda na digitalização,além da grande amizade que me concederam ,a Fernando Bruno pelo ajuda essencial quando eu precisei, Antônio André e André Lisboa pela grande ajuda que me deram principalmente no inicio do curso.

As todas pessoas que sempre me deram força e conselhos durante meu percurso acadêmico em especial a Rozalina Fagundes, Ivete, Dielly Castro, Juliana Matos, Edson Oliveira, Wellington Paiva,Maicon Silva, Wil Araujo, Francinéia Matos e a todos que me acompanharam durante o curso.

Obrigado a todos!

Epígrafe

"A natureza está escrita em linguagem matemática"

Galileu.

Resumo

Neste trabalho iremos abordar as equações diferenciais de primeira ordem, com a finalidade de introduzir métodos e conceitos de equações diferenciais para ajudar no desenvolvimento de aspectos essenciais no estudo e importância da modelagem em alguns fenômenos da natureza, tais como: interações entre espécieis, no qual mostraremos as equações de Lotka - Volterra e o efeito Allee em populações, o crescimento logistico e o estudo de modelagem em epidêmias.

Palavras-chave: Equações Diferenciais,interação,modelagem,população.

Abstract

In In this paper we will discuss ordinary differential equations of first order, aiming to introduce methods and concepts of ordinary differential equations to help in the development of essential aspects in the study and the importance of modeling some phenomena of nature such as species interactions, in which we will show the Lotka - Volterra equations and the Allee efects in population, the logistic growth and modeling study in epidemics.

Palavras-chave: Keywords - Keywords: Differential equations, interaction, modeling, population.

Conteúdo

Introdução

A modelagem matemática está fortemente presente para representar os fenômenos da natureza, e pra auxiliar nesse estudo utilizamos as equações diferenciais como ferramenta essencial.As equações diferenciais se classificam de acordo com grau, ordem, linearidade e tipo, sendo que no caso desse trabalho serão abordadas as equações diferenciais ordinárias de primeira ordem, seus diferentes tipos e técnicas de resolução, estudadas por grandes matemáticos. A importância das equações diferenciais ordinárias de primeira ordem para a modelagem de problemas envolvendo fenômenos da natureza, tais como: o crescimento logístico, onde estudamos populações que nem sempre crescem pois são afetadas por fatores limitadores, nesse processo relatamos o estudo numa população de peixes analisando a existência de valores de bifurgação, onde a população fica em equilibrio, se extinguee e sua valiosa importância para o ecossistema.Modelos de epidêmias onde são essênciais o uso das equaçãos diferenciais ordinárias, foram feitas observações em uma população dividida em indíviduos infectados e não - infectados e como as equações diferenciais sao muito uteis para descobrir quando a população toda ficará doente.

Se tratando de relação e interação entre espécies, estudamos os efeitos da lei de Alle e as equações de lotka - volterra. A lei de Alle nos mostra as relações positivas entre espécieis entre indíviduos com certa habilidade e o número de indíviduos, e já nas equações de Lotka - Volterra utilizamos as EDO's para estudar a interação entre presa e predador e atráves da análise qualitativa para esboçar os gráficos de campos de direções e mostramos que nesse caso sempre há oscilações.

Nas aplicações que foram apresentadas, utilizamos a análise qualitativa pois nem sempre é possível obter a resolução por meios análiticos, levando isso em conta o meio da análise qualitativa é um caminho essencial para esse determinado estudo.

Capítulo 1

Equações Diferenciais

1.1 Um pouco da história das Equações Diferenciais

O desenvolvimento das equações diferenciais faz parte do estudo de uma forma geral da matemática. Para conhecer bem as equações diferenciais, nada melhor que conhecer um pouco dos matemáticos que atuaram no ínicio do desenvolvimento do estudo desse ramo da matemática.

Isaac Newton (1642 - 1727) iniciou o desenvolvimento das equações diferenciais com seus estudos de calculo e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) no periodo do século $XVII$. Newton cresceu na Ingralerra, estudou em Trinity Colege, em Cambridge, foi professor de matemática na cadeira *Lucasian*, em 1664. Em 1665, fez algumas descobertas sobre o cálculo e leis da mecânica que circulavam só entre seus amigos, pois Newton não era muito receptivo a críticas e só começou a publicar seus trabalhos apartir de 1687 quando surgiu *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, o seu livro maior famoso.No entanto, mesmo não se aplicando muito nos estudos de Equações Diferenciais, sua contibuição no cálculo e explanação dos principios básicos da mecânica serviram de base para as aplicações que surgiram no século XVIII. No decorrer dos estudos, foram adquirindo conhecimento mais amplo e notação para a derivada, que logo veio aparecer nas equações.

Também observaram que achar as soluções dessas equações não era uma tarefa fácil, pois simplificações e outras manipulações ajudavam, mas não o suficiente. Classificou as Equações Diferenciais de Primeira Ordem de acordo com as formas $\dfrac{dy}{dx} = f(x)$, $\dfrac{dy}{dx} = f(y)$ e $\dfrac{dy}{dx} = f(x, y)$ ao qual desenvolveu um método por séries infinitas, se $f(x, y)$ fosse polinômio em x e y.

Outro matemático importante foi Leibniz, nasceu em Leipzig, com 20 anos terminou seu doutorado na Universidade de Altford, era autodidata em matemática e com isso chegou a resultados importantes do cálculo por via independente, entretanto, posteriores a Newton. Mas foi o primeiro a publica

- los em 1684,tinha inteiramente consciência do poder de uma boa notação matemática e a notação que usamos para a derivada $\frac{dy}{dx}$ e para a integração foram implantadas por ele. Em 1691, descobriu um método de separação de variáveis e redução de equações separavéis e técnicas de resolução de Equações Diferenciais de Primeira Ordem em 1694.

Nos primeiros meados do século XVIII, surge uma nova legião de pesquisadores de Equações Diferenciais, onde começaram a fazer aplicações a problemas de ciências físicas e astronomia. Dois matemáticos que contribuiram bastante para o desenvolvimento de técnicas de resolução de Equações Diferenciavéis e de ampliação de aplicações dessas Equações Diferenciais, foram os irmãos Bernoulli Jakob(1954 - 1705) e Johann (1667 - 1748) da basiléia. Com assistência do cálculo formularam como as Equações Diferenciais muitos dos problemas da mecânica e métodos de resolução para tais equações.

A braquistócrona por exemplo,foi um dos problemas que obteve contribuição dos irmãos Bernoulli, e que levou a desentendimento entre ambos. Inicilamente o problema da braquistócrona foi resolvido por Leibniz e Newton, além de resoluções dos irmãos Bernoulli. Conta - se, mais não há relatos de que seja verdade, que Newton ouviu falar do problema da bacristócrona no final da tarde, depois de um dia cansativo, e que após o jantar achou a solução. Publicando em sigilo a resolução e Johann Bernoulli exclamou "pela garra se conhece o leão".

Surge em meados do século XVIII, o maior matemático denominado como Leonhard Euler (1707 - 1783)que generalizou e considerou as técnicas já existentes e criou novas e poderosas técnicas para atacar grandes famílias de equação, e usando seus conhecimentos de função, desenvolveu métodos de resolução para vários tipos de Equações. Euler, identificou a condição de exatidão das Equações Diferenciais de Primeira Ordem em (1734 - 1735), desenvolvendo a teoria dos fatores de integração, novas funções baseadas em soluções em séries de tipos em especial de Equações Diferenciais e apresentou a solução geral das Equações Lineares com coeficientes constantes.

Joseph - Louis Lagrange(1736 - 1813) e Pierre - Simon Laplace (1749 - 1817), grandes matemáticos franceses, trouxeram no século XVIII, grandes contribuições à teoria das Equações Diferenciais Ordinarias e colocaram em primeira mão, um tratamento científico para as Equações Diferenciais Parciais. A Equação $u_{xx} + u_{yy} = 0$, da fisica - matemática, chamada de equação da potência, é a mais famosa Equação Diferencial Parcial onde os indices mostram as derivadas parciais,conhecida como a equação de Lagrange.

A obra notável de Lagrange, "*Mécanique analytique*"contém equações gerais do movimento de um sistema dinâmico, conhecidas como equações de Lagrange. A conduta de Lagrange e Laplace sintetiza duas filosofias da matemática. Para Lagrange a matemática era uma arte que justificava sua própria existência; para Laplace, a natureza era o elemento indispensável e a matemática, uma ferramenta para compreender seus segredos. No fim do século XVIII, surgiram muitos métodos elementares de resolução de Equações Diferenciais Ordinárias e inicio do séc. XIX a curiosidade em investigar questões teóricas de existência e unicidade e métodos baseados em série de potências.

Muitas Equações Diferenciais relutaram a soluções por meio analítico, levaram à investigações de métodos numéricos de integração númerica de aproximações. No auge de 1900,já existiam eficazes métodos de integração numérica, mas sua implementação estava rigorosamente restringida pela necessidade de execução de cálculos manuais ou uso de equipamentos de computação primitiva. Com o desenvolvimento dos computadores, ampliou o vasti número de problemas que podem ser investigados com eficiência por meio de métodos numéricos.

Esforços matemáticos nas áreas de Equações Diferenciais Ordinárias e Parcial foi conduzido ao desenvolvimento de uma teoria sistematica e ao mesmo tempo geral e rigorosa. Tendo como objetivo desenvolver métodos adequados para manusear classes de equações.

Definição 1.1 *Denominaremos de Equação Diferencial, uma equação que contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes.*

1.2 Classificação

Podemos classificar as equações diferenciais de várias maneiras úteis, tais como:

1.2.1 Equações Diferenciais Ordinárias e Parciais

Se a equação contém as derivadas de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, a denominamos de equação diferencial ordinária.

Exemplo 1.1 $y'' + 3y + 6y = sin(x)$ *(Ordinária)*

Uma equação que contém as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes em relação a duas ou mais variavéis independentes, a denominamos de equação diferencial parcial.

Exemplo 1.2 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $z = z(x, y)$ *(Parcial)*

1.2.2 Sistemas

Quando existe uma única função para determinarmos, utilizamos uma equação apenas. Mas quando se trata de duas ou mais funções ja utilizamos um sistema de equações, como exemplo as equações de Lotka - Volterra, que são muito importante em modelagem ecológica, que têm a forma:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - \alpha xy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + \gamma xy \end{cases}$$

onde temos que $x(t)$ e $y(t)$ são as populações das espécies presa e predadora, e as constantes a, α, c e γ baseadas em observações empíricas que dependem da espécie em estudo.

1.2.3 Ordem e Grau

Determinamos a ordem de uma equação diferencial como a derivada de maior ordem que aparece na equação. Chamamos de grau de uma equação diferencial o valor do expoente para a derivada de maior valor.

Exemplo 1.3 $y'' + 3y' + 6y = sin(x)$ *que têm ordem* 2 *e grau* 1.

Exemplo 1.4 $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ *com ordem* 1 *e grau* 1.

1.2.4 Equações Lineares e Não Lineares

Uma importante classificação das Equações Diferenciais são quanto a linearidade.Uma EDO é dita linear se F é uma função linear das variveis.

$$y, y', ...y^n$$

Exemplo 1.5 $F(t, y, y', ..., y^{(n)}) = 0.$

Dessa forma se aplica as EDO's. No caso geral de uma EDO de ordem n temos que:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + ... + a_n(t)y = g(t).$$

Uma equação que não se encaixa na equação acima, é uma equação dita não - linear, como a equação $y''' + 2e^t y'' + yy' = t^4$ *que é não linear devido a expressão* yy'.

1.3 Solução de uma equação diferencial

Encontrar uma solução para uma equação diferencial é achar uma função que satisfaça identicamente a equação.Sendo que uma equação diferencial admite uma solução geral ou soluções particulares.

Exemplo 1.6 $y(x) = e^{-x}$ *é uma solução particular de* $y' + y = 0$ *e* $y(x) = Ce^x$ *é a solução geral de* $y' + y = 0$.

Exemplo 1.7 $y(x) = sin(x)$ *é uma solução particular de* $y'' + y = 0$ *e* $y(x) = Asin(x) + Bcos(x) = 0$ *é a solução geral de* $y'' + y = 0$.

1.4 Equações Diferenciais Ordinárias

Uma equação Diferencial Ordinária é uma equação que envolve uma função incógnita $y = y(x)$*,sua variável independente e suas derivadas e que pode ser escrita da seguinte forma*

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), ..., y^{(n-1)}(x), y^{(n)}(x)) = 0,\ n \geq 1,$$

onde a equação está representando a relação entre a variável x *e os valores de* y *nas suas* n *derivadas* y^p*, com* $p = 0, 1, 2, ..., n$*.Ao substituirmos* y *por* $y(x)$ *reescrevemos a equação,logo*

$$F(x, y, y', y'', ..., y^n) = 0.$$

1.5 Solução de uma EDO

Solução Geral

Uma solução geral de uma EDO em um intervalo I é uma função da forma $\phi = \phi(x; c_1, ..., c_n)$ com n derivadas e definida em I e possuindo n constantes arbitrárias c_i, ou seja para cada $(c_1, ..., c_n) \in \mathbb{R}^n$, ϕ é soluçaõ da EDO.

Solução Particular

É uma solução que pode ser reduzida da solução geral, quando atribuimor valores as constantes arbitrárias $(c_1, ..., c_n)$.

Solução Singular

É uma solução em que não podemos reduzir da solução geral de uma EDO.

Capítulo 2

Equações Diferenciais de Primeira Ordem

Definição 2.1 *Uma equação diferencial de primeira ordem pode ser escrita da seguinte forma:*

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y). \tag{2.1}$$

Onde f é uma função dada de duas variáveis, sendo que o objetivo é determinar se tal função existe e, nesse caso, desenvolver métodos para encontrá-la.

2.0.1 Equações Lineares

Se a função f em (2.1) depender linearmente da variável dependente y, então a equação (2.1) é dita uma equação linear de primeira ordem.

$$\frac{dy}{dt} = -ay + b.$$

Nesse caso a e b são constantes dadas. Na sua forma geral, obtida substituindo-se os coeficientes a e b na (2.1) por funções arbitrárias de t. Assim temos uma forma padrão.

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = g(t).$$

onde p e g são funções dadas da variável independente t. A equação (2.1) pode ser resolvida pelo método de integração, sendo $a \neq 0$ e $y \neq \frac{b}{a}$, podemos escrever a equação na forma.

$$\frac{dy/dt}{y-(b/a)} = -a$$

Integrando temos,

$$ln\,|y-(b/a)| = ce^{-at}$$

onde a solução geral será:

$$y = (b/a) + ce^{-at}.$$

Há equações que não se torna facil encontrar uma solução tão facilmente, nesse caso utilizamos o método do fator integrante.

Exemplo 2.1 *Tomemos a equação* $y' + y = te^{-t} + 1$

Temos que:

$p(t) = 1$

$q(t) = te^{-t} + 1$

Dessa forma, supondo a equação valida,multiplicamos por uma função $\mu(t)$

$$\mu(t)y' + \mu(t)y = (te^{-t} + 1)\mu(t)$$

Vamos determinar o fator integrante

$$\begin{aligned} (\mu(t)y)' &= \mu(t)y' + \mu(t)y \\ \mu(t)'y &= \mu(t)y \end{aligned}$$

Supondo y positiva, temos que:

$$\begin{aligned} \mu(t)' &= \mu(t) \\ \frac{\mu(t')}{\mu(t)} &= 1 \\ \int ln\mu(t)' &= \int 1 \\ ln\mu(t) &= t \\ \mu(t) &= e^{t} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\mu(t)y)' &= \left(te^{-t}+1\right)\mu(t)\\
\left(e^t y\right)' &= \left(te^{-t}+1\right)e^t\\
\int \left(e^t y\right)' &= \int t+e^t\\
e^t y &= \frac{t^2}{2}e^t + c\\
y &= \frac{t^2}{2}e^{-t} + 1 + ce^{-t}
\end{aligned}$$

Sendo essa a solução geral da equação.

2.0.2 Problema de Valor Inicial (PVI)

Quando obtemos uma equação onde segue-se certas condições adicionais, então a chamamos de Problema de Valor Inicial ou PVI. Tomamos como exemplo a equação abaixo:

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y' + 2y = te^{-2t} \end{cases}$$

temos que

$p(t) = 2$

$q(t) = te^{-2t}$

Dessa forma, supondo a equação valida, vamos determinar o fator integrante $\mu(t)$.

Multiplicamos a equação por $\mu(t)$

$$\mu(t)y' + 2\mu(t)y = \mu(t)te^{-2t}.$$

Vamos determinar o fator integrante

$$\begin{aligned}
(\mu(t)y)' &= \mu(t)y' + 2\mu(t)y\\
\mu(t)'y + \mu(t)y' &= \mu(t)y' + 2\mu(t)y\\
\mu(t)'y &= 2\mu(t)y\\
\frac{\mu(t)'}{\mu(t)} &= 2\\
ln\mu(t)' &= 2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int ln\mu(t)'dt &= \int 2dt\\
ln\mu(t) &= 2t\\
\mu(t) &= e^{2t}
\end{aligned}$$

Reescrevendo a equação (2.2)

$$\begin{aligned}
e^{2t}y' + 2e^{2t} &= e^{2t}(te^{-2t}) \\
\int e^{2t'} &= \int t \\
e^{2t}y &= \frac{t^2}{2} + c \\
y &= \frac{t^2}{2} + ce^{-2t}
\end{aligned}$$

Colocando nas condições iniciais

$$\frac{1}{2} + c.e^{-2} = 0 \tag{2.2}$$

$$ce^{-2} = -\frac{1}{2} \tag{2.3}$$

$$c = -\frac{1}{2} \tag{2.4}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-2t} \\
&= \frac{t^2 - 1}{2}e^{-2t}
\end{aligned}$$

2.1 Equações Separavéis

Tomando uma equação diferencial da forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$. *Com* M *sendo apenas uma função da variavél* x *e* N *apenas da varáivel* y, *com* $M = M(x)$ *e* $N = N(y)$ *respectivamente. Dessa forma e equação fica da seguinte forma*

$$M(x)dx + N(y)dy = 0$$

a qual chamaremos de equação separável. Isso ocorre pelo fato de podermos separar as funções, onde cada lado da igualdade possua uma função com apenas uma variável.

Exemplo 2.2 $\frac{dy}{dx} = y^2e^{3x}$

reescrevendo a equação temos

$$\begin{aligned} y^{-2}dy - e^{3x}dx &= 0 \\ \int y^{-2}dy - \int {}^{ex}dx &= c \\ \frac{-1}{y} - \frac{1}{3}e^{3x} &= c \\ y &= \frac{-1}{\frac{1}{3}e^{3x} + c} \end{aligned}$$

Exemplo 2.3 $\begin{cases} ycosx\frac{dy}{dx} = e^y sen2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$$\begin{aligned} ye^{-y}dy &= \frac{sen2x}{cox}dx \\ \int ye^{-y}dy &= \int \frac{sen2x}{cox}dx \\ \int ye^{-y}dy &= \int 2senxdx \end{aligned}$$

Utilizando o método de integração por partes

$u = y$, $du = dy$

$dv = e^{-y}$, $v = -e^{-y}$

$$\begin{aligned} \int ye^{-y}dy &= -ye^{-y} + \int e^{-y}dy \\ &= -ye^{-y} - e^{-y} + c \\ &= -(y+1)e^{-y} + c \end{aligned}$$

calculando a outra integral,temos

$$\int 2senxdx = -2cosx + c$$

Dessa forma

$$2cosx = (y+1)e^{-y} + c$$

Fazendo a substituição de $y(0) = 0$

$$2cos(0) = (0+1)e^{-0} + c, \textit{logo obtemos } c = 1$$

Portanto a solução do problema de valos inicial é

$$2cosx = (y+1)e^{-y} + 1$$

Exemplo 2.4 $y' = \dfrac{x}{y}$.
Escrevendo na forma diferencial,temos

$$xdx - ydy = 0, \textit{ ou até mesmo na forma } xdx = ydy.$$

Integrando cada termo,obtemos

$$\frac{x^2}{2} + C_1 = \frac{y^2}{2} + C_2.$$

Substituindo as constantes $C_1 + C_2 = C$.*Dessa forma,*

$$x^2 - y^2 = C.$$

Satisfazendo a diferencial dada.

2.2 Equações Homogêneas

Definição 2.2 *Uma função* $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é dita homogênea para um número real* n *quando para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$,*temos*

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x,y),\ \forall (x,y) \in A$$

Dessa forma a função é dita homogênea de grau n.

Exemplo 2.5 $f(x,y) = x^4 + x^3y$

$$\begin{aligned} f(\alpha x, \alpha y) &= (\alpha x)^4 + (\alpha x)^3(\alpha y) \\ &= \alpha^4x^4 + \alpha^3x^3\alpha y \\ &= \alpha^4x^4 + \alpha^4x^3y \\ &= \alpha^4(x^4 + x^3y) \end{aligned}$$

é homogênea de grau 4.

Exemplo 2.6 $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$

$$\begin{aligned} f(\alpha x, \alpha y) &= \sqrt[3]{(\alpha x)^3 + (\alpha y)^3} \\ &= \sqrt[3]{\alpha^3 x^3 + \alpha^3 y^3} \\ &= \sqrt[3]{\alpha^3 (x^3 + y^3)} \\ &= \alpha \sqrt[3]{x^3 + y^3} \end{aligned}$$

é homogênea de grau 1.

Exemplo 2.7 $f(x,y) = x^3 + y^3 + 1$

$$\begin{aligned} f(\alpha x, \alpha y) &= (\alpha x)^3 + (\alpha y)^3 + 1 \\ &= \alpha^3 x^3 + \alpha^3 y^3 + 1 \end{aligned}$$

Não podemos fatorar α, *logo a função não é homogênea.*
Uma equação da forma $M(x,y)$ *e* $N(x,y)$ *é dita homogênea quando essas funções são homogêneas de mesmo grau.*

Exemplo 2.8 $2xydx + y^2dy = 0$ *é homogênea.*
De fato,pois $M(x,y) = 2xy$ *e* $N(x,y) = y^2$ *ambas homogêneas de grau* 2.

Uma EDO é dita homogênea de primeira ordem se sua função for homogênea de grau 0, ou seja, a equação for da forma

$$f(tx, ty) = f(x, y).$$

Exemplo 2.9 $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ *Para todo* $t \in \mathbb{R}$ *de* $f(x,y)$*,temos*

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \frac{tx - ty}{tx + ty} \\ f(tx, ty) &= \frac{t(x - y)}{t(x + y)} \\ f(tx, ty) &= f(x, y) \end{aligned}$$

Logo a equação é homogênea

Vejamos o método da substituição para resolver equações homogêneas, tomamos como exemplo a equação $(x-y)dx + xdy = 0$. Primeiramente testamos sua homogêniedade

$$M(x,y) = x - y \text{ e } N(x,y) = x$$

Fazendo a substituição

$$\begin{aligned} x &= vy \\ dx &= vdy + ydv \end{aligned}$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} (vy-y)(vdy+ydv) + vydy &= 0 \\ (v-1)(vdy+ydv) + vydy &= 0 \\ \frac{(v-1)}{v^2}dv &= -\frac{dy}{y} \\ \int \frac{1}{v} - \frac{1}{v^2}dv &= -\int \frac{dy}{y} \\ lnv + (\frac{1}{v}) &= lnc - lny \end{aligned}$$

substituindo: $v = \frac{x}{y}$

$$\begin{aligned} lnx - lny + \frac{y}{x} &= lnc - lny \\ \frac{y}{x} &= lnc - lnx \\ \frac{y}{x} &= ln\frac{c}{x} \\ y &= xln\frac{c}{x} \end{aligned}$$

2.3 Equações Exatas

Definição 2.3 *Uma função de duas variáveis $f(x,y)$ com $M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$ e $N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ derivada parcial de f em relação a x e a derivada parcial de f em relação a y respectivamente. É dita exata quando podemos exibir uma função $F = F(x,y)$ onde a diferencial é igual*

$$dF = Fxdx + Fydy, \text{ se igualada a } Mdx + Ndy = 0$$

temos

$$dF = M(x,y)dx + N(x,y)dy.$$

Exemplo 2.10 $xdx + ydy = 0$ *é exata.*

Exemplo 2.11 $2xydx + x^2dy = 0$ *é uma diferencial exata com* $f(x,y) = x^2y$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2xy \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= x^2 \end{aligned}$$

Se dada uma equação diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *é dita exata quando a esquerda da igualdade é uma equação exata.*

Exemplo 2.12 $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$ *é exata, pois*

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \frac{1}{3}x^3y^3 \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) &= x^2y^3 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{3}x^3y^3\right) &= x^3y^2 \end{aligned}$$

Teorema *Uma condição necessaria e suficiente para que uma equação diferencial* $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ *seja denominada de equação exata ocorre a seguinte igualdade*

$$My = Nx$$

Exemplo 2.13 $x^2y^3dx + x^3y^2dy = 0$

Solução

$$M(x,y) = x^2y^3 \;\; N(x,y) = x^3y^2.$$

Então

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y}(x^2y^3) &= 3x^2y^2 \\ \frac{\partial N}{\partial x}(x^3y^2) &= 3x^2y^2 \end{aligned} \right.$$

equação exata.

Método de resolução

Exemplo 2.14 $(e^{2y} - ycos(xy))dx + (2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y)dy = 0.$

Solução

$$\begin{aligned} M(x,y) &= e^{2y} - ycos(xy) \\ N(x,y) &= 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) &= 2e^{2y} - cos(xy) + xysin(xy) \\
\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) &= 2e^{2y} - cos(xy) + xysin(xy)
\end{aligned}
$$

dessa forma constatamos que a equação é exata.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{2y} - ycos(xy)$$

integrando em relação a x

$$\text{com } g(y) \text{ constante em relação a } x \;\; f(x,y) = xe^{2y} - sin(xy) + g(y)$$

diferenciando em relação a y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2xe^{2y} - xcos(xy) + g'(y)$$

$$
\begin{aligned}
N(x,y) &= 2xe^{2y} - xcos(xy) + 2y \\
&= 2xe^{2y} - xcos(xy) + g'(y)
\end{aligned}
$$

Logo,

$$g'(y) = 2y$$

Dessa forma $g(y) = y^2 + C$

Na forma implicita, temos

$$xe^{2y} - sin(xy) + y^2 + C = 0$$

2.3.1 Equações Redutiveis

Equações não-exatas para equações exatas

Existem equações diferenciais $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *onde* $M_y \neq N_x$, *onde* $M_y = (\frac{\partial M}{\partial y})$ *e* $N_x = \frac{\partial N}{\partial x}$.*Podemos transformar equações não - exatas em exatas. Tomando a equação diferencial* $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ *com* $My \neq Nx$.

Consideremos $\frac{M_y - N_x}{N}$, *se a solução é uma função somente de variável x*

$$\frac{M_y - N_x}{N} = p(x).$$

Primeiramente, vamos encontrar o fator integrante $\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$, *e depois multiplicando junto a equação diferencial,obtemos*

$$\mu(x)M(x,y)dx + \mu(x)N(x,y)dy = 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\mu(x)M(x,y)\right) &= \mu(x)M_y \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)N(x,y)\right) &= \mu'(x)N + \mu(x)N_x = p(x)\mu(x)N + \mu(x)N_x \\
&= \mu(x)\left(\frac{M_y - N_x}{N}\right)N + \mu(x)N_x = \mu(x)\left(M_y - N_x + N_x\right) \\
&= \mu(x)M_y.
\end{aligned}$$

Dessa forma a equação passa a ser exata

Exemplo 2.15

$$xydx + (2x^2 + 3y^2 - 20)dy = 0 \tag{2.5}$$

Solução

$$\begin{aligned}
M(x,y) &= xy \Rightarrow M_y = x \\
N(x,y) &= 2x^2 + 3y^2 - 20 \Rightarrow N_x = 4x \\
M_y \neq N_x &
\end{aligned}$$

Utilizando

$$\begin{aligned}
\frac{M_y - N_x}{N} &= \frac{x - 4x}{2x^2 + 3y^2 - 20} \\
&= \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20} \neq p(x)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{N_x - M_y}{M} &= \frac{4x - x}{xy} \qquad (2.6)\\
&= \frac{3x}{xy} \qquad (2.7)\\
&= \frac{3}{y} = p(y) \qquad (2.8)
\end{aligned}$$

Com o fator integrante temos

$$\mu(y) = e^{\int \frac{3}{y}dy} = e^{3lny} = e^{lny^3} = y^3$$

multiplicando na equação (2.6)

$$\begin{aligned}(y^3)xydx + (y^3)(x^2 + 3y^2 - 20)dy &= 0 \\ xy^4dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)dy &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M(x, y) = xy^4 &\Rightarrow M_y = 4xy^3 \\ N(x, y) = 2^2y^3 + 3y^5 - 20y^3 &\Rightarrow N_x = 4xy^3\end{aligned}$$

Tornando a equação diferencial não - exata em exata.

2.3.2 Equação de Bernoulli

A equação diferencial na forma

$$y' + \varphi(x)y = \psi(x)y^n. \tag{2.9}$$

Onde $n \in \mathbb{R}$*, será denominada equação de Bernoulli com* φ *e* ψ *constantes. Quando utilizamos* $n = 0$ *teremos uma equação linear, ja no caso para* $n = 1$ *teremos uma equação separavel,e neste caso usaremos mudança de variavél*

$$t = y^{1-n}.$$

Quando $n \neq 0$ *e* $n \neq 1$*, e derivando em relação a* x*,obtemos*

$$\frac{dt}{dx} = (1 - n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1 - n}y^n\frac{dt}{dx}.$$

substituindo a equação (2.8)

Primeiro Passo

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-n}y^n\frac{dt}{dx} + \varphi(x)y &= f(x)y^n \\ \frac{1}{1-n}\frac{dt}{dx} + \varphi(x)y^{1-n} &= \psi(x) \\ \frac{1}{1-n}\frac{dt}{dx} + t\varphi(x) &= \psi(x)\end{aligned}$$

Segundo Passo : *Resolvendo a eq. linear.*

$$\frac{1}{1-n}\frac{dt}{dx} + t\varphi(x) = \psi(x)$$

Voltamos a substituição

$$t = y^{1-n}$$

Exemplo 2.16

$$x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2} \tag{2.10}$$

Solução

Fazendo a mudança de variavel

$$t = y^{1-n} \Rightarrow t = y^{1-(-2)} \Rightarrow t = y^3$$

utilizando a equação de Bernoulli

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= 3y^2\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{3y^2}\frac{dt}{dx} \end{aligned}$$

Substituindo na equação (2.11)

$$\begin{aligned} \frac{x}{3y^2}\frac{dt}{dx} + y &= \frac{1}{y^2} \\ \frac{x}{3}\frac{dt}{dx} + y^3 &= 1 \Rightarrow \frac{x}{3}\frac{dt}{dx} + t = 1 \end{aligned}$$

Agora ja na forma de uma equação linear e t, fica mais facil resolver.

2.3.3 Existência e Unicidade de Soluções de primeira ordem

Teorema 2.1 *Sejam $f(x, y)$ e $f_y(x, y)$, funções contínuas das variáveis x e y, em uma dada região R do plano xy, contendo o ponto (x_0, y_0). Podemos tomar uma constante positiva h, tal que exista uma, e somente uma, solução $y(x)$ da equação diferencial.*

$$y' = f(x, y)$$

no intervalo $x_0 \leq x \leq x_0 + h$, sendo $y(x_0) = y_0$.

A demonstração desse teorema se encontra em [2].

Tomaremos o seguinte exemplo.

Exemplo 2.17 *Consideremos a seguinte equação diferencial*

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Iremos encontrar uma solução $y(x)$ satisfazendo a condição inicial.

Temos nesse exemplo

$$f(x, y) = y$$
$$f_y(x, y) = 1$$

A função $f(x, y)$ satisfaz os critérios do teorema em torno de todo plano xy. Em particular, o teorema pode ser aplicado em qualquer região que contenha o ponto $(0, 1)$. Pois de acordo com o teorema existe uma, e somente uma, solução $y(x)$ que satisfaça a condição inicial.

Dessa forma, achamos que e^x é solução da equação, e que satisfaz a condição imposta. Desde que exista somente uma solução, nesse caso a solução procurada é e^x.Caso o ponto fosse $(0, 0)$, a única solução a ser encontrada seria a solução nula, com $y(x) = 0$.

Vejamos um contra - exemplo

Consideremos a equação diferencial

$$y' = -\frac{1}{x}y \tag{2.11}$$

Nesse caso o teorema não se aplica para o segundo membro dessa equação, ao longo da reta $x = 0$. Toda solução da equação (2.12) possui a forma $y = \frac{c}{x}$ com c sendo uma constante. Dessa forma com excessão da solução nula, todas as outras tendem para o infinito quando $x \to 0$. Notemos que não existe solução no ponto $(0, a)$, sendo $a \neq 0$. Caso $x_0 \neq 0$, a única solução de (2.12) será $y(x) = x_0 y_0^{-1}$ onde a curva $y = y(x)$ passa pelo ponto $(x_0, y0)$.

Da mesma maneira temos para a equação diferencial

$$y' = \frac{1}{x}y \tag{2.12}$$

Todas as soluções desta equação são da forma $y = cx$, com c sendo uma constante. Nesse caso não há soluções que passam pelo ponto $(0, a)$, com $a \neq 0$, levando em consideração que todas as soluções passam pela origem. No caso do ponto (x_0, y_0), com $x_0 \neq 0$, passara apenas uma solução $y(x) = x_0^{-1} y_0 x$.

Vejamos o gráfico que representa a solução dessas duas equações.

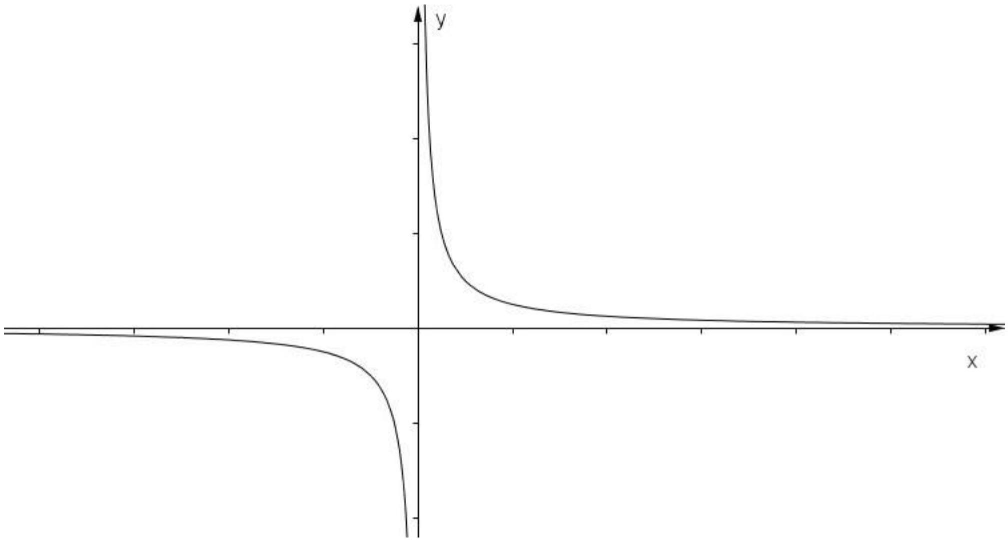

Figura 2.1: Existência de Soluções de $y' = \frac{1}{x}y$ e $y' = -\frac{1}{x}y$

Capítulo 3

Aplicações de EDO de 1 ordem

3.1 Crescimento Logístico

3.1.1 Um Breve Histórico de Crescimento Logístico

P.F.Verhulst (1804 - 1849)foi um matemático belga que introduziu uma determinada equação que nomeou de equação logística como um modelo para o crescimento populacional em 1838, ao qual, chamou de crescimento logístico. Ele não foi capaz de testar a precisão de seu modelo devido a dados inadequados de censo e não recebeu a devida atenção por muitos anos. Foi, R.Pearl (1930) que demonstrou concordância razoável com dados experimentais para populações de drosophila melanogaster mais conhecida como mosca de fruta, e G.F.Gause (1935) fez o mesmo experimento para populações de paramecium e de tribolium ,conhecido como besouro castanho.

3.1.2 Equação logística

É de nosso entendimento que podemos usar as equações diferenciais ordinárias para estudar o crescimento populacional de espécieis. Dessa forma é comum usarmos o crescimento exponencial para tal função, no entanto, não é adequado para populações de longo prazo, pois nesse caso,ocorre vários fatores que limitam tal crescimento. Com isso, observamos que nem sempre uma população irá crescer, levando em consideração isso, foi criado o seguinte modelo.

$$\frac{dp}{dt} = h(p)p \tag{3.1}$$

Nosso objetivo e escolher $h(p)$ de forma que $h(p) \approx k$ se a população p for pequena e $h(p)$ decresca quando p for suficientemente grande. Exibimos uma função que obtenha tal propriedade,temos

$$h(p) = k - ap, \ (a > 0)$$

reescrevendo (3.1) *temos*

$$\frac{dp}{dt} = h(p)p = (k - ap)p$$

equação logística.

Colocando k em evidência e tomarmos uma nova constante, logo teremos a equação:

$$\frac{dp}{dy} = k\left(1 - \frac{p}{R}\right)p, \ R = \tfrac{k}{a}.$$

Sendo k a taxa de crescimento intríseco,ou seja, na falta de qualquer fatores limitados essa será a taxa de crescimento e R a capacidade ambiental de sustentação da espécie. Observando bem, veremos que tal equação e do tipo Bernoulli, com $n = 2$,uma vez que podemos reescreve-la da seguinte forma:

$$\frac{dp}{dt} - kp = -\frac{k}{R}p^2.$$

Para resolver tal equação utilizaremos a seguinte mudança de variavél:

$$v = p^{1-2} = p^{-1}.$$

Dessa forma,podemos exibir uma Edo linear

$$\frac{dv}{dt} = -p^{-2}\frac{dp}{dt}.$$

Assim,resolvendo a Edo

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{R} + ce^{-kt} \\ &= \frac{1 + cRe^{-kt}}{R}. \end{aligned}$$

Desfazendo a mudança de variavel $v = p^{-1}$:

$$p(t) = \frac{1}{v} = \frac{R}{1 + cRe^{-kt}}.$$

Para determinar a constante c, supomos que no instante $t = 0$ a população seja p_0. Logo,

$$p_0 = p(0) = \frac{R}{1 + cR}.$$

Assim,

$$p_0 + cRp_0 = R \ e \ c = \tfrac{R - p_0}{Rp_0}.$$

Utilizando esta constante na solução geral e efetuando as devidas simplificações,obtemos:

$$p(t) = \frac{Rp_0}{p_0 + (R - p_0)\,e^{-kt}}$$

Vamos analisar o comportamento do problema.

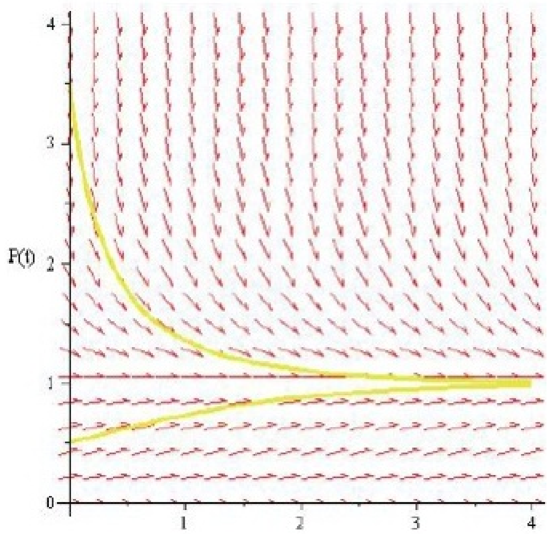

Figura 3.1: equação logística

Exemplo 3.1 *Suponha uma população de peixes modelada pela equação logística em que se introduz um termo descrevendo a subtração à população de uma certa quantidade de peixe na unidade de tempo. O modelo que descreve tal situação será*

$$\frac{dP}{dt} = (1 - P)P - c$$

Quando temos $c > 0$ designaremos por cota absoluta de pesca. Averiguemos a existência de valores de bifurgação e vejamos qual a importância desse valor para o ecosistema.

Resolução

São pontos de equilibrio os pontos

$$(1 - P)P - c = 0 \Leftrightarrow P^2 - P + c = 0 \Leftrightarrow P = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}.$$

Analisando os 3 casos, obtemos

- $c > \frac{1}{4}$, *a equação não tem ponto de equilíbrio e $P' < 0$ pelo que a população extingue - se num espaço de tempo finito.*

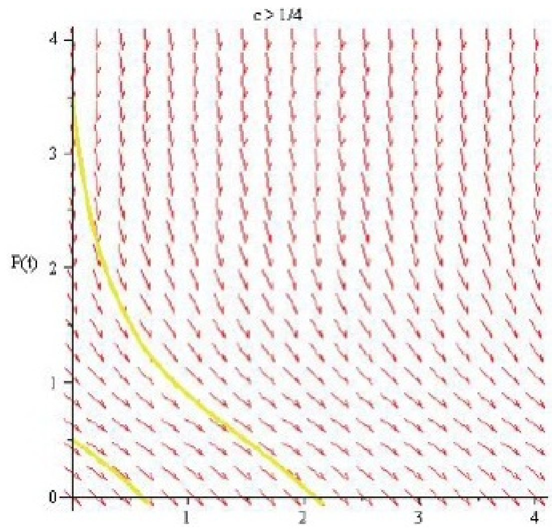

Figura 3.2: $c > \frac{1}{4}$

- $c = \frac{1}{4}$ *a equação tem só um ponto de equilibrio,* $P = \frac{1}{2}$. *Se um dado instante a população for inferior a esse valor, essa população ira se extinguir num tempo finito. Se num dado instante a população for superior a esse valor, esta população tenderá para a solução de equilibrio* $P = \frac{1}{2}$. *O ponto de equilíbrio é um ponto de sela.*

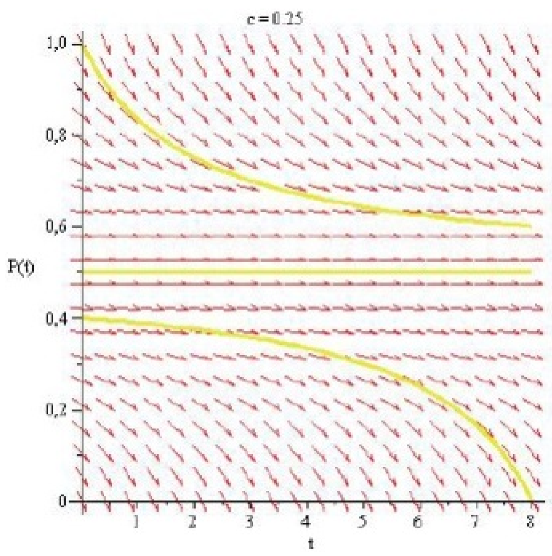

Figura 3.3: $c = \frac{1}{4}$

- $c < \frac{1}{4}$ *a equação tem dois pontos de equilibrio.*

$$P_1 = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} \text{ e } P_2 = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$$

com $P_2 < P_1$. A derivada P' é positiva entre P_2 e P_1 e negativa no exterior deste intervalo.

Assim, $P = P_1$ é um poço e portanto a solução de equilibrio de $P = P_1$ é uma solução estável. Se num dado instante a população for superior a P_2 então irá tender para P_1 quando $t \to +\infty$.

O ponto de equilibrio P_2 é uma fonte, nesse caso instável. Se num dado instante a população for inferior a P_2 então ela extingue - se num tempo finito. Caso ela seja superior a P_2 ela tenderá para P_1 quando $t \to +\infty$.

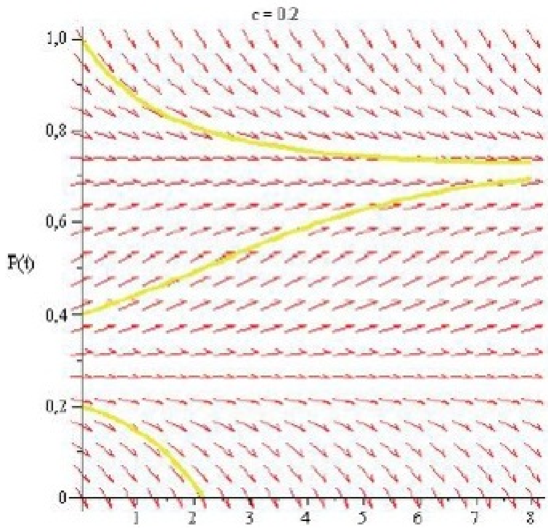

Figura 3.4: $c < \frac{1}{4}$

Da análise resulta que $c = \frac{1}{4}$ é o valor de bifurcação para a equação logística com cota absoluta de pesca.
Para qualquer cota $0 < c \leq \frac{1}{4}$ assegura teoricamente a reprodução da espécie. No estanto é de evitar uma demasiado próxima da cota máx. $c = 1$ pois pequenas perturbações aleatórias poderão tornar a população inferior a P_2 e levará à sua extinção.

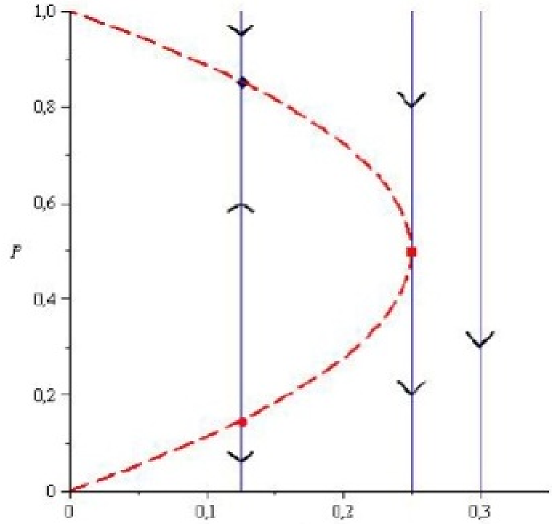

Figura 3.5: bifurcação

3.2 Modelo de Epidêmia

Propagação de uma Doença

Para construirmos esse modelo, iremos seguir as seguintes hipóteses.

- *Uma função y de uma população possui uma doença infecciosa. Logo $S = (1 - y)$ será a parte da população que não está infectada.*
- *Os infectados podem ser encontrados ao acaso.*
- *y aumenta de maneira proporcional a y e S.*

Em decorrência dessas hipoteses, podemos exibir a equação que representa o modelo.

$$\frac{dy}{dt} = ry(1 - y).$$

Com r sendo uma constante positiva. Observando atenciosamente, percebemos que se trata de uma equação diferencial ordinária separável.Dessa forma,temos

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= ry(1-y)\\
rt &= \int \frac{1}{y(1-y)}\\
rt &= \int \frac{1}{y} + \int \frac{1}{1-y}dy\\
rt &= logy - log(1-y) + C\\
rt &= log(\frac{y}{1-y}) + C\\
e^{rt} &= \frac{y}{1-y}e^{C}\\
y &= \frac{1}{(\frac{1}{k})e^{-rt}+1}.
\end{aligned}$$

$$1-y = ke^{rt}, k = e^{-C}$$

Sem levar em consideração o número de infectados. Agora,no caso de utilizarmos uma condição inicial $x_0 = 0$, *ja ocorreria para todo* t *um* $x = 0$.*Um outro modelo muito interessante a se estudar são em populações que pode ser dividida em duas partes: os que tem a doênça e podem infectar o restante da população e o que não tem mais são suscetíveis.Vejamos abaixo um exemplo.*

Exemplo 3.2 *Suponhamos que uma dada população pode ser dividida em duas partes: os que têm uma determinada doênça e podem infectar outros, e os que não tem,mas são suscetíveis a tal doença. Seja* x *a proporção de indivíduos suscetíveis e* y *a proporção de infectados; logo,* $x + y = 1$.
Suponha que a doença se espalhe através do contato entre os indivíduos doentes e os que não estão, e que a taxa de disseminação $\frac{dy}{dt}$ *é proporcional ao número do contato entre infectados e não infectados. E que os elementos dos dois grupos circulem livremente,de forma que o número de contatos seja proporcional ao produto de* x *e* y.*Como temos* $x = 1 - y$, *podemos exibir um P.V.I.*

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha y(1-y) \end{cases}$$

Com α*sendo o fator de proporcionalidade positivo e* y_0 *a proporção inicial de infectados. Resolvendo o problema de valor inicial, quando a população inteira ficará doente.*

$$\begin{cases} y(0) = y_0 \\ \dfrac{dy}{dt} = \alpha y(1-y) \end{cases}$$

Resolução:

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= \alpha y(1-y) \\
\alpha dt &= \frac{1}{y(1-y)}dy \\
\int \alpha dt &= \int \frac{1}{y} + \int \frac{1}{1-y} \\
\alpha t &= ln(y) - ln(1-y) + C \\
\alpha t &= ln(\frac{y}{1-y}) + C \\
\alpha t - C &= ln\frac{y}{1-y} \\
e^{\alpha t - C} &= \frac{y}{1-y} \\
e^{\alpha t}e^{-C} &= \frac{y}{1-y} \\
\frac{y}{1-y} &= e^{\alpha t}.K
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y}{1-y}.\frac{1}{K}.e^{-\alpha t} &= 1 \\
y.\frac{1}{K}.e^{-\alpha t} &= (1-y) \\
y.(\frac{1}{K}).e^{-\alpha t} + y &= 1 \\
y((\frac{1}{K})e^{-\alpha t} + 1) &= 1 \\
y &= \frac{1}{(\frac{1}{K})e^{-\alpha t} + 1}
\end{aligned}$$

Colocando nas condições iniciais, iremos exibir o valor da constante K.

$$\begin{aligned}
y &= \frac{1}{(\frac{1}{K})e^{-\alpha t} + 1} \\
y_0 &= \frac{1}{(\frac{1}{K})e^{-\alpha t} + 1} \\
y_0 &= \frac{1}{K} + 1 \\
y_0 &= \frac{\frac{1}{K}}{1+K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(1+K)y_0 &= K \\
y_0 + y_0K &= K \\
y_0 &= K - y_0K \\
y_0 &= K(1-y_0) \\
\frac{y_0}{1-y_0} &= K
\end{aligned}$$

Dessa forma a equação representa quando toda a população irá ficar doente será:

$$y = \frac{y_0}{(1-y)e^{-\alpha t} + y_0}$$

3.3 A Lei Allee em uma população.

Definição 3.1 *É uma relação positiva entre componentes que possuem habilidade individual e o número de individuos.*

Vamos olhar a equação logística dessa modelagem

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 \Longrightarrow \frac{dN}{dt} = aN - N^2 + F(N) \tag{3.2}$$

Vejamos algumas propriedades da função $F(N)$:

- Nc = *número crítico de indivíduos da população.*
- N^* *número de indivíduos na saturação .*

Nesse caso, temos as seguintes observações:

Temos a população em extinção quando

$$\frac{dN}{dt} < 0 \text{ para } N < Nc.$$

Quando a população está crescendo

$$\frac{dN}{dt} > 0 \text{ para } Nc < N < N^*.$$

Quando a população está em decrescimento

$$\frac{dN}{dt} < 0 \text{ para } N > N^*.$$

Assim temos a função F(N) da sequinte forma

$$F(N) = -cNe^{-dN^2}.$$

Reescrevendo a equação (3.2) *temos:*

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2 - cNe^{-dN^2}.$$

Generalizando temos

$$\frac{dN}{dt} = N - N^2 - \alpha Ne^{-\beta N^2}.$$

Faremos agora a analise qualitativa da modelagem

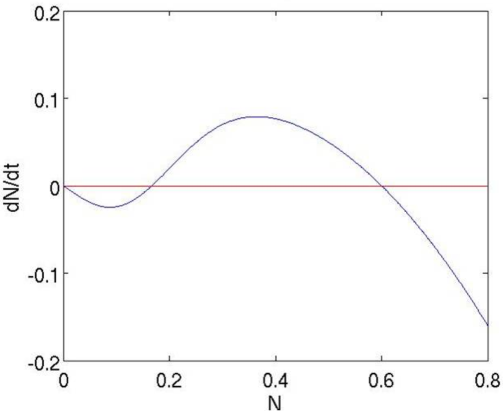

Figura 3.6: modelagem

Pontos estáveis e instáveis

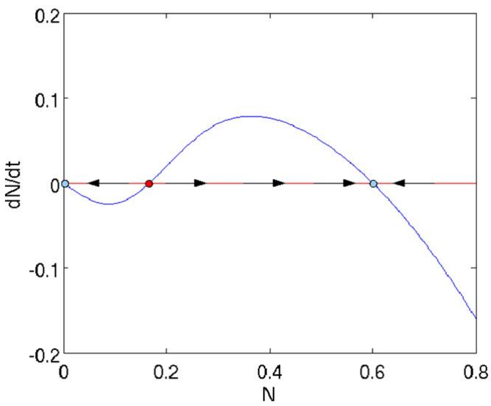

Figura 3.7: estabilidade

Valores atribuidos a α e β onde o Efeito Allee acontece

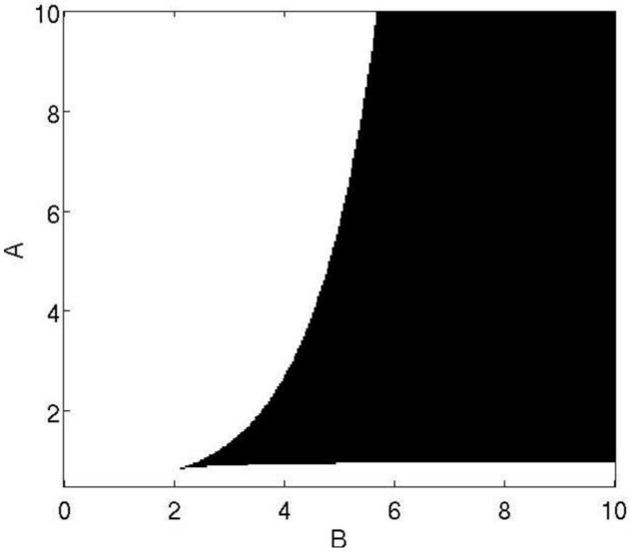

Figura 3.8: efeito alle em α e β

α fixo e β variando

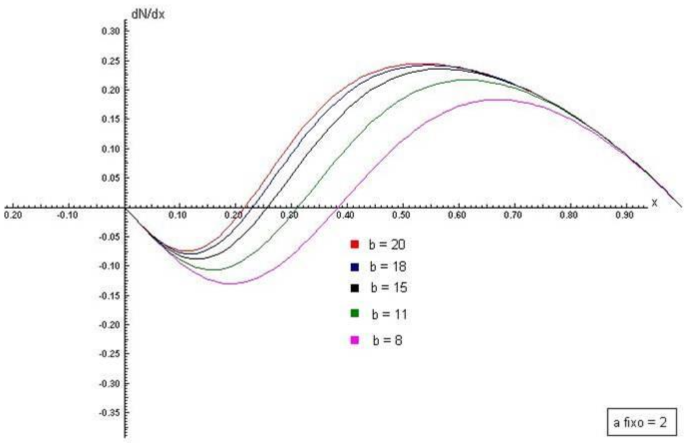

Figura 3.9: α fixo e β variando

β fixo e α variando

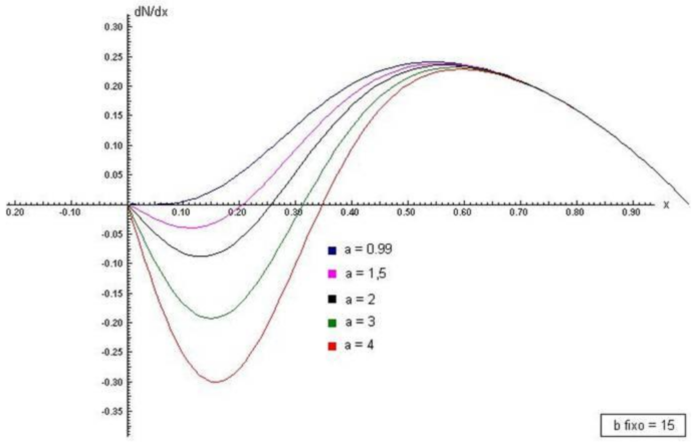

Figura 3.10: β fixo e α variando

Colocando em certas condições iniciais, temos:

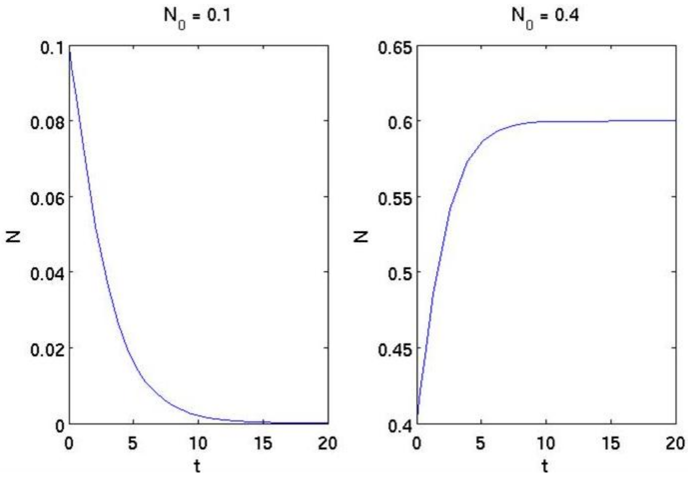

Figura 3.11: condições iniciais

3.4 Lotka-Volterra e Biologia de populações

3.4.1 Breve Histórico das Equações de Lotka-Volterra

Normalmente espécieis e organismos interagem em seu ambiente físico de diversas maneiras. Nessas condições ocorrem um aumento de uma espécie de presa em que gera um aumento na população de seus predadores, com isso,implica em reduzir a população de presas com o aumento da mortalidade devido a predação (Berryman, 2002, 2003).Nesse caso a Lei Lotka - Volterra nos mostra que quando *ocorrer esse tipo de evento com outras espécieis ou em popupalações do mesmo ambiente, é comum haver uma dinâmica cíclica.*

Lotka - Volterra é nomeada a Alfred James Lotka (1880-1949) e Vito Volterra (1860-1940), que escreveram independentemente uma versão inicial desta lei em 1925 e 1926, respectivamente. Vitor Volterra, matemático italiano, chegou a esta equação sendo instigado por seu futuro genro Umberto d'Ancona que buscava explicação para as oscilações na quantidade de peixes predadores capturados em em certos lugares do mar mediterrâneo.

3.4.2 Lotka - Volterra

Seja $N(t)$ o número de predadores e $V(t)$ o número de presas e a, b, c e d como constantes positivas.Obtemos as seguintes informações:

- *O número de presas cresce quando não tem predadores.*

$$\frac{dV}{dt} = aV.$$

Quando há presença de predadores o número de presas decai.

$$\frac{dV}{dt} = V(a - bP).$$

- *Na ausência de presas a população de predadores aumenta.*

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= V(a - bP) \\ \frac{dP}{dt} &= -dP. \end{aligned}$$

- *Na presença de presas o número de predadores aumenta.*

$$\frac{dV}{dt} = V(a - bP).$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cV - d).$$

Reunindo as duas últimas equações, obtemos as Equações de Lotka - Volterra.

$$\frac{dV}{dt} = V(a - bP).$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cV - d).$$

Para resolver estas equações temos dois caminhos, o da integração numérica e Análise qualitativa. Retomando as equações

$$\frac{dV}{dt} = V(a - bP) \tag{3.3}$$

$$\frac{dP}{dt} = P(cV - d) \tag{3.4}$$

dividindo (3.4) por (3.3),temos

$$\frac{dP}{dV} = \frac{P(cV - d)}{V(a - bP)}.$$

Dessa forma,

$$\frac{dP(a - bP)}{P} = \frac{dV(cV - d)}{V}.$$

Integrando nos dois membros, temos

$$alnP - bP = cV - dlnV + H.$$

Com H sendo uma constante. obtemos assim,

$$cV(t) - bP(t) + alnP(t) + dlnV(t) = H$$

Por fim,esta relação é obedecida pelo sistema Lotka - Volterra.

Para cada valor que H assume, podemos traças um gráfico $P \times V$ para representar geometricamente os pontos que satisfazem a equação acima.

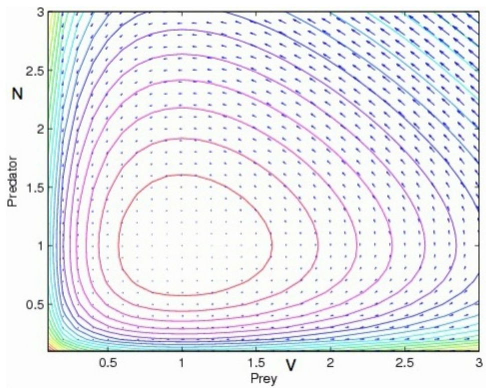

Figura 3.12: representação geométrica

Essas são as trajetórias quando temos $a = b = c = d = 1$. Cada curva correspondendo a um valor de H, dessa maneira as curvas obedecem a seguinte equação:

$$cV(t) - bP(t) + alnP(t) + dlnV(t) = H.$$

Oscilações

Chamaremos o plano $P \times V$ de espaço de fase, as curvas de trajetórias.

Tomando-se um ponto no espaço de fase, onde este representa um certo número de presas e predadores. Por este pondo passará uma curva, no qual, os pontos perseguem essa curva no espaço de fase, representando sua evolução. Mas que depois de certo tempo voltam a sua situação inicial. Tornando assim o sistema periódico. Como o gráfico abaixo.

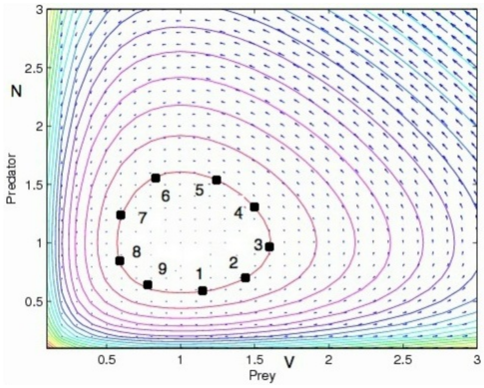

Figura 3.13: oscilações

Analisando o sistema periódico.

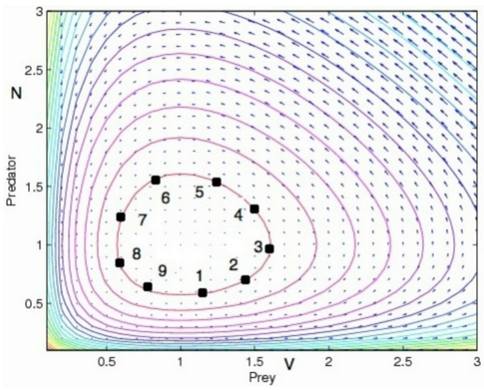

Figura 3.14: sistema periódico

Tomemos um ponto no plano $P \times V$ e o segmento durante um tempo. Após isso façamos algumas observações.

- *Evolução da variável V (as presas).*
- *De 1 a 3 o número de presas aumenta.*
- *De 3 a 8 o número de presas diminui.*
- *De 8 a 3 o número de presas aumenta aumenta de novo*
- *E assim sucessivamente.*

O número de presas e predadores oscilam periódicamente.

Soluções

Nesse trabalho estudamos apenas soluções que se comportam qualitativamente. Elas presumem que o sistema "predador $\times$ presa"demonstram oscilações periódicas nas populações das espécies.

3.4.3 Lotka - Volterra e o mundo real

A equação de Lotka - Volterra caracteriza situações reais em parte, pois contém detalhes irreais,como:

- *Quando há escassez de predadores o número de presas aumenta, tornando num crescimento exponencial e não logístico,não havendo mecanismo de saturação, nesse caso, a equação consequente continua tendo soluções periódicas.*
- *De outra forma a taxa de crescimento do predador $(cV - d)$, temos que quanto maior o número de presas,maior é a taxa de crescimento. Com isso um predador voraz, seria natural pressupor que a taxa de crescimento se satura. Um efeito de saciedade de caçar mais de uma certa quantidade de presa.*
- *Equações desse tipo podem ser escritas.*
- *De qualquer forma sempre haveria oscilações.*
- *Mesmo sendo um modelo simplificado de dinâmica de predadores e presas, ela retem uma maneira geral,que é a existência de oscilações.*

Bibliografia

[1] *William E.;DIPRIMA,Richard C. EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ELEMENTARES E PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO.9. ed. [Rio de Janeiro]: LTC, [2011].*

[2] *Walter,Walter Leighton. Equações diferenciais ordinárias.[Rio de Janeiro]:LTC[1970].*

[3] *Francisco Júlio Sobreira de Araújo.Equações Diferenciais Ordinárias.*

[4] *Aline Alvarenga, Taiana Brito, Humberto Sanna, Adriane Schelin, Alexandre Soares. Curso de Métodos Matemáticos em Biologia de Populações/Efeito Alle. Disponivél em < w.w.w.slideshare.net/rakraenkel/efeito-allee?fromsearch=1.>. Acesso em :15 de setembro de 2013.*

[5] *Roberto André Kraenkel. Métodos Matemáticos em Biologia de Populações. Dispobivél em <w.w.w.slideshare.net/rakraenkel/metodos-matematicos-em-biologia-de populações-ii>. Acesso em:25 se setembro de 2013.*

[6] *Livro registrado no EDA. da Fundação Biblioteca Nacional/ Minc sob número 350.448. Livro 646, folha 108.*