UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

André Fellipe Ribeiro de Almeida

Integral de Riemann Generalizada

BELÉM - PA

Agosto - 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

André Fellipe Ribeiro de Almeida

Integral de Riemann Generalizada

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz.

BELÉM - PA

2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

André Fellipe Ribeiro de Almeida

Integral de Riemann Generalizada

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Plano em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

____

Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz
(Orientadora)

Faculdade de Matemática, UFPA

____

Prof. Dr. Marcos Monteiro Diniz

Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /_______

CONCEITO: ______________________________

Dedicatória

Dedico a Deus e a minha família, em especial, à memória de Domingas Ribeiro Dias, minha amada avó.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me permitido entrar nesta universidade e me dado forças para prosseguir e continuar prosseguindo em minha carreira acadêmica. Aos meus pais Angela Dias e Edward Almeida, por terem me ensinado sobre a vida e estarem comigo em todos os momentos dessa jornada. Ao meu querido irmão Bruno Almeida, por ser meu amigo mais chegado e me aconselhar em situações de dúvidas. À minha tia Olga Dias, por ser minha segunda mãe, e por representar muito bem a minha amada avó Domingas Dias (em memória) em minha vida. Do mesmo modo agradeço aos meus sobrinhos, tios, primos, enfim, à minha família.

Sou eternamente grato a minha orientadora, Profa. Dra. Cristina Lúcia Dias Vaz, por ter me aceitado como seu orientando de iniciação científica e de TCC, por sua paciência e dedicação, por seus conselhos valiosos sobre a vida e os estudos, e por ter acrediatado em mim.

Assim também, agradeço a todos os amigos e colegas que conquistei nessa caminhada, dentre os quais destaco, João Carlos Fortes e Jeziel Nascimento Correia, que estiveram comigo nos caminhos mais difíceis da minha jornada acadêmica, compartilhando dúvidas, aprendizados, momentos engraçados e também deseperadores, bem como aos alunos Helen Rodrigues, Andrei Ribeiro, Luana Leão, Sara Raíssa, William Cintra, Raimundo Leão que me ajudaram e me ensinaram lições valiosíssimas. Não poderia deixar de agradecer aos professores dessa faculdade que tanto me ajudaram, dentre os quais destaco: Profa. Dra. Irene Pereira, Profa. Dra. Nazaré Bezerra, Prof. Dr. Juaci da Silva e Prof. Dr. João Pablo, que me instruíram, me ajudaram e me motivaram a estudar cada dia mais. Obrigado por sua dedicação à minha formação.

Não posso esquecer dos amigos da minha congregação, que oraram por mim e pela minha família, me auxiliando no que fosse necessário, em especial a minha grande amiga Elza Santos, Milena, Raqueli, Jean (em memória), Celso Júnior, Aliane, irmã Antônia de Jesus, Selma, irmã Maria Luiza (em memória), irmão Ismael, Jonas Pinto, Tatiane Borges, Athos, Emília, irmã Cidoléia e Suelenne.

E a todos que não foram citados aqui, mas que participaram direta ou indiretamente da realização deste TCC, muito obrigado!

Resumo

A *Integral de Riemann Generalizada* é uma nova e interessante abordagem da integral de Riemann, que foi desenvolvida, independentemente, pelos matemáticos J. Kurzweil e R. Henstock no período de 1957 à 1968. Esta nova teoria de integração não apresenta as principais desvantagens da integral de Riemann, é mais geral do que a integral de Lebesgue e possui ferramentas potentes como o Teorema da convergência monótona e o Teorema da convergência dominada. Além disso, o Teorema fundamental do Cálculo não apresenta as restrições da teoria de integração de Riemann ou de Lebesgue.

Este trabalho é uma elementar introdução da integral de Riemann generalizada. Apresentaremos sua definição e principais propriedades. Enunciarremos e provaremos o Teorema da convergência monótona, Teorema da convergência dominada e Teorema fundamental do Cálculo e, finalmente, provaremos que toda função Lebesgue integrável é Riemann generalizada integrável.

Palavras-chave: Integral, Integral de Riemann Generalizada, Integral de Lebesgue.

Conteúdo

Introdução

A clássica integração de Riemann apresenta algumas desvantagens, por exemplo, a classe de funções Riemann integráveis é muito pequena, uma sequência convergente de funções Riemann integráveis não converge necessariamente para uma função Riemann integrável. Além disso, o Teorema Fundamental do Cálculo não é geral, pois a existência de uma primitiva não garante que a função seja Riemann integrável. Estes problemas motivaram o desenvolvimento de novas teorias de integração e muitos avanços foram obtidos como os trabalhos de Lebesgue, Perron e Denjoy. O sucesso da integral de Lebesgue foi tão grande que atualmente é considerada a integral *mais adequada*. Porém, esta teoria de integração também apresenta alguns problemas, por exemplo:

(i) Existem funções F que são deriváveis em todos os pontos, mas sua derivada F' não é Lebesgue integrável. Deste modo, condições adicionais são necessárias para garantirmos a validade do Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\int_a^b F'\,dx = F(b) - F(a).$$

Como consequência, justificar a fórmula da substituição

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f = \int_a^b f(\phi)\,\phi'$$

não é tarefa fácil.

(ii) Algumas integrais impróprias, como a importante integral de Dirichlet

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\, dx,$$

não são Lebesgue integráveis (note que $|x^{-1}\operatorname{sen}(x)|$ não é Lebesgue integrável).

(iii) Para definirmos a integral de Lebesgue é necessário um considerável conhecimento de teoria de medida.

Trabalhando independentemente, os matemáticos Jaroslav Kurzweil (1923-) e Ralph Henstock (1926-), desenvolveram uma nova integral, chamada *integral de Riemann Generalizada* (integral de Henstock-Kurzweil ou integral gauge). Esta nova técnica de integração corrige os problemas da clássica integral de Riemann e estende a teoria de integração de Lebesgue. É uma abordagem simples, pois nenhuma teoria de medida é necessária para o seu desenvolvimento. Nesta teria de integração:

(i) todas as funções que tem primitiva são integráveis, isto é, o Teorema Fundamental do Cálculo é geral;

(ii) todas as funções Riemann integráveis são integráveis;

(iii) todas as funções Lebesgue integráveis são integráveis;

(iv) todas as funções Denjoy-Perron integráveis são integráveis;

(v) há potentes resultados de convergências, tais como o Teorema da Convergência Monótona e o Teorema da Convergência Dominada;

(vi) não existem integrais impróprias.

A principal diferença entre a integral de Riemann generalizada e a integral de Riemann é que na integral Riemann primeiro escolhemos uma partição $\mathcal{P}$ formada por intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ e depois escolhemos t_i livremente em cada I_i. Na integral de Riemann generalizada, a escolha de I_i depende da escolha de t_i.

A principal diferença entre a integral de Riemann generalizada e a integral de Lebesgue é que funções Riemann generalizada integráveis não são absolutamente integráveis no sentido que se f é Riemann generalizada integrável não implica que $|f|$ também seja. Temos que funções Riemann generalizadas integráveis comportam-se como "séries convergentes" enquanto funções Lebesgue integráveis comportam-se como "séries absolutamente convergentes". Séries absolutamente convergentes produzem melhores resultados enquanto séries convergentes são mais gerais.

Existe uma variante da integral de Riemann generalizada, chamada *integral de McShane*, que é equivalente a integral de Lebesgue em $\mathbb{R}$ e tem as principais propriedades da integral de Riemann generalizada.

Neste trabalho definiremos a integral de Riemann generalizada, enunciaremos e demonstraremos as suas principais propriedades, assim como o Teorema Fundamental do Cálculo e os Teoremas de Convergência. Também, definiremos a integral de Lebesgue e provaremos algumas propriedades desta integral. Para provarmos que toda função Lebesgue integrável é também Riemann generalizada integrável usaremos a integral de McShane.

O trabalho foi organizado do seguinte modo:

No Capítulo **??** investigaremos a integral de Riemann generalizada, apresentaremos alguns exemplos e suas principais propriedades operacionais. Também provaremos alguns resultados importantes tais como: o Critério de Cauchy, o Teorema da Aditividade e o Lema de Saks-Henstock. Além disso, faremos alguns comentários sobre integrais impróprias.

No Capítulo **??** trataremos exclusivamente do Teorema fundamental do Cálculo - TFC. Provaremos uma versão mais geral deste teorema e algumas consequências do TFC, como a integração por partes e as fórmulas de substituição.

No Capítulo **??** provaremos os teoremas de convergência: Teorema da convergência monótona, Lema de Fatou e Teorema da convergência dominada.

No Capítulo **??** definiremos a integral de McShane e provaremos as propriedades necessárias para mostrarmos a sua equivalência com a integral de Lebesgue.

No Capítulo **??** investigaremos a integral de Lebesgue na reta e suas principais propriedades. E provaremos a equivalência entre a integral de McShane e a integral de Lebesgue.

Introdução histórica

Inicialmente, no século 17, a integral foi introduzida como uma ferramenta para encontrar áreas e volumes e era considerada como uma soma infinita de quantidades "infinitesimais" . Foram estas ideias que motivaram a definição moderna da integral de Cauchy-Riemman como uma série infinita.

Porém, a abordagem do Cálculo, criado por Issac Newton e Gottfried Leibniz, enfatiza a "relação inversa" entre diferenciação e integração e por todo o século 19, a integral foi essencialmente usada nas aplicações como uma operação inversa da derivada. Esta abordagem foi fortemente desenvolvida por Newton, que usava expansões em séries para obter antiderivadas (ou primitivas) com o objetivo de simplificar os cálculos de algumas funções. Investigando a área da região limitada pela curva $y = ax^{n/m}$, Newton mostrou que a derivada da "função área" era o valor da função no correspondente ponto da curva. Este caso especial do *Teorema Fundamental do Cálculo* foi imediatamente estendido para soma finitas de tais funções e logo (erroneamente para os padrões atuais) para funções cujas antiderivadas não podem ser encontradas diretamente, mas que podem ser expandidas em séries de potências e integradas termo a termo. O exemplo mais famoso, relacionado com a quadratura do círculo, foi a expansão binomial de $(1+x)^{1/2}$, apresentada por Newton.

Embora muito matemáticos já estudassem algumas séries especiais, foi Newton quem consagrou as expansões em séries como um *método universal para representar funções.* Para alguns casos, a integração termo a termo calculava funções conhecidas, como por exemplo, a integração das séries das funções $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, e^x, etc, mas nem sempre funcionava tão bem, como por exemplo, a integração termo a termo da expansão em série da função e^{-x^2} não gerava a série de uma função conhecida. O método de expansão em séries foi muito usado por Newton e seus sucessores, especialmente Leonhard Euler, e aumentou muito a classe de funções estudadas pelos matemáticos da época.

Por todo o século 18, poucos matemáticos questionaram a *existência* da antiderivada de uma dada função, pois como as integrais eram aplicadas em muitos problemas da geometria e da física, sua existência era garantida pela natureza geométrica ou física do problema. Joseph-Louis Lagrange foi um importante crítico do uso informal e sem rigor dos “infinitesimais” e dos “fluxos”, afirmando que o resultado “correto” era sempre alcançado por uma “compensação de erros”. Em 1797, propôs um prêmio para quem elaborasse uma teoria rigorosa do cálculo infinitesimal. O próprio Lagrange, assumindo que (exceto, possivelmente, num número finito de pontos) toda função pode ser expressa por sua série de Taylor, definiu a derivada como o coeficiente do termo linear. Deste modo, ele acreditava que todos os “infinitesimais” seriam banidos do Cálculo. Infelizmente, o método de Lagrange exige muita regularidade da função, isto é, a analiticidade da função. Com este argumento em mente, Cauchy apresentou o famoso exemplo de uma função infinitamente diferenciável que não tem expansão em série de Taylor. A função é a seguinte:

$$f(x) = e^{-1/x^2} \quad \text{se} \quad x \neq 0, \qquad f(0) = 0.$$

Vale destacar que nas poucas tentativas, tais como a de Lagrange, de discutir os fundamentos do Cálculo, é a derivada e não a integral que recebe mais atenção. Isto não deve causar surpresa quando recordamos que nesta época os matemáticos tratavam integral como uma antiderivada.

Durante o período de 1760 a 1770, aconteceu um estimulante e muito produtivo debate sobre a expansão em série trigonométrica de uma função “arbitrária”. Este debate originou-se na análise do problema da corda vibrante. Esta polêmica discussão, com participantes da grandeza de d’Alembert, Euler, Daniel Bernoulli, Lagrange e Laplace, apontou para a definição vaga e pouco rigorosa dos conceitos de função e continuidade e enfatizou a necessidade de uma definição de integral para funções cujas primitivas (ou antiderivadas) não poderíam ser facilmente calculadas.

Em 1807, J.B. Fourier, num trabalho sobre condução de calor, apresentou uma resposta afirmativa à pergunta: uma função "arbitrária", possivelmente descontínua, pode ser representada por uma série trigonométrica? Fourier encontrou os coeficientes da expansão

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\, x + b_n \mathrm{sen}\, n\, x,$$

usando integração termo a termo (cuja validade ele não questionou) na forma de uma integral. Em particular, o coeficiente a_0 é dado pela integral de $f(x)$ em $[-\pi, \pi]$.

Em muitos problemas físicos, $f(x)$ pode ter "bicos" ou ser descontínua. Como, em geral, tais funções não podem ser representadas pela soma de funções algébricas, suas antiderivadas não podem ser encontradas. Deste modo, o trabalho de Fourier, que apresenta um modo de expressar uma classe de funções, aponta para a necessidade de uma reformulação no conceito de integral, o qual possa incluir funções mais gerais.

Em 1814, Augustin-Louis Cauchy publicou um extenso trabalho sobre integração complexa, no qual iniciou a mais ambiciosa e influente reformulação rigorosa do Cálculo. Neste trabalho, Cauchy apresentou uma definição de integral que resolve o problema de Fourier. Na definição de Cauchy, a *existência* da integral depende de uma *propriedade do integrando - sua continudade* e não de uma expansão analítica. Esta definição permite que a área sob uma curva f possa ser expressa como uma integral mesmo no caso que f não pode ser representada por uma expansão analítica cuja antiderivada existe. Portanto, os "coeficiente de Fourier" são rigorosamente justificados.

Foi P. Dirichlet, continuando as investigações de Fourier, quem deu a moderma definição de função. Dirichlet apresentou, pela primeira vez, as condições suficientes para a convergência da série de Fourier exibindo um contra-exemplo, ou seja, uma função de não satisfaz estas condições. A função, hoje conhecida como função de

Dirichlet, é a seguinte:

$$f(x) = c \quad \text{se x é racional e } f(x) = d \neq c \quad \text{se x é irracional.}$$

Dirichlet esperava, num futuro próximo, estender o definição da integral de Cauchy para uma classe de funções com infinitos pontos de descontinuidades, com o objetivo de incluir as expansões em série de Fourier, porém foi Georg Riemann quem fez esta extensão, em 1854, no trabalho *Uma representação de funções por série trigonométricas.*

Riemann apresentou as condições necessárias e suficientes para a convergência da série de Fourier. Para isto, considerou *qualquer* função *limitada* e definiu a integral como limite (quando existe) de somas finitas quando o comprimento do maior intervalo das subdivisões tende a zero. Deste modo, Riemann obteve uma classe mais amplas do que a classe da funções integráveis no sentido de Cauchy. Riemann foi o primeiro matemático a diferenciar série trigonométrica da série de Fourier, dando exemplo de uma função integrável cujo série de Fourier não converge em nenhum ponto. Ele também mostrou que existem séries trigonométricas convergentes cujos coeficientes não são os coeficientes de Fourier de uma função integrável.

Embora os trabalhos de Cauchy tenham iniciado o tratamento rigoroso do Cálculo ou a "aritmetização" da Análise, estes trabalhos não apresentaram uma teoria sobre os números reais. Duas construções do sistema dos números reais foram elaboradas, independentemente, por Richard Dedekind, Georg Cantor e Karl Weierstrass, em 1872. Paralelo ao estudo sobre os números reais, seguia o estudo sobre condições de integrabilidade. Neste contexto, Riemann apresentou o seguinte critério de integrabilidade:

> *Para partições suficientemente finas, o comprimento total dos intervalos das partições para os quais a variação da função é maior que um número dado $\tau > 0$, é tão pequeno quanto se queira.*

Este critério de integrabilidade não controla todos os pontos de descontinuidade de f, mas somente aqueles com um "salto" ou "oscilação" maior do que τ. Usando a sequência $\epsilon_n = 2^{-1}\epsilon$, é fácil verificar que este critério é equivalente a dizer que o conjunto dos pontos de descontinuidade da função é um conjunto com medida (Lebesgue) zero.

Em 1870, Hermann Hankel, ex-estudante de Riemann, reformulou este critério de integrabilidade no sentido teoria de medida. Ele associou a cada função f, uma outra função (muito parecida com o módulo de continuidade) igual a zero nos pontos de continuidade e igual ao que chamamos de *oscilação* da função f nos pontos de descontinuidade. Considerando S_τ o conjunto dos pontos onde a oscilação de f é maior que τ, Hankel mostrou que f é integrável se, e somente se, S_τ pode ser coberto por uma coleção finita de intervalos cujo comprimento total é arbitrariamente pequeno.

Lembrando que $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} S_{1/n} = S$ é o conjunto dos pontos de descontinuidade de f, tem-se que esta condição de integrabilidade é equivalente a dizer que S pode ser coberto por uma coleção *enumerável* cujo comprimento total é suficientemente pequeno, ou seja, S é um conjunto de *medida nula*. Esta última conclusão só foi obtida quando os conceitos da teoria da medida para a integral de Riemann foram rigorosamente formulados.

Nos anos 1870-1880, a ideia de conjunto "insignificante" do ponto de vista da integração não era claramente compreendida pelos matemáticos. De fato, Hankel conjecturou (como Dirichlet antes dele) que o conjunto dos pontos de descontinuidade era *denso em nenhum lugar* ("nowhere dense") e iniciou uma confusão sobre o significado de conjunto *topologicamente insignificante* e conjunto *insignificante no sentido da medida*. O primeiro exemplo de um conjunto que *não é* insignificante do ponto de vista da integral de Riemann (com conteúdo positivo) que também é denso em nenhum lugar foi dado por H. Smith em 1875 e poucos anos depois, Vito Volterra e Cantor construíram conjuntos similares.

Alguns acontecimentos marcaram a formulação da integral de Riemann no sentido da teoria da medida, entre eles podemos destacar a grande atenção que os matemáticos da época dedicaram à teoria dos conjuntos, principalmente conjuntos dos pontos de descontinuidade. As investigações de Cantor sobre a teoria dos conjuntos começaram, quase que ingenuamente, com uma coleção de trabalhos (1871-72) sobre séries trigonométricas. Nestes trabalhos, Cantor generaliza o seguinte resultado, provado por Eduard Heine em 1870 :

> *se uma série trigonométrica converge uniformemente para uma função f, contínua exceto num número finito de pontos de um intervalo limitado, então a série é única*

Cantor foi capaz de generalizar este teorema de unicidade, primeiro eliminado a condição de convergência uniforme e, o mais importante para a teoria de integração, estendeu o teorema para conjuntos de *primeira espécie*. Estes conjuntos têm a importante propriedade, análoga aos conjuntos finitos, que podem ser cobertos por uma coleção finita de conjuntos com comprimento total arbitrariamente pequeno. Os resultados de Cantor iniciaram uma longa etapa de investigações centrada na caraterização dos chamados *conjuntos de unicidade*, conjuntos para os quais uma série trigonométrica não converge para uma dada função ou não converge em alguns pontos, mas a função é *unicamente* representada pela série. Não é difícil imaginar a confusão existente nesta época sobre os conceitos de conjuntos de unicidade, conjuntos insignificantes do ponto de vista da integração, conjuntos de primeira espécie, conjuntos densos em nenhum lugar e, na metade dos anos 1870, conjuntos enumeráveis e não enumeráveis.

Nos anos 1880, muitos exemplos e contra-exemplos de conjecturas incorretas foram construídos, em particular foi finalmente provado que, embora todo conjunto de primeira espécie seja denso em nenhum lugar, a recíproca é falsa (o conjunto de Cantor é um exemplo). Este resultado mostrou ser falsa a conjectura que afirmava serem de primeira espécie os conjuntos insignificantes no contexto da integração.

Finalmente, com a introdução do conceito de *conteúdo exterior*, a investigação começou a caracterizar o conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função integrável no sentido da medida. Nesta época muitos matemáticos franceses investigavam os conceitos da teoria da medida, ignorando os trabalhos de Cantor (ou fazendo oposição a este), entre eles podemos destacar Camille Jordan, Émile Borel, Louis-René Baire e Henri Lebesgue. A principal motivação de Jordan ao introduzir a noção de conteúdo de um conjunto foi sua tentativa, em 1881, de definir integral de Riemann bidimensional. Na edição deste ano do seu livro *Cours d'analyse*, Jordan investigou a integral da função $f(x, y)$ numa região plana limitada por uma curva fechada. Na sua aproximação da área por somas, Jordan assumiu que os termos $f(x, y)\Delta A$ poderíam ser desprezados quando o correspondente retângulo da partição intercectasse a curva fronteira. Naturalmente, esta afirmação é equivalente a assumir que a soma destes termos tende a zero quando a norma da partição tende a zero, ou seja, que a *a curva fronteira tem conteúdo exterior bidimensional zero*. Provavelmente a descoberta, por Giuseppe Peano, de sua famosa *curva que preenchem o espaço*, uma curva contínua que passa por *todos* os pontos de um quadrado, fez com que, na versão de 1892 do seu livro, Jordan considerasse a condição da curva fronteira da região de integração ter conteúdo zero. Deste modo, Jordan foi capaz de definir a integral de Riemann no sentido da medida: a partição do intervalo $[a, b]$ numa *coleção finita de intervalos* foi substituída por uma *coleção finita de conjuntos mensuráveis* (isto é, conjuntos cujo conteúdo interior e exterior são iguais). Esta definição gera a mesma classe de funções integráveis que a definição de Riemann.

Outro fator que influenciou a reformulação de Jordan da definição da integral de Riemann foi a introdução, nos anos 1870, de *soma superior* e *inferior* de uma função limitada e uma particular partição do intervalo de integração. Mais significante ainda foi a observação que, mesmo quando a função não é integrável, o *ínfimo* e o *supremo* destas somas, tomados sob todas as partições de $[a, b]$, existem. Estes números, usualmente chamados de *integral superior* e *integral inferior*, respectivamente ou simplesmente de integrais de Darboux foram introduzidos, em 1881, por Volterra. Quando estes números são iguais, a função é Riemann integrável. Os matemáticos da época perceberam que para uma classe mais ampla de conjuntos mensuráveis esta igualdade poderia ser obtida. Esta foi a principal motivação de Lebesgue para substituir aditividade *finita* por aditividade *enumerável*.

Em sua tese sobre funções complexas, publicada em 1894, Borel introduziu a noção de *medida aditiva enumerável* (substituindo coberturas finitas por coberturas enumeráveis), mas não introduziu uma nova integral. Deste modo, na metade dos anos 1890 já estavam criadas todas as técnicas necessárias para a generalização da integral de Riemann: noções da teoria dos conjuntos e noções da teoria da medida, difundida na França pelo livro de Jordan e a generalização de "medida Riemann aditiva finita" por "medida Riemann aditiva enumerável". Além disso, na edição de 1892, o livro de Jordan traz uma discussão detalhada sobre funções de variação limitada, tema importante na teoria de diferenciação e na discussão sobre comprimento de curvas.

Paralelamente, mostrou-se que a integral de Riemann não era suficientemente geral para expressar, por exemplo, o comprimento de todas as curvas retificáveis: comprimento de arco é dado pela integral de $\sqrt{1+(f')^2}$, e logo, o conjunto dos pontos de descontinuidade de f' tem medida zero.

Em 1884, L. Scheeffer apresentou uma curva retificável com f' descontínua em todos os pontos, e portanto, uma curva cujo comprimento não pode ser dado pela integral de Riemann.

Outra característica insatisfatória da integral e Riemann é não preservar a relação "inversa" entre integral e derivada, o *Teorema Fundamental do Cálculo.* A integral de Cauchy foi definida somente para funções com, no pior dos casos, "saltos" de descontinuidade finitos, diferenciável, exceto nos pontos de descontinuidade e com derivada igual ao integrando. Para a integral de Riemann, o Teorema Fundamental do Cálculo pode falhar, pois o conjunto dos pontos de descontinuidade do integrando pode ser denso. Além disso, em 1881, Volterra apresentou uma função cuja derivada é *limitada*, mas não é Riemann integrável.

Usando os novos conceitos da teoria dos conjuntos, Baire (um ex-estudante de Volterra) elaborou o primeiro estudo geral das funções descontínuas. Este trabalho é citado (veja, por exemplo, [?]) como a continuação das investigações iniciadas nos anos 1870 e 1880 por U. Dini, C. Arzela e G. Ascoli, sobre o limite de seqüências de funções contínuas. Baire, caracterizou a classe dos limites descontínuos de funções contínuas, classe B_1, em termos dos pontos de descontinuidade das funções limites. Em particular, sua prova de que todas as derivadas pertencem a B_0 (a classe das funções contínuas) ou a B_1 junto com o fato de que muitas funções de B_1 são descontínuas em todos os pontos, e portanto, não são Riemann integráveis (um reflexo da incompletude do espaço das funções Riemann integráveis) influenciou os matemáticos da época a buscarem uma extensão da integral. Na sua classificação de funções contínuas, Baire introduziu o conceito de *categoria* e estudou os conjuntos $\{f \geq \alpha\}$, depois usados por Lebesgue na investigação de conjuntos mensuráveis e funções mensuráveis.

Em 1902, Lebesgue definiu, em sua tese de doutorado, uma integral para funções limitadas considerando as partições na *imagem* da função e não no seu *domínio*, com é o caso da integral de Riemann. Neste método precisamos considerar a mensurabilidade dos conjuntos $\{x\,;\, y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k\}$ que, em geral, são conjuntos Riemann mensuráveis. O principal teorema provado por Lebesgue, chamado *Teorema da Convergência Dominada* é a propriedade mais importante da integral de Lebesgue, que "corrige" uma falha significativa da integral de Riemamm. Além disso, Lebesgue recuperou o Teorema Fundamental do Cálculo para derivadas *limitadas*.

Em 1912, Arnaud Denjoy estabeleu uma extensão deste resultado para derivadas ilimitadas de funções contínuas. Portanto, na teoria de integração de Lebesgue temos que a integral indefinida de f é quase sempre diferenciáveis e igual a f mesmo quando f é descontínua em todos os pontos do seu domínio.

Lebesgue foi capaz, com sua integral, de calcular o comprimento de qualquer curva retificável e, também estender o conceito de área. Nos trabalhos seguintes, Lebesgue investigou a série de Fourier. Em 1903, estendeu o Lema de Riemann para a sua integral estabelecendo novas condições suficientes para a convergência da série de Fourier e mostrou a sua convergência termo a termo. Em 1904, Lebesgue provou que toda função *absolutamente contínuas* é uma integral indefinida. Apesar de alguns defeitos, a teoria de medida de Lebesgue e a integral de Lebesgue foram imediatamente aceitas e a integral aplicada em vários problemas. A teoria da medida, que foi chamada "nova teoria dos conjuntos" foi amplamente investigada e melhorada.

A versão do Teorema Fundamental do Cálculo - TFC, tanto para a integral de Riemann quanto para a integral de Lebesgue, exige que a derivada seja Riemann ou Lebesgue integrável. Esta restrição estimulou a busca de uma teoria de integração na qual o TFC fosse estabelecido de forma mais geral. Nos anos 1910, Oskar Perron e Denjoy desenvolveram integrais diferentes, estendendo a teoria de Lebesgue, para o qual a TFC é geral. Posteriormmente, mostrou-se que estas integrais são equivalentes.

Nos anos 1957-1968, J. Kurzweil e R. Henstock, independentemente um do outro, fizeram uma "simples" modificação na defingão clássica da integral de Riemann e definiram uma "nova integral", conhecida como *integral de Riemann Generalizada* ou *Integral Gauge* ou ainda *integral de Henstock-Kurzweil*, que tem a mesma potência da integral de Lebesgue e a simplicidade da Integral de Riemann.

Capítulo 1

Integral de Riemann generalizada

1.1 Partições e medidores

Para definirmos a integral de Riemann Generalizada, precisamos de algumas definições iniciais, como a de partição refinada e de medidor. Chamamos de partição de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a coleção de pontos $\mathcal{P} = x_0, x_1, \cdots, x_n$ tal que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$; de cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, com $i = 1, 2, \cdots, n$ da partição $\mathcal{P}$, podemos escolher um ponto t_i pertencente a ele, que chamaremos de **rótulo do subintervalo**. Ao conjunto dos pares ordenados $\{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ onde I_i é um subintervalo da partição e t_i é o rótulo a ele associado, chamaremos de **partição rotulada** e denotaremos por $\dot{\mathcal{P}}$.

Definimos *medidor ou calibrador* de um intervalo I, uma função estritamente positiva $\delta : I \to \mathbb{R}$ para todo $t \in I$. O intervalo ao redor de $t \in I$ controlado pelo medidor (calibrador) δ é o intervalo $B[t, \delta(t)] = [t - \delta(t), t + \delta(t)]$. E sendo $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ uma partição rotulada de I, dizemos que ela é refinada pelo medidor ou δ - refinada se

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)], \qquad \forall i = 1, ..., n.$$

Uma subpartição de um intervalo $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, é uma coleção $\{J_j\}_{j=1}^{s}$ de intervalos fechados e não sobrepostos de I. Uma subpartição rotulada de I é uma coleção

$\dot{\mathcal{P}}_0 = \{(J_j, t_j)\}_{j=1}^{s}$ de pares ordenados, $\{J_j\}_{j=1}^{s}$ que formam uma subpartição de I, e rótulos $t_j \in J_j$ para j=1,2,...,s.

Se δ é um medidor em I, dizemos que a subpartição rotulada $\dot{\mathcal{P}}_0$ é δ - refinada se

$$J_j \subseteq [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)] \quad para\ j = 1, 2, ..., s.$$

Um questionamento que fazemos é: *dado qualquer medidor de um intervalo compacto, sempre vai existir uma partição refinada por ele?* A resposta é sim, e o resultado que nos garante isso é o Teorema de Cousin:

Teorema 1.1 (Teorema de Cousin) *Se $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ é um intervalo não degenerado e compacto e $\delta(t)$ um medidor de I, então existe uma partição de I que é δ-refinada.*

Prova: Suponha por contradição que o intervalo $[a, b]$ não tenha nenhuma partição δ-refinada e considere $c = \dfrac{(a+b)}{2}$. Então, dividimos o intervalo $[a, b]$ em $[a, c]$ e $[c, b]$. Notemos que pelo menos um desses intervalos não possui uma partição δ-refinada, pois se os dois tivessem, a união seria uma partição δ-refinada de $[a, b]$.

Seja $I^1 = [a, c]$. Se I^1 não tem uma partição δ-refinada, tomamos $I^1 = [c, b]$. Vamos considerar a notação $I^1 = [a_1, c_1]$ e bisseccionar I^1 tomando $c_1 = \dfrac{(a_1 + b_1)}{2}$. Suponha que $I^2 = [a_1, c_1]$ não tem uma partição δ-refinada, considere $I^2 = [a_2, c_2]$ e bisseccione I^2.

Repetindo esse processo, obtemos uma sequência (I^n) de subintervalos compactos e encaixados de I, ou seja,

$$[a, b] = I \supset I^1 \supset \cdots \supset I^n \supset I^{n+1} \supset \cdots$$

Aplicando a propriedade dos intervalos encaixantes, temos que existe um único $\xi \in I^n$, $\forall n$. Como $\delta(\xi) > 0$, pela propriedade Arquimedidana, temos que existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{(b-a)}{2^p} < \delta(\xi).$$

Logo, $I^p \subset [\xi - \delta(\xi), \xi + \delta(\xi)]$ e o par (I^p, ξ) é uma partição δ-refinada de I^p. Mas, isso contradiz o fato dos subintervalos I^n não terem partições δ-refinadas. Portanto, dado qualquer medidor δ de um intervalo $[a, b]$ existe uma partição δ-refinada de I.$\blacksquare$

1.2 Integral de Riemann

Definição 1.1 *Seja $I = [a, b]$ e uma função $f : I \to \mathbb{R}$. Dada uma partição rotulada $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ de I, definimos a soma de Riemann da função f com a partição $\dot{\mathcal{P}}$ por*

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Com isso, listamos abaixo algumas propriedades da soma de Riemann que serão úteis em algumas demonstrações posteriores. Para isso, consideremos uma partição rotulada $\dot{\mathcal{P}}$ de $[a, b]$, f, g funções, e $c \in \mathbb{R}$ então:

1. $S(f + g, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, \dot{\mathcal{P}}) + S(g, \dot{\mathcal{P}})$;

2. $S(cf, \dot{\mathcal{P}}) = c\, S(f, \dot{\mathcal{P}})$;

3. Se $f(x) \leq g(x),\ \ \forall x \in [a, b]$ então $S(f, \dot{\mathcal{P}}) \leq S(g, \dot{\mathcal{P}})$.

Feito isso, podemos definir quando uma função é Riemann integrável.

Definição 1.2 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é Riemann integrável se existe $\mathcal{I} \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um número $\delta_\varepsilon > 0$ satisfazendo*

$$\forall i,\ \ell(I_i) \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{I} \right| \leq \varepsilon.$$

para toda partição rotulada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ de I com $\ell(I_i) = x_i - x_{i-1}$.

Representaremos o número $\mathcal{I}$ por $\mathcal{R} \displaystyle\int_a^b f$.

Observe que para a integral de Riemann, o medidor $\delta(t)$ é constante e igual a δ_ε.

Uma caracterização da integral de Riemann que nos será muito útil é o Critério de Lebesgue.

1.2.1 Critério de Lebesgue

Para compreendermos melhor esse critério, precisamos de duas noções da Teoria da Medida, que são: *conjuntos de medida nula* e *propriedade quase sempre.*

Definição 1.3 (Conjuntos de Medida Nula) *Um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se $\forall \varepsilon > 0$ existe uma cobertura enumerável $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) < \varepsilon$ com $I_n = (a_n, b_n)$, $\ell(I_n) = b_n - a_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Exemplo 1.1 *Todo conjunto $A \subset \mathbb{R}$ enumerável possui medida nula.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, arbitrário e, sendo $\{r_k, k \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração desse conjunto, podemos tomar a cobertura $\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$, com $J_k = \left(r_k - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}, r_k + \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}\right)$, logo, $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$ com $\sum_{n=1}^{\infty} \ell(J_k) < \varepsilon$. Portanto A é de medida nula. ■

Definição 1.4 *Uma propriedade é dita ser verdadeira quase sempre se o conjunto no qual ela é falsa é um conjunto de medida nula.*

Agora, enunciaremos sem provar (a demonstração pode ser encontrada em [?]) o critério de Lebesgue:

Teorema 1.2 (Critério de Lebesgue) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. f é Riemann integrável se, e somente se, ela é contínua quase sempre.*

1.3 Integral de Riemann generalizada

Definição 1.5 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é Riemann Generalizada integrável em I se existe $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um medidor $\delta_\varepsilon(\cdot)$ de I satisfazendo*

$$\forall i,\ \ell(I_i) \leq \delta_\varepsilon(t_i) \Rightarrow |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{C}| \leq \varepsilon.$$

para toda partição rotulada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ de I com $\ell(I_i) = x_i - x_{i-1}$.

Representaremos o número $\mathcal{C}$ por $\mathcal{RG}\int_a^b f\,dx$ e $\mathcal{R}^*(I)$ o conjunto das funções Riemann generalizada integráveis.

Por simplicidade, usaremos a seguinte definição de integral de Riemann Generalizada, que é baseada no conceito de δ-refinamento da partição com relação ao controlador.

Definição 1.6 (Integral de Riemann Generalizada) *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é Riemann Generalizada integrável em I se existe $\mathcal{C} \in \mathbb{R}$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe um medidor $\delta_\varepsilon(\cdot)$ de I satisfazendo*

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{C}| \leq \varepsilon. \tag{1.1}$$

para toda partição rotulada δ_ε-refinada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ de I.

Lembre que, uma partição rotulada δ-refinada de I significa que temos uma partição rotulada de I satisfazendo $t_i - \delta(t_i) < x_{i-1} \leq t_i \leq x_i < t_i + \delta(t_i)$ para cada subintervalo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Note que $\ell(I_i) = x_i - x_{i-1} < 2\delta(t_i)$, $1 \leq i \leq n$.

A prova que as definições **??** e **??** são equivalentes pode ser encontrada em [**?**, p.12].

No que segue, mostraremos que se $\mathcal{C}$ existe então é unico.

Proposição 1.1 *Se $\mathcal{C}$ existe então é unico.*

Prova: Suponha que existam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ tais que $\mathcal{C} \neq \mathcal{C}'$. Seja $\varepsilon > 0$.

Então, existem medidores δ e δ' de I tais que para toda particação $\dot{\mathcal{P}}$ rotulada δ-refinada e δ'-refinada, repectivamente, tem-se

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{C}| \leq \varepsilon, \quad |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{C}'| \leq \varepsilon.$$

Portanto, para $\delta'' = \min\{\delta, \delta'\}$, tem-se que $\delta''(\cdot)$ é um medidor de I. Assim, para toda partição rotulada δ''-refinada $\dot{\mathcal{P}}$ de I (e, logo, δ-refinada e δ'-refinada) tem-se

$$|\mathcal{C} - \mathcal{C}'| \leq |\mathcal{C} - S(f, \dot{\mathcal{P}})| + |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{C}'| \leq 2\varepsilon.$$

Escolhendo $\varepsilon = \dfrac{|\mathcal{C} - \mathcal{C}'|}{3} > 0$, obtemos

$$|\mathcal{C} - \mathcal{C}'| \leq \frac{2}{3}|\mathcal{C} - \mathcal{C}'|,$$

que é uma contradição. ∎

Agora, apresentaremos alguns exemplos de funções Riemann generalizada integráveis.

Exemplo 1.2 *A função constante $f(x) = c$ é Riemann Generalizada integrável em $I = [a, b]$.*

De fato, seja $\dot{\mathcal{P}} = ([x_{i-1}, x_i], t_i)_{i=1}^n$ qualquer partição rotulada de I. Então, a soma de Riemann dessa partição é

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c(x_i - x_{i-1}) = c(b - a).$$

Consideremos $\delta_\varepsilon = 1$. Se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição δ_ε- refinada, então $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - c(b - a)| = 0 < \varepsilon$, logo, $f \in \mathcal{R}^*$ e $\mathcal{RG}\displaystyle\int_a^b f = c(b - a)$. E escrevemos:

$$\mathcal{RG}\int_a^b f dx = c(b - a).$$

Exemplo 1.3 *A função $g(x) = x^2$ é Riemann Generalizada integrável em $[a, b]$ e $\mathcal{RG}\displaystyle\int_a^b x^2 = \frac{1}{3}(b^3 - a^3)$.*

De fato, considere a função auxiliar $G(x) = \dfrac{x^3}{3}$. Dado uma partição rotulada $\dot{\mathcal{Q}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ vamos usar que $G'(x) = g(x) = x^2$ e o Teorema do valor médio. Portanto, existe $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ tal que

$$G(x_i) - G(x_{i-1}) = g(c_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Além disso,

$$G(b) - G(a) = \sum_{i=1}^{n} G(x_i) - G(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} {c_i}^2 (x_i - x_{i-1}). \tag{1.2}$$

Agora, dada uma partição rotulada δ_ε-refinada $\dot{\mathcal{Q}}= \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ de I, com $\delta_\varepsilon = \delta$ constante e usando (**??**) tem-se

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) - S(f, \dot{\mathcal{Q}}) &= \sum_{i=1}^n {c_i}^2(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n {t_i}^2(x_{i-1} - x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n [{c_i}^2 - {t_i}^2](x_i - x_{i-1}). \end{aligned}$$

Então,

$$\left| G(b) - G(a) - S(f, \dot{\mathcal{Q}}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |{c_i}^2 - {t_i}^2|(x_i - x_{i-1}).$$

Agora $|{c_i}^2 - {t_i}^2| = |c_i - t_i||c_i + t_i|$, e, como $\dot{\Pi}$ é δ_ε-refinada segue que $|c_i - t_i| \leq 2\delta$. Tomando $\alpha = \max\{|a|, |b|\}$ e usando a Desigualdade triangular obtemos $|c_i + t_i| \leq |c_i| + |t_i| \leq 2\alpha$. Portanto,

$$\left| G(b) - G(a) - S(f, \dot{\mathcal{Q}}) \right| \leq \sum_{i=1}^n 4\alpha\, \delta(x_i - x_{i-1}) = 4\alpha\delta(b - a).$$

Assim, para $\varepsilon > 0$ arbitrário e tomando $\delta_\varepsilon(t) = \dfrac{\varepsilon}{4\alpha(b-a)}$ tem-se $g \in \mathcal{R}^*(I)$ e

$$\mathcal{RG}\int_a^b g = G(b) - G(a) = \frac{b^3 - a^3}{3}.$$

■

Proposição 1.2 *Toda função Riemann integrável é Riemann Generalizada integrável.*

Prova: Como f é Riemann integrável em $I = [a, b]$ existe um número $\mathcal{I}$ tal que para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo

$$\forall i, \;\; \ell(I_i) < \delta \Rightarrow \left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{I} \right| < \epsilon$$

para toda partição rotulada $\dot{\mathcal{P}}$ de I com $\ell(I_i) = x_i - x_{i-1}$.

Considere o medidor $\delta_\epsilon(t) = \delta/2$, $\forall t \in I$. Seja $\dot{\mathcal{Q}}= ([y_{j-1}, y_j], t_j)_{j=1}^n$ qualquer partição rotulada δ_ϵ-refinada de I (a existência desta partição é garantida pelo Teorema de Cousin). Então, $y_j - y_{j-1} < 2\delta(t_j) < \delta$ e, logo,

$$\left| \sum_{j=1}^n f(t_j)(y_j - y_{j-1}) - \mathcal{I} \right| < \epsilon.$$

Portanto, f é Riemann Generalizada integrável e $\mathcal{RG}\displaystyle\int_a^b f\,dx = \mathcal{I}$. ■

Mas a recíproca da Proposição **??** não é verdadeira. De fato,

Exemplo 1.4 *Consideremos a função de Dirichlet, em* $[0,1]$*, definida por*

$$f(t) = \begin{cases} 1 & se \quad t \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & se \quad t \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Vamos mostrar que f *é Riemann generalizada Integrável com* $\mathcal{RG}\displaystyle\int_0^1 f = 0$.

De fato, sejam $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ uma enumeração dos racionais em $[0,1]$ e $\varepsilon > 0$ dado. Considere o seguinte medidor:

$$\delta_\varepsilon = \begin{cases} \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}} & \text{se} \quad t = r_k, \\ 1 & \text{se} \quad t \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Vamos analisar somente os rótulos t_i racionais, pois a contribuição dos irracionais será nula na soma de Riemann. Se t_i é racional então $t_i = r_k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, logo r_k é o rótulo de algum subintervalo I_i. Como $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição rotulada δ_ε-refinada, temos

$$I_i \subseteq [r_k - \delta_\varepsilon(r_k), r_k + \delta_\varepsilon(r_k)]$$

com $\ell(I_i) < 2\delta_\varepsilon(r_k) = \dfrac{\varepsilon}{2^k}$. Portanto,

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}})| = \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Logo, $|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - 0| \leq \varepsilon$, o que implica $f \in \mathcal{R}^*([0,1])$ e $\mathcal{RG}\displaystyle\int_0^1 f = 0$. ■

Portanto, concluímos que a integral de Riemann Generalizada é uma extensão da integral de Riemann. Por simplicidade, se uma função for Riemann generalizada integrável diremos apenas que é integrável e usaremos a notação $\displaystyle\int_a^b f$. As outras integrais terão notações especiais.

1.4 Propriedades operatórias da integral

Teorema 1.3 *Considere as funções $f, g \in \mathcal{R}^*(I)$ definidas de I em $\mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$, então:*

(i) $f + g \in \mathcal{R}^*(I)$ *e* $\displaystyle\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

(ii) $cf \in \mathcal{R}^*(I)$ *e* $\displaystyle\int_a^b cf = c\int_a^b f$;

(iii) *Se* $f(x) \geq 0,\ \forall x \in I$ *então* $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$;

(iv) *Se* $f(x) \leq g(x),\ \forall x \in I$ *então* $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Prova:

(i) Seja $\varepsilon > 0$. Como f e g são integráveis existem medidores $\delta'(t)$ e $\delta''(t)$ de I tais que para toda partição rotulada δ'-refinada $\dot{\mathcal{P}}= \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ tem-se

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

e para toda partição rotulada δ''-refinada $\dot{\mathcal{P}}= \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ tem-se

$$\left| S(g, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b g \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $\delta_\varepsilon(t) = \min\{\delta'(t), \delta''(t)\}$ temos que $\delta(\cdot)$ é um medidor de I. Assim, para toda partição rotulada δ_ε-refinada $\dot{\mathcal{P}}$ de I (e, logo, δ'-refinada e δ''-refinada) tem-se

$$\begin{aligned}
S(f+g, \dot{\mathcal{P}}) &= \sum_{i=1}^n (f+g)(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=1}^n g(t_i)(x_i - x_{i-1}) \\
&= S(f, \dot{\mathcal{P}}) + S(g, \dot{\mathcal{P}}).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left| S(f+g, \dot{\mathcal{P}}) - \left(\int_a^b f + \int_a^b g \right) \right| &\leq \left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| + \left| S(g, \dot{\mathcal{P}}) \int_a^b g \right| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Logo, $f+g \in \mathcal{R}^*(I)$ e $\displaystyle\int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$.

(ii) Sejam $\varepsilon > 0$ e $c \neq 0$. Como f é integrável existe um medidor δ' tal que

$$\left|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon$$

para toda partição rotulada δ'-refinada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$. Assim,

$$\begin{aligned}\left|S(c\,f,\dot{\mathcal{P}}) - c\int_a^b f\right| &= \left|c\,S(f,\dot{\mathcal{P}}) - c\int_a^b f\right| \\ &= \left|c\left(S(f,\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right)\right| \\ &= |c|\left|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| \leq |c|\varepsilon \leq \varepsilon_1\end{aligned}$$

com $\varepsilon_1 = |c|\,\varepsilon > 0$. Portanto, $c\,f \in \mathcal{R}^*(I)$ e $\displaystyle\int_a^b c\,f = c\int_a^b f$.

(iii) Seja $\varepsilon > 0$. Como f é integrável existe um medidor $\delta'(t)$ tal que para toda partição rotulada δ'-refinada $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i,t_i)\}_{i=1}^n$ tem-se

$$\left|S(f,\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f\right| \leq \varepsilon.$$

Além disso, $f(x) \geq 0,\ \forall x \in I$, o que implica

$$S(f,\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

Logo, $0 \leq S(f,\dot{\mathcal{P}}) \leq \displaystyle\int_a^b f + \varepsilon, \forall\varepsilon > 0$. Portanto, $\displaystyle\int_a^b f \geq 0$.

(iv) Considere a função $h = g - f$. Por **(i)** temos que h é integrável. Como $h \geq 0$, segue de **(iii)** que $\displaystyle\int_a^b h \geq 0$. Então,

$$\int_a^b h = \int_a^b g - \int_a^b f \geq 0 \Rightarrow \int_a^b g \geq \int_a^b f.$$

∎

Como consequência do Teorema **??** temos os seguintes corolários:

Corolário 1.1 *Se* $f \in \mathcal{R}^*(I)$ *e* $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in I = [a,b]$ *e* $m, M \in \mathbb{R}$ *então*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

Prova: Sendo $m \leq f(x) \leq M,\ \forall x \in I$ segue de **(iv)** que $\displaystyle\int_a^b m \leq \int_a^b f \leq \int_a^b M$ e logo,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f \leq M(b-a).$$

■

Corolário 1.2 *Se* f *e* $|f|$ *são Riemann Generalizada integráveis então*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Prova: Das propriedades de valor absoluto, segue que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ e usando **(iv)** tem-se

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f| \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

■

1.4.1 Resultados importantes

Teorema 1.4 (Critério de Cauchy) *Uma função* $f : I \to \mathbb{R}$ *é Riemann Generalizada integrável se, e somente se, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe um medidor* η_ε *em* I *tal que se* $\dot{\mathcal{P}}$ *e* $\dot{\mathcal{Q}}$ *são quaisquer partições* η_ε*-refinadas então*

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| \leq \varepsilon.$$

Prova: $(\Rightarrow)$ Se $f \in \mathcal{R}^*(I)$ com integral $\mathcal{I}$ então existe um medidor $\delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ são partições $\delta_{\frac{\varepsilon}{2}}$-refinadas de I tem-se

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{I}| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad |S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - \mathcal{I}| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fazendo $\eta_\varepsilon(t) = \delta_{\frac{\varepsilon}{2}}(t)$ para $t \in I$ então $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ são partições η_ε-refinadas e

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| \leq |S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{I}| + |S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - \mathcal{I}| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Para cada $n \in \mathbb{N}$, considere um medidor δ_n tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ são partições δ_n-refinadas então

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}})| \leq \frac{1}{n}.$$

Podemos assumir que $\delta_n(t) \geq \delta_{n+1}(t)$ em I e $n \in \mathbb{N}$; caso contrário substituímos $\delta'_n(t) = \min\{\delta_1(t), \cdots, \delta_n(t)\}$ em I. Para cada $n \in \mathbb{N}$ seja $\dot{\mathcal{P}}_n$ uma partição δ_n-refinada. Claramente se $m > n$ então $\dot{\mathcal{P}}_m$ e $\dot{\mathcal{P}}_n$ são partições δ_n-refinadas, e logo,

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}_n) - S(f, \dot{\mathcal{P}}_m)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad m > n. \tag{1.3}$$

Portanto, sequência $(S(f, \dot{\mathcal{P}}_m))_{m=1}^{\infty}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$, e logo, convergente. Seja $\mathcal{I} = \lim\limits_{m\to\infty} S(f, \dot{\mathcal{P}}_m)$. Passando o limite em (**??**) obtemos

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}_n) - \mathcal{I}| \leq \frac{1}{n}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Agora, podemos mostrar que $\mathcal{I}$ é a integral de f. Para isto, sejam $\varepsilon > 0$ e $K \in \mathbb{N}$ tais que $K > \frac{2}{\varepsilon} > 0$. Então, para qualquer partição δ_K-refinada $\dot{\mathcal{Q}}$ tem-se

$$\begin{aligned} |S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - \mathcal{I}| &\leq |S(f, \dot{\mathcal{Q}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}}_K)| + |S(f, \dot{\mathcal{Q}}_K - \mathcal{I})| \\ &\leq \frac{1}{K} + \frac{1}{K} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto, a função f é integrável e $\displaystyle\int_a^b f = \mathcal{I}$. ■

Teorema 1.5 (Teorema da aditividade) *Considere $f : I \to \mathbb{R}$ e seja $c \in (a, b)$. Então, f é integrável se, e somente se, as restrições de f aos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$ são também integráveis. E nesse caso, tem-se*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f \tag{1.4}$$

Prova: ($\Leftarrow$) Sejam f_1 e f_2 as restrições de f aos subintervalos $I_1 = [a, c]$ e $I_2 = [c, b]$, e suas integrais $\mathcal{I}_1$ e$\mathcal{I}_2$, respectivamente. Então, dado $\varepsilon > 0$ existe um medidor δ' em I_1 e um medidor δ'' em I_2 tal que para toda partição δ'-refinada $\dot{\mathcal{P}}_1$ de I_1 e toda partição δ''-refinada $\dot{\mathcal{P}}_2$ de I_2 tem-se

$$|S(f_1, \dot{\mathcal{P}}_1) - \mathcal{I}_1| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad |S(f_2, \dot{\mathcal{P}}_2) - \mathcal{I}_2| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Vamos escolher o medidor $\delta(t)$ em $[a,b]$ do seguinte modo:

$$\delta(t) = \begin{cases} \min\left\{\delta'_\varepsilon(t), \dfrac{(c-t)}{2}\right\} & \text{se} \quad t \in [a,c), \\ \min\{\delta'_\varepsilon(t), \delta''_\varepsilon(t)\} & \text{se} \quad t = c, \\ \min\left\{\delta''_\varepsilon(t), \dfrac{(t-c)}{2}\right\} & \text{se} \quad t \in (c,b]. \end{cases}$$

Seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição δ_ε-refinada de de $[a,b]$ então o ponto c é rótulo de pelo menos um subintervalo de $\dot{\mathcal{P}}$. Podemos rearranjar os subintervalos da partição de tal modo que c seja rótulo de dois subintervalos e portanto um ponto da partição $\dot{\mathcal{P}}$.

Sejam $\dot{\mathcal{P}}_1$ a partição de I_1 que consiste dos pontos da partição $\dot{\mathcal{P}} \cap I_1$ e $\dot{\mathcal{P}}_2$ a partição de I_2 que consiste dos pontos da partição $\dot{\mathcal{P}} \cap I_2$. Então

$$S(f, \dot{\mathcal{P}}) = S(f, \dot{\mathcal{P}}_1) + S(f, \dot{\mathcal{P}}_2).$$

Como $\dot{\mathcal{P}}_1$ é δ'_ε-refinada e $\dot{\mathcal{P}}_2$ é δ''_ε-refinada, concluimos que

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - (\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2)| \leq |S(f_1, \dot{\mathcal{P}}_1) - \mathcal{I}_1| + |S(f_2, \dot{\mathcal{P}}_2) - \mathcal{I}_2| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Logo, f é integrável em I e a relação (**??**) é verdadeira.

($\Rightarrow$) Reciprocamente, suponha que f é integrável então para todo $\varepsilon > 0$ existe um medidor η_ε que satisfaz o Critério de Cauchy. Como na prova acima, sejam f_1 a restrição de f a $I_1 = [a,c]$, $\eta'_\varepsilon(t)$ a restrição de $\eta_\varepsilon(t)$ a I_1, $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ partições η'_ε-refinadas de I_1. Podemos estender as partições $\dot{\mathcal{P}}_1$ e $\dot{\mathcal{Q}}_1$ às partições $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ de I que são η_ε-refinada e se usarmos os mesmos pontos e rótulos em I_2 para ambas partições $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ concluímos que

$$S(f_1, \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1, \dot{\mathcal{Q}}_1) = S(f, \dot{\mathcal{P}}) - S(f, \dot{\mathcal{Q}}).$$

Mas $\dot{\mathcal{P}}$ e $\dot{\mathcal{Q}}$ são η_ε-refinadas e pelo Critério de Cauchy obtemos

$$|S(f_1, \dot{\mathcal{P}}_1) - S(f_1, \dot{\mathcal{Q}}_1)| \leq \varepsilon.$$

Portanto, f_1 é integrável em I_1. Analogamente, f_2 é integrável em I_2 e a relação (**??**) é obtida como na primeira parte do teorema. ■

Corolário 1.3 *Se $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ e se $a = c_0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n = b$, então as restrições de f a cada subintervalo $[c_{i-1}, c_i]$ são integráveis, e*

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f.$$

Ideia da prova: A prova desse corolário é feita por indução matemática. $n = 1$ foi provado no Teorema **??**. Suponha que vale para $n = k$ e mostre que vale para $n = k + 1$.

A prova do seguinte resultado pode ser encontrada em [**?**]:

Teorema 1.6 (Teorema do Confronto) *Uma função $f \in \mathcal{R}^*(I)$ se, e somente se, $\forall \varepsilon > 0$, existem funções φ_ε , $\psi_\varepsilon \in \mathcal{R}^*(I)$ com $\varphi_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \psi_\varepsilon(x)$ $\forall x \in I$ tais que*

$$\int_a^b (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

1.4.2 Lema de Saks-Henstock

Na definição da integral de f em $I = [a, b]$ temos que para todo $\epsilon > 0$ existe um medidor δ_ϵ de I tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição δ_ϵ-refinada de I então a soma de Riemann $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ satisfaz a desigualdade

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| \leq \epsilon.$$

O Lema de Saks-Henstock garante que o mesmo "grau" de aproximação vale para *qualquer* subpartição de I. Uma subpartição do intervalo I é uma coleção de intervalos fechados, disjuntos dois a dois $\{J_j\}_{j=1}^s$ de I.

Lema 1.1 (Saks-Henstock) *Seja $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$. Para todo $\epsilon > 0$ seja δ_ϵ o medidor em I tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição δ_ϵ-refinada de I então*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f| \leq \epsilon. \tag{1.5}$$

Se $\dot{\mathcal{P}}_0 = \{(J_j, t_j) : j = 1, 2, ..., s\}$ *é uma subpartição* δ_ϵ*-refinada de* I *então*

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\left\{f(t_j)\ell(J_j) - \int_{J_j} f\right\}\right| = \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f\right| \leq \epsilon \tag{1.6}$$

com $U(\dot{\mathcal{P}}_0) = \bigcup_{j=1}^{s} J_j$, $S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) = \sum_{j=1}^{s} f(t_j)\ell(J_j)$ *e* $\int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f = \sum_{j=1}^{s}\int_{J_j} f.$

Prova: Sejam $K_1, K_2, ..., K_m$ subintervalos fechados de I tais que $\{J_j\} \cup \{K_k\}$ formam uma partição de I. Seja $\alpha > 0$ arbitrário. Como as restrições de f a cada subintervalo K_k são integráveis, existem medidores $\delta_{\alpha,k}$ em K_k tais que se partição $\dot{\mathcal{Q}}_k$ é uma partição $\delta_{\alpha,k}$-refinada de K_k, então

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{Q}}_k) - \int_{K_k} f\right| \leq \frac{\alpha}{m}. \tag{1.7}$$

Podemos assumir que $\delta_{\alpha,k}(x) \leq \delta_\epsilon(x)$, $\forall x \in K_k$. Seja $\dot{\mathcal{W}} = \dot{\mathcal{P}}_0 \cup \dot{\mathcal{Q}}_1 \cup ... \cup \dot{\mathcal{Q}}_m$ uma partição rotulada de I. Então, $\dot{\mathcal{W}}$ é δ_ϵ - refinada e a inequação (**??**) é válida para $\dot{\mathcal{W}}$. Além disso, não é complicado obtermos

$$S(f, \dot{\mathcal{W}}) = S(f, \dot{\mathcal{P}}_0) + S(f, \dot{\mathcal{Q}}_1) + \ldots + S(f, \dot{\mathcal{Q}}_m),$$

$$\int_a^b f = \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} + \int_{K_1} f + \ldots + \int_{K_m} f.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned}\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f\right| &= \left|\left\{S(f, \dot{\mathcal{W}}) - \sum_{k=1}^{m} S(f, \dot{\mathcal{Q}}_k)\right\} - \left\{\int_a^b f - \sum_{k=1}^{m}\int_{K_k} f\right\}\right| \\ &\leq \left|S(f, \dot{\mathcal{W}}) - \int_a^b f\right| + \sum_{k=1}^{m}\left|S(f, \dot{\mathcal{Q}}_k) - \int_{K_k} f\right|\end{aligned} \tag{1.8}$$

Combinando (**??**) e (**??**) com (**??**) obtemos

$$\left|S(f, \dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f\right| \leq \epsilon + m\left(\frac{\alpha}{m}\right) = \epsilon + \alpha.$$

Como $\alpha > 0$ é arbitrário, o resultado segue. ∎

Corolário 1.4 *Com as hipóteses do Lema de Saks-Henstock, temos*

$$\sum_{j=1}^{s}\left|f(t_j)\ell(J_j) - \int_{J_j} f\right| \leq 2\varepsilon. \tag{1.9}$$

1.5 Integral imprópria em intervalos limitados

Nosso objetivo nesta seção é fazer algumas observações sobre “integrais impróprias” na teoria da Riemann Generalizada em intervalos limitados.

Sabemos que uma função Riemann integrável é limitada (isso não é necessáriamente o caso para funções Riemann Generalizada integráveis) e para integrarmos funções ilimitadas em intervlos limitados usamos um processo de limite. Por exemplo, a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{se} \quad 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{se} \quad x = 0. \end{cases} \tag{1.10}$$

é Riemamm integrável em $[a, 1]$ para todo $a \in (0, 1]$ e portanto podemos considerar a integral “imprópria” de f em $[0, 1]$ dada por

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = \lim_{a\to 0^+} (1 - 2\sqrt{a}) = 2.$$

Este processo de limite não é necessário no contexto da integração Riemann Generalizada. Para ilustrar, considere o seguinte exemplo:

Exemplo 1.5 *Seja f a função definida em (**??**). Então, f é Riemann Generalizad integrável e* $\displaystyle\int_0^1 f = 2.$

De fato, primeiro vamos analisar a função perto de zero. Sejam $\epsilon > 0$ e $0 < x \leq 1$. Então, do cálculo elementar sabemos que a integral em $[0, x]$ é $2\sqrt{x}$. Assim, se tomamos um medidor $\delta_\epsilon(t)$ tal que $(t - \delta_\epsilon(t), t + \delta_\epsilon(t) \subset (0, t)$, $\forall t \in (0, 1]$ então para uma partição rotulada δ_ϵ-refinada $\dot{\mathcal{P}}$ de $[0, 1]$, o rótulo associado ao subintervalo de $\dot{\mathcal{P}}$ que contém o zero é um rótulo nulo. Assim, tomando para o rótulo zero $\left(-\dfrac{\epsilon^2}{16}, \dfrac{\epsilon^2}{16}\right)$ temos

$$\left| f(0)(x_1 - 0) - 2\sqrt{x_1} \right| = 2\sqrt{x_1} < 2\sqrt{\frac{\epsilon^2}{16}} = \frac{\epsilon}{2}$$

sempre que $[0, x_1] \subset \left(-\dfrac{\epsilon^2}{16}, \dfrac{\epsilon^2}{16}\right)$.

Portanto, se $0 < u < v \leq 1$ temos que a integral em $[u, v]$ é $2\sqrt{v} - 2\sqrt{u}$. Logo, *para* $z \in [u,v]$ *tem-se*

$$
\begin{aligned}
\left|f(z)(v-u)-(2\sqrt{v}-2\sqrt{u})\right| &= (v-u)\left|\frac{1}{\sqrt{z}}-\frac{2}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}\right| \\
&= \frac{v-u}{z}\left|\frac{\sqrt{z}(\sqrt{v}+\sqrt{u})-2z}{\sqrt{v}+\sqrt{u}}\right| \\
&\leq \frac{v-u}{z}\left|\frac{\sqrt{z}(\sqrt{v}+\sqrt{u})-2z}{\sqrt{z}}\right| \\
&\leq \frac{v-u}{z}\left|\sqrt{v}+\sqrt{u}-2\sqrt{z}\right| \\
&\leq \frac{v-u}{z}\Big(|\sqrt{v}-\sqrt{z}|+|\sqrt{u}-\sqrt{z}|\Big) \\
\left|f(z)(v-u)-(2\sqrt{v}-2\sqrt{u})\right| &\leq \frac{v-u}{z}\left(\frac{v-z}{\sqrt{v}+\sqrt{z}}+\frac{z-u}{\sqrt{u}+\sqrt{z}}\right) \\
&\leq \frac{v-u}{z}\left(\frac{v-z}{\sqrt{z}}+\frac{z-u}{\sqrt{z}}\right) \\
&\leq \frac{(v-u)^2}{z^{2/3}}.
\end{aligned}
$$

Isso sugere que tomemos $\delta(z) = \dfrac{\epsilon z^{3/2}}{4}$ *e façamos* $(z-\delta(z), z+\delta(z) \cap (0,2))$ *para* $z > 0$. *Assim, para partição rotulada* δ_ϵ*-refinada* $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_i, x_{i+1}], t_i)\}_{i=0}^{n+1}$ *com* $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1$ *e* $t_0 = 0$, *pelos cálculos acima, temos que*

$$
\begin{aligned}
\left|S(f,\dot{\mathcal{P}})-2\right| &= \left|\sum_{i=0}^{n} f(t_i)(x_{i+1}-x_1)-(2\sqrt{x_{i+1}}-2\sqrt{x_i})\right| \\
&\leq 2\sqrt{x_1}+\sum_{i=0}^{n}\left|f(t_i)(x_{i+1}-x_1)-(2\sqrt{x_{i+1}}-2\sqrt{x_i})\right| \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_{i+1}-x_i)^2}{t_i^{3/2}} \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_{i+1}-x_i)}{t_i^{3/2}}2\delta(t_i) \\
&\leq \frac{\epsilon}{2}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\epsilon(x_{i+1}-x_i)}{2} \leq \epsilon.
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Observe que devido a singularidade de f no zero, o medidor é mais "refinado" próximo do zero do que próximo do 1, ou seja, controlando os comprimentos dos subintervalos somos capazes de controlar o "comportamento" da função. Sabemos que para a integral de Riemann não é possível controlar o comportamento local da função.

O seguinte resultado (cuja prova pode ser encontrada em [**?**, p. 25]) mostra que qualquer função que tem integral imprópria no sentido de Riemann é Riemann Generalizada integrável.

Teorema 1.7 (Teorema de Hake) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. f é integrável em $[a, b]$ se, e somente se, para todo $\beta \in (a, b)$ a restrição de f ao intervalo $[a, \beta]$ é integrável e*

$$\lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f = \mathcal{I} \in \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

Neste caso, $\displaystyle\int_a^b f = \mathcal{I}$.

Observaçãoo 1.1 *No Teorema de Hake, podemos considerar também $\displaystyle\lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f$ para todo $\alpha \in (a, b)$.*

Observe que, pelo Teorema de Hake, a integral de Riemann Generalizada *não é estendida* por um processo de limite como em (**??**). Portanto, não existe "integral imprópria" na teoria de integração Riemann Generalizada para intervalos limitados. Podemos mostrar que isso também é verdadeiro para intervalos ilimitados. Este resultado é uma diferença significativa entre a integral de Riemann Generalizada e as integrais de Riemann e de Lebesgue.

Vamos aplicar o Teorema **??** no seguinte caso:

Exemplo 1.6 *Sejam $p \in \mathbb{R}$ e $f(x) = x^p$, $0 \leq x \leq 1$. Para $0 < c < 1$ e $p \neq -1$*

$$\int_c^1 f = \frac{1 - c^{p+1}}{p + 1}. \tag{1.12}$$

*Pelo Teorema **??**, a expressão (**??**) tem limite finito quando $c \to 0$, se e somente se $p+1>0$ e neste caso $\displaystyle\int_0^1 x^p = \frac{1}{p+1}$. Para $p=-1$ tem-se $\displaystyle\int_c^1 f = -\ln c$ e, logo, x^p não é integrável em $[0,1]$. Em resumo, x^p é integrável em $[0,1]$ se, e somente se $p>-1$.*

Capítulo 2

Teorema Fundamental do Cálculo

Neste Capítulo analisaremos o Teorema Fundamental do Cálculo -TFC no contexto da integração de Riemann Generalizada. Existem dois aspectos que tradicionalmente chamamos de TFC: um relacionado com a integração da derivada e outro com derivação de integrais. Trataremos esses aspectos separadamente. Primeiro provaremos resultados mais elementares e depois os resultados mais "fortes" cujas provas são um pouco mais complicadas.

2.1 Primitivas e Integral indefinida

Definição 2.1 *Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $F, f : I \to \mathbb{R}$, definimos:*

1. *F é uma* **primitiva** *de f em I se a derivada $F'(x)$ existe e $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$;*

2. *F é uma* **c-primitiva** *de f em I se F é contínua em I e existe um conjunto enumerável E de I tal que $F'(x)$ não existe ou não é igual a $f(x)$ para $x \in E$;*

3. *F é uma* **a-primitiva** *de f em I se F é contínua em I e existe um conjunto de medida nula E de I tal que $F'(x)$ não existe ou não é igual a $f(x)$ para $x \in E$;*

4. Se $f \in \mathcal{R}^*(I)$ então a função $F : I \to \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_a^x f$$

é chamada a **integral indefinida** *de f.*

Exemplo 2.1 *Considere a função de Dirichlet, em $[0,1]$, definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & se \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Sabemos que f é descontínua em $[0,1]$ e f é Riemann Generalizada integrável (veja exemplo **??***). Então, $F(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$ é uma c-primitiva de f com $E = \mathbb{Q}$. De fato, $F'(x) = f(x)$, $\forall x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]$*

2.1.1 Lema de Straddle

Para provarmos o TFC que "integra derivadas" precisaremos de um lema, chamado *Lema de Straddle*, que é uma consequência direta da definição de derivada.

Lema 2.1 *Sejam $I = [a,b]$ e $F : I \to \mathbb{R}$ derivável em $t \in I$. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta_\varepsilon(t) > 0$ tal que*

$$|F(v) - F(u) - F'(t)(v-u)| \leq \varepsilon(v-u) \tag{2.1}$$

sempre que $u, v \in I$ e $t - \delta_\varepsilon(t) \leq u \leq t \leq v \leq t + \delta_\varepsilon(t)$.

Prova: Como F é derivável em $t \in I$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta_\varepsilon > 0(t)$ tal que se $0 < |z - t| < \delta_\varepsilon(t)$, $z \in I$, então

$$\left| \frac{F(z) - F(t)}{z - t} - F'(t) \right| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\Big| F(z) - F(t) - F'(t)(z-t) \Big| < \varepsilon |z - t|$$

para todo $z \in I$ tal que $0 < |z - t| < \delta_\varepsilon(t)$.

Em particular, se tomarmos $u, v \in (t-\delta_\varepsilon(t), t+\delta_\varepsilon(t))$ tais que $u \leq t$ e $v \geq t$ (note que $t-u \geq 0$ e $v-t \geq 0$) então, subtraindo e somando $F(t) - F'(t)\,t$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&\Big|F(v) - F(u) - F'(t)(v-u)\Big| \\
&= \Big|F(v) - F(u) - F'(t)(v-u) + (F(t) - F'(t)\,t) - (F(t) - F'(t)\,t)\Big| \\
&\leq \Big|(F(v) - F(t) - F'(t)(v-t)) - (F(u) - F(t) - F'(t)(t-u))\Big| \\
&\leq \Big|F(v) - F(t) - F'(t)(v-t)\Big| + \Big|F(u) - F(t) - F'(t)(t-u)\Big| \\
&\leq \varepsilon(v-t) + \varepsilon(t-u) \leq \varepsilon(v-u).
\end{aligned}
$$

■

2.2 Teorema Fundamental do Cálculo

2.2.1 Integrando derivadas

Nesta seção, analisaremos as várias versões do TFC que garantem que a *derivada* de qualquer função *é sempre* Riemann Generalizada integrável sem impor hipóteses adicionais na derivada.

Teorema 2.1 (TFC I) *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva F em $[a,b]$, então $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ e*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \tag{2.2}$$

Prova: Seja $\varepsilon > 0$. Como F é uma primitiva de f temos que $F'(x) = f(x)$, $\forall x \in I$ e podemos considerar o medidor $\delta_\varepsilon(t)$ dado no Lema de Straddle. Seja $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição δ_ε-refinada de $[a,b]$. Como $x_{i-1} \leq t_i \leq x_i$, aplicando (**??**), obtemos

$$\Big|F(x_i) - F(x_{i-1}) - F'(t_i)(x_i - x_{i-1})\Big| \leq \varepsilon(x_i - x_{i-1}). \tag{2.3}$$

Por outro lado, usando que $F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1})]$ e a desiguladade triangular tem-se

$$\begin{aligned}\left|F(b) - F(a) - S(f, \dot{\mathcal{P}})\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1}))\right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n}|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})|\end{aligned}$$

Por (**??**),

$$\left|F(b) - F(a) - S(f, \dot{\mathcal{P}})\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\varepsilon(x_i - x_{i-1}). = \varepsilon(b - a)$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ com $\int_a^b f = F(b) - F(a)$. ■

O Teorema **??** pode ser escrito da seguinte forma:

Teorema 2.2 *Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é derivável em $[a, b]$ então $F' \in \mathcal{R}^*([a, b])$ e*

$$\int_a^b F' = F(b) - F(a).$$

No que segue, provaremos uma versão "melhor" do Teorema **??** para "c-primitivas" .

Teorema 2.3 (TFC I*) *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ possui uma c-primitiva F em $[a.b]$, então $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ e*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \tag{2.4}$$

Prova: Seja $E = \{c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots\}$ o conjunto enumerável da definição **??**. Como todo conjunto enumerável em medida zero e funções integráveis e iguais quase sempre tem a integrais iguais, podemos supor $f(c_k) = 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. Para definirmos um medidor em $I = [a, b]$ procedemos do seguinte modo: Se $t \in I - E$ tomamos $\delta_\varepsilon(t)$ como no Lema de Straddle. Se $t \in E$ tem-se $t = c_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$ e pela continuidade de F em c_k podemos escolher $\delta_\varepsilon(c_k) > 0$ tal que

$$\left|F(z) - F(c_k)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

para todo $z \in I$ que satisfaz $|z - c_k| \leq \delta_\varepsilon(c_k)$. Assim, definimos um medidor $\delta_\varepsilon(t)$ em I.

Seja $\dot{\mathcal{P}}= \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição rotulada δ_ε-refinada de I. Para $t \notin E$ o resultado segue de modo similar a prova do Teorema **??**. Para $t = c_k \in E$ é um rótulo de do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tem-se

$$\begin{aligned}
&\Big|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1})\Big| \\
&\leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| - |f(c_k)(x_i - x_{i-1})| \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + \frac{\varepsilon}{2^{k+2}} + 0 \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como cada ponto de E pode ser rótulo de no máximo dois subintervalos de $\dot{\mathcal{P}}$ temos que a soma dos termos com $t_i \in E$ satisfaz

$$\sum_{t_i \in E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$$

Além disso, pelo Lema de Straddle, a soma dos termos com $t_i \notin E$ satisfaz

$$\sum_{t_i \notin E} |F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{t_i \notin E} \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = \varepsilon(b - a)$$

Consequentemente, para uma partição δ_ε-refinada $\dot{\mathcal{P}}$ tem-se

$$\Big|F(b) - F(a) - S(f, \dot{\mathcal{P}})\Big| \leq \varepsilon(1 + b - a).$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário temos que $f \in \mathcal{R}^*(I)$ com integral $F(b) - F(a)$. ∎

O Teorema **??** podem ser escrito da seguinte forma:

Teorema 2.4 *Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma c-primitiva de f em $[a, b]$ então $f \in \mathcal{R}^*([a, b])$ e F é uma integral indefinida de f.*

Podemos perguntar se o Teorema **??** vale para a-primitivas de f:

Pergunta 2.1 *Se F é uma a-primitiva de f então f é Riemann Generalizada integrável e vale (**??**)?*

A resposta é *não*. Para mostrarmos isso, vamos construir uma função especial, conhecida como *função de Cantor-Lebesgue*.

Função de Cantor Lebesgue

Considere a função $\Lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como segue: Λ_1 é uma função linear por partes tal que $\Lambda_1(0) = 0$, $\Lambda_1(1) = 1$ e $\Lambda_1(x) = 1/2$ para $x \in [1/3, 3/2]$. Λ_2 é uma função linear por partes tal que $\Lambda_2(0) = 0$, $\Lambda_2(1) = 1$, $\Lambda_2(x) = 1/4$ para $x \in [1/9, 2/9]$, $\Lambda_2(x) = 1/2$ para $x \in [1/3, 2/3]$ e $\Lambda_2(x) = 3/4$ para $x \in [7/9, 8/9]$. Portanto, Λ_n é uma função linear por partes tal que $\Lambda_n(0) = 0$, $\Lambda_n(1) = 1$ e $\Lambda_n(x)$ assume valores $1/2^n$, $2/2^n$, ..., $(2^n - 1)/2^n$ nos intervalos $\mathcal{C}_n$ removidos na construção do conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ (veja, por exemplo [**?**, p. 316]).

Por definição, cada $\Lambda_n(x)$ é uma função contínua e não decrescente, afirmamos que a sequência (Λ_n) converge para uma função limite $\Lambda(x)$, chamada **função Cantor-Lebesgue**. De fato,

Proposição 2.1 *A sequência* (Λ_n) *converge uniformente para uma função* $\Lambda : [0,1] \to \mathbb{R}$ *contínua e não decrescente em* $[0,1]$. *Além disso,* $\Lambda'(x) = 0$, $\forall x \in [0,1] - \mathcal{C}$.

Prova: Como os gráficos de $\Lambda_n(x)$ e $\Lambda_{n+1}(x)$ coincidem ou estão numa faixa horizontal de espessura $1/2^n$ temos que $|\Lambda_n(x) - \Lambda_{n+1}(x)| \leq 1/2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x \in [0,1]$. Portanto,

$$m > n \Rightarrow |\Lambda_n(x) - \Lambda_m(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |\Lambda_k(x) - \Lambda_{k+1}(x)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k} \leq \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Logo, para cada $x \in [0,1]$, $(\Lambda_n(x))$ é uma sequência de Cauchy, isso implica que existe o limite $\Lambda(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \Lambda_n(x)$. Além disso,

$$|\Lambda_n(x) - \Lambda(x)| \leq \frac{1}{2^{n-1}}, \quad \forall x \in [0,1].$$

Assim, a sequência de funções contíunua (Λ_n) converge uniformemente para Λ, o que implica a continuidade de Λ em $[0,1]$. Além disso, como cada função $\Lambda_n(x)$ é não decrescente temos que $\Lambda(x)$ é não decrescente em $[0,1]$. Por outro lado, se $x \in [0,1] - \mathcal{C}$ entãp existe um intervalo aberto contendo x no qual todas as funções

Λ_n são constantes para n suficientemente grande, e logo, Λ é constante neste intervalo aberto e $\Lambda'(x) = 0$ para $x \in [0,1] - \mathcal{C}$. ■

Agora, podemos justificar a resposta dada a pergunta **??**.

Exemplo 2.2 *Pela Proposição* **??** *temos que a função de Cantor-Lebesgue* Λ *é contínua em* $[0,1]$ *e* $\Lambda'(x) = 0$ *para* $x \in [0,1] - \mathcal{C}$. *Como o conjunto de Cantor* $\mathcal{C}$ *tem medida nula temos que* Λ *é uma a- primitiva da função nula de* $[0,1]$. *Mas,* $\int_0^1 \Lambda' = 0 \neq 1 = \Lambda(1) - \Lambda(0)$. *Logo, o Teorema* **??** *não vale para a- primitivas.* ■

2.2.2 Derivando integrais

Teorema 2.5 (TFC II) *Se* $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ *e* $\lim_{x \to c^+} f(x) = A$ *com* $c \in [a,b)$. *Então a derivada à direita* $F'_+(c) = \lim_{h \to 0^+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = A$ *com* $F(x) = \int_a^x f$.

Prova: Como $\lim_{x \to c^+} f(x) = A$ então $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$c < x < c + \delta \Rightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon. \tag{2.5}$$

Seja $0 < h < \delta$. Como f é integrável, segue do Corolário **??** que f é integrável em $[a,c]$, $[a, c+h]$ e $[c, c+h]$ e pelo Teorema **??** tem-se

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f. \tag{2.6}$$

Por (**??**),

$$c < x < c + h < \delta \Rightarrow A - \varepsilon \leq f(x) \leq A + \varepsilon. \tag{2.7}$$

Usando (**??**) e as propriedades da integral obtemos

$$\int_c^{c+h} (A - \varepsilon)\, dx \leq \int_c^{c+h} f(x)\, dx \leq \int_c^{c+h} (A + \varepsilon)\, dx,$$

o que implica

$$(A - \varepsilon)h \leq \int_c^{c+h} f(x)\, dx \leq (A + \varepsilon)h. \tag{2.8}$$

Combinando (**??**) e (**??**) obtemos

$$0 < h < \delta \Rightarrow \left| \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - A \right| \leq \varepsilon.$$

Logo, $F'_+(c) = A$. ∎

De modo análogo, podemos provar o Teorema **??** para o limite à esquerda.

Desse teorema, seguem os seguintes corolários que são de grande importância para o estudo dessa integral.

Corolário 2.1 *Seja* $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ *contínua em* $c \in [a,b]$. *Então*

$$F'(c) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f\right) = f(c).$$

Prova: Seja $c \in (a,b)$. Como f é contínua em c temos que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$. Logo, pelo Teorema **??** existem $F'_+(c)$ e $F'_-(c)$ e $F'_+(c) = F'_-(c) = f(c)$. O processo é análogo para os extremos do intervalo. ∎

Observe que, pelo Corolário **??**, se f é contínua então toda integral indefinida de f é uma primitiva de f.

Continuidade da integral indefinida

Nesta seção, daremos uma importante aplicação do Lema de Saks-Henstock, provaremos a continuidade da integral indefinida de funções integráveis.

Teorema 2.6 *Se* $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ *então a integral indefinida* $F(x) = \int_a^x f$ *é contínua em* $[a,b]$.

Prova: Seja $c \in [a,b)$. Mostraremos que F é contínua à direita de "c". De modo análogo, podemos mostrar F é contínua à esquerda de "c". Seja $\epsilon > 0$ e o medidor $\delta_\epsilon(t)$ de I dado no Lema de Saks-Henstock. Tomemos o medidor

$$\delta'_\epsilon(t) = \begin{cases} \min\left\{\delta_\epsilon(t), \dfrac{|t-c|}{2}\right\} & \text{se} \quad t \in I,\ t \neq c, \\ \min\left\{\delta_\epsilon(c), \dfrac{\epsilon}{|f(c)|+1}\right\} & \text{se} \quad t = c. \end{cases}$$

Sejam $0 < h < \delta'_\epsilon(c)$ e $\dot{\mathcal{P}}_0$ uma partição rotulada δ'_ϵ-refinada formada apenas pelo par $([c, c+h], c)$. Aplicando o Lema de Saks-Henstock à $\dot{\mathcal{P}}_0$ obtemos

$$\left| f(c)h - \int_c^{c+h} f \right| \leq \epsilon.$$

Usando que $h \leq \dfrac{\epsilon}{|f(c)|+1}$ concluímos que

$$\Big|F(c+h) - F(c)\Big| = \left|\int_c^{c+h} f\right| \leq |f(c)|h + \epsilon < 2\epsilon.$$

Logo, F é contínua em "c". ■

Cobertura de Vitali

Para provarmos uma versão mais geral do TFC **??** precisaremos da seguinte versão do Teorema de Vitali:

Definição 2.2 *Sejam $E \subseteq [a,b]$ e $\mathcal{F}$ uma coleção de intervalos fechados não degenerados de $[a-1, b+1]$. Dizemos que $\mathcal{F}$ é uma* **Cobertura de Vitali** *para E se $\forall x \in E$ e $\forall s > 0$ existe um intervalo $J \in \mathcal{F}$ tal que $x \in J$ e $0 < \ell(J) < s$.*

Observe que, se $\mathcal{F}$ é uma cobertura de Vitali de E então todo ponto $x \in E$ pertencem a vários intervalos de $\mathcal{F}$.

Exemplo 2.3 *Uma Cobertura de Vitali enumerável de $E = [0,1]$ é a coleção de bolas fechadas $\overline{B}_r(1/n)$, $n \in \mathbb{N}$, de centro $1/n$ e raio $r \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$.*

Teorema 2.7 (Teorema da Cobertura de Vitali) *Sejam $E \subseteq [a,b]$ e $\mathcal{F}$ uma Cobertura de Vitali para E. Dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos disjuntos $I_1, I_2, \cdots I_p$ de $\mathcal{F}$ e um coleção enumerável de intervalos fechados $\{J_i : i = p+1, \cdots\}$ em $\mathbb{R}$ com*

$$E - \bigcup_{i=1}^{n} I_i \subseteq \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i \text{ e } \sum_{i=p+1}^{\infty} \ell(J_i) \leq \varepsilon.$$

Logo,

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i.$$

A demonstração pode ser encontrada em [**?**].

O seguinte resultado é uma versão mais geral do Teorema **??**:

Teorema 2.8 *Se $f \in \mathcal{R}^*([a,b])$ e F uma integral indefinida de f. Então, existe um conjunto de medida nula $Z \subset [a,b]$ tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in [a,b] - Z, \tag{2.9}$$

ou seja, F é uma a-primitiva de f.

Prova: Seja E o conjunto de pontos de $[a,b)$ tais que não existe $F'_+(x)$ ou $F'_+(x)$ é diferente de $f(x)$. De modo similiar, podemos considerar $F'_-(x)$ para $x \in (a,b]$.

Queremos mostrar que existe um conjunto de medida nula Z tal que $F'_+(x)$ é diferente de f. Como Z é a união de conjuntos do tipo E, basta provarmos que E tem medida nula.

Para negarmos a afirmação $F'_+(x) = f(x)$ para $x \in [a,b]$, lembremos que $F'_+(x) = f(x)$ para $x \in [a,b]$ implica que $\forall \alpha > 0$ existe $s > 0$ tal que

$$\forall v \in [a,b],\ x < v < x+s \Rightarrow \left| \frac{F(v) - F(x)}{v - x} - f(x) \right| \leq \alpha.$$

Assim, a negativa da afirmação acima significa que se $x \in E$ então existe $\alpha(x) > 0$ tal que $\forall s > 0$ existe $v_{x,s} \in [a,b]$ tal que

$$x < v_{x,s} < x+s \Rightarrow \left| \frac{F(v_{x,s}) - F(x)}{v_{x,s} - x} - f(x) \right| > \alpha(x). \tag{2.10}$$

Logo,

$$x < v_{x,s} < x+s \Rightarrow \Big| (F(v_{x,s}) - F(x)) - f(x)(v_{x,s} - x) \Big| > \alpha(x)(v_{x,s} - x). \tag{2.11}$$

Para n fixo, considere $E_n = \left\{ x \in E\, ;\, \alpha(x) \geq \dfrac{1}{n} \right\}$. Além disso, como f é integrável, para todo $\varepsilon > 0$ existe um medidor $\delta_\varepsilon(t)$ em I tal que

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| \leq \frac{\varepsilon}{n}. \tag{2.12}$$

para toda partição rotulada δ_ε-refinada $\dot{\mathcal{P}}$ de I.

Agora, considere $\mathcal{F}_n = \Big\{ [x, v_{x,s}]\, ;\, x \in E_n,\ 0 < s < \delta_\varepsilon(x) \Big\}$. Então $\mathcal{F}_n$ é uma Cobertura de Vitali para E_ne pelo Teorema de Vitali **??**, existem intervalos $I_i =$

$[x_i, v_i]$, $1 \leq i \leq p$, e uma sequência $(J_i)_{i=p+1}^{\infty}$ de intervalos fechados tais que

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i \quad e \quad \sum_{i=p+1}^{\infty} \ell(J_i) \leq \varepsilon. \tag{2.13}$$

Consideremos a seguinte soma:

$$\sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)(v_i - x_i) - \int_{x_i}^{v_i} f \right| = \sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)(v_i - x_i) - (F(v_i) - F(x_i)) \right|.$$

Por (**??**) com $\alpha(x_i) \geq \dfrac{1}{n}$ obtemos

$$\sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)(v_i - x_i) - \int_{x_i}^{v_i} f \right| > \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{p} (v_i - x_i). \tag{2.14}$$

Por outro lado, como $x_i \leq v_i \leq x_i + \delta_\varepsilon(x_i)$ para $i = 1, \cdots, p$, os pares ordenados $\{(I_i, x_i)\}_{i=1}^{p}$ formam uma subpartição δ_ε-refinada de I para a qual vale (**??**). Portanto, pelo Corolário **??** do Lema de Saks-Henstock, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)(v_i - x_i) - \int_{x_i}^{v_i} f \right| \leq \frac{2\epsilon}{n}. \tag{2.15}$$

Combinarmos (**??**) e (**??**) tem-se

$$\sum_{i=1}^{p} (v_i - x_i) \leq n \sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)(v_i - x_i) - \int_{x_i}^{v_i} \right| \leq 2\varepsilon$$

Mas, por (**??**), concluimos que E_n está contido em uma união enumerável de intervalos com comprimento total $\leq 3\varepsilon$. Logo, E_n é um conjunto de medida nula, o que implica $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ ser um conjunto de medida nula. ■

Podemos escrever os resultados dos Teorema **??** e **??** do seguinte modo:

Teorema 2.9 *Seja $I = [a, b]$. Se $f \in \mathcal{R}^*(I)$ então qualquer integral indefinida F de f é uma função contínua e uma a-primitiva de f em I. Assim, existe um conjunto de medida nula $Z \subset I$ tal que*

$$F'(x) = f(x), \quad \forall x \in I - Z.$$

Podemos perguntar se o Teorema **??** vale para c-primitivas:

Pergunta 2.2 *Se F é uma integral indefinida de f então F é uma c-primitiva de f?*

A resposta é *não*, como mostra o seguinte exemplo:

Exemplo 2.4 *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de Cantor. Considere*

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathcal{C}, \\ 0 & se \quad x \in [0,1] - \mathcal{C}. \end{cases}$$

Como $\mathcal{C}$ tem medida nula temos que $\varphi(x) = 0$ q.s e, logo, $\varphi \in \mathcal{R}^*([0,x])$ e

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi = 0, \qquad \forall x \in [0,1].$$

Consequentemente, $\Phi'(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$. Mas, $\varphi(x) = 1$ para $x \in \mathcal{C}$ e, logo, $\Phi'(x) \neq \varphi(x)$ em $[0,1] - \mathcal{C}$ com $[0,1] - \mathcal{C}$ um conjunto de medida nula não enumerável.

O Exemplo **??** mostra que funções Riemann Generalizadas integráveis que têm a-primitivas nem sempre têm c-primitivas. Podemos caracterizar as integrais indefinida de função de $\mathcal{R}^*(I)$: uma função F é a integral indefinida de uma função de $\mathcal{R}^*(I)$, se e somente se, F é derivável quase sempre e no conjunto de medida nula Z onde F não é derivável, a função F satisfaz uma condição adicional que é automaticamente satisfeita se Z é um conjunto enumerável. Esta caracterização pode ser encontrada em [**?**, seção 5].

Em resumo,

(a) Uma função Riemann Generalizada integrável sempre tem uma primitiva e toda toda primitiva de uma função de $\mathcal{R}^*(I)$ é uma a-primitiva;

(b) Uma função de $\mathcal{R}^*(I)$ nem sempre tem uma c-primitiva. Porém, toda função contínua tem uma primitiva;

(c) Se F é uma c-primitiva de $f \in \mathcal{R}^*(I)$ então F é uma integral indefinida de f;

(d) Se F é uma a-primitiva de $f \in \mathcal{R}^*(I)$ então F não é necessariamente uma integral indefinida de f.

2.3 Regras de integração

Como consequência do TFC provaremos as fórmulas de integração por partes e substituição.

Teorema 2.10 (Integração por Partes) *Sejam F, G diferenciáveis em $I = [a, b]$. Então $F'G$ é integrável se, e somente se $FG' \in \mathcal{R}^*(I)$. E nesse caso, temos:*

$$\int_a^b F'G = FG\Big|_a^b - \int_a^b FG'. \tag{2.16}$$

Prova: Como F e G são deriváveis temos que $(FG)'$ existe em I e

$$(FG)' = F'G + FG'. \tag{2.17}$$

Pelo Teorema (**??**) temos que $(FG)' \in \mathcal{R}^*(I)$ e de (**??**) segue (**??**). ■

Teorema 2.11 (Integração por Substituição) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ funções diferenciáveis. Então:*

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f' = \int_a^b (f' \circ \varphi)\varphi'. \tag{2.18}$$

Prova: Pela regra da cadeia $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi)\varphi'$ e pelo teorema **??** obtemos

$$\int_a^b (f' \circ \varphi)\varphi' = \int_a^b (f \circ \varphi)' = f(\varphi(b)) - f(\varphi(a)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f'.$$

■

2.4 Funções absolutamente integráveis

Nesta seção introduziremos uma classe $\mathcal{L}$ das funções "absolutamente integráveis" , isto é, a classe das funções $f \in \mathcal{R}^*(I)$ tais que $|f| \in \mathcal{R}^*(I)$. Veremos, no Capítulo **??**, que esta classe é precisamente a classe das funções Lebesgue integráveis.

Sabemos que se uma função f é Riemann integrável no compacto $I = [a, b]$ então a função $|f|$ dada por $|f|(x) = |f(x)|$, $x \in I$ é também Riemann integrável e

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

O mesmo resultado vale para a integral de Lebesgue, mas esta conclusão "não é verdadeira" para funções Riemann generalizada integráveis.

Definição 2.3 *Uma função integrável $f : I \to \mathbb{R}$ é* **absolutamente integrável** *se $|f|$ também é integrável. A classe das funções absolutamente integráveis será representada por $\mathcal{L}$. Uma função que é integrável, mas não é absolutamente integrável é chamada* **condicionalmente integrável**.

O seguinte exemplo ilustra o fato de existirem funções Riemann Generalizada integráveis condicionalmente integráveis:

Exemplo 2.5 *Considere*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & se \quad x \in (0,1], \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Então f é derivável em $[0,1]$ com derivada

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cos\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) + \dfrac{2\pi}{x} sen\left(\dfrac{\pi}{x^2}\right) & se \quad x \in (0,1], \\ 0 & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Pelo TFC f' é integrável em $[0,1]$ e $\displaystyle\int_0^1 f' = f(1) - f(0) = -1$. Mas $|f'| \notin \mathcal{R}^*(I)$. De fato, sejam $a_k = \sqrt{\dfrac{2}{4k+1}}$ e $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{2k}}$. Então, os intervalos $[a_k, b_k]$ são disjuntos dois a dois e $|f'|$ é contínua em cada $[a_k, b_k]$. Logo, $|f'|$ é integrável em cada $[a_k, b_k]$. Assim, pelo TFC e a propriedade de módulo da integral tem-se

$$\int_{a_k}^{b_k} |f'| \geq \left| \int_{a_k}^{b_k} f' \right| = \frac{1}{2k}.$$

Supondo que $|f'|$ é integrável em $[0,1]$ e aplicando a propriedades de aditividade finita da integral obtemos

$$\int_0^1 |f'| \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f'| \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k}, \ \forall n,$$

o que é uma contradição, pois a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k}$ é divergente. ∎

Definiremos, no Capítulo **??**, uma integral do tipo Riemann generalizada, mas que é absolutamente integrável fazendo uma simples modificação na definição da integral de Riemann generalizada. Esta integral é conhecida como *integral de McShane*. Mostraremos que esta integral é equivalente a integral de Lebesgue.

Capítulo 3

Teoremas de Convergência

3.1 Integral de Riemann

Uma das maiores desvantagens da integral de Riemann é que, em geral, um sequências de funções Riemann integráveis não converge para uma função Riemann integrável e mesmo quando converge para uma função Riemann integrável a sequência de integrais pode não convergir para a integral deste limite. Os seguintes exemplos ilustram esta afirmação.

Exemplo 3.1 *Seja* $\{r_1, r_2, \ldots, \}$ *uma enumeração do racionais de* $[0,1]$. *Considere*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x = r_1, \ldots, r_k, \\ 0 & se \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Então, para todo $x \in [0,1]$, *a sequência* (f_k) *converge para a função de Dirichlet (descontínua)*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & se \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Embora todas as funções $f_k(x)$ do Exemplo **??** sejam Riemann integráveis com integral igual a zero, a função limite $f(x)$ não é Riemann integrável. Note que, $f(x)$ é Riemann generalizada integrável com integral igual a zero.

Exemplo 3.2 *Seja* $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, $k > 2$ *definda por*

$$f_k(x) = \begin{cases} k^2\, x & se \quad 0 \le x \le 1/k, \\ -k^2 \left(x - \dfrac{2}{k} \right) & se \quad 1/k \le x \le 2/k, \\ 0 & se \quad 2/k \le x \le 1. \end{cases}$$

Para todo $x \in [0,1]$, *a sequência* (f_k) *converge para a função nula* $f(x) = 0$. *De fato,* $f_k(0) = 0$, $\forall k$. *Além disso, se* $x > 0$ *então existe* k_x *tal que para* $k_x > 2/x$ *implica* $f_k(x) = 0$, $\forall k \ge k_x$. *Logo,* $\lim f_k(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

Como todas as funções f_k do Exmeplo **??** são contínuas então são Riemann integráveis e a sequência (f_k) converge para uma função Riemann integrável. Mas, $\displaystyle\int_0^1 f_k(x) = 1$, $\forall k$ e $\displaystyle\int_0^1 f(x) = 0$ e portanto

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 f_k(x) \neq \int_0^1 f(x).$$

Na próxima seção mostraremos que integral de Riemann generalizada não apresenta os problemas de convergência da integral de Riemann.

3.2 Convergência Monótona

O seguinte resultado é uma generalização do importante teorema provado em 1906, para a integral de Lebesgue, pelo matemático italiano Beppo Levi. Este resultado aplica-se a funções Riemann generalizadas integráveis; supõe convergência pontual da sequência de funções e assume que a sequência é monótona. A prova deste teorema não é trivial e usa o Lema Saks-Henstock.

Teorema 3.1 *Sejam* $I = [a,b]$, $f_k \in \mathcal{R}^*(I)$, (f_k) *uma sequência monótona e* $f(x) = \lim f_k(x)$, $\forall x \in I$. $f \in \mathcal{R}^*(I)$ *se e somente se a sequência* $\left(\displaystyle\int_I f_k \right)$ *é limitada. Nesse caso*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k. \tag{3.1}$$

Prova: Considere a sequência (f_k) crescente, isto é, $f_k(x) \leq f_{k+1}(x)$, $\forall x \in I$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

($\Rightarrow$) Se $f \in \mathcal{R}^*(I)$ então $f_1(x) \leq f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x)$, $\forall x \in I$. Como f_k é integrável para todo k tem-se

$$\int_I f_1(x) \leq \int_I f_k(x) \leq \int_I f_{k+1}(x) \leq \int_I f(x).$$

Portanto, a sequência $\left(\int_I f_k\right)$ é crescente e limitada (logo, convergente).

($\Leftarrow$) Seja $A = \sup\left\{\int_I f_k : k \in \mathbb{N}\right\}$. Logo, a sequência crescente e limitada $\left(\int_I f_k\right)$ converge para A. Sejam $\varepsilon > 0$ e $r \in \mathbb{N}$ tais que $\frac{1}{2^{r-2}} < \varepsilon$ e

$$0 \leq A - \int_I f_r < \varepsilon. \tag{3.2}$$

Como $f_k \in \mathcal{R}^*(I)$, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe um medidor δ_k em I tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição δ_k-refinada em I, então

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}} - \int_I f_k| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Além disso, como $f(x) = \lim f_k(x)$ temos que, para cada $x \in I$, existe um natural $k_x \geq r$ tal que

$$0 \leq f(x) - f_{k_x}(x) < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Escolhendo $\delta_\varepsilon(t) = \delta_{k_t}(t)$ para todo $t \in I$ temos que δ_ε é um medidor de I. Assim, se $\dot{\mathcal{P}}= \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ é uma partição δ_ε - refinada, pela desigualdade triangular obtemos

$$\begin{aligned} |S(f; \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq & \left|\sum_{i=1}^n f(t_i)\ell(I_i) - \sum_{i=1}^n f_{k_{t_i}}(t_i)\ell(I_i)\right| \\ & + \left|\sum_{i=1}^n f_{k_{t_i}}(t_i)\ell(I_i) - \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f_{k_{t_i}}\right| \\ & + \left|\sum_{i=1}^n \int_{I_i} f_{k_{t_i}} - A\right| \end{aligned} \tag{3.4}$$

Por (**??**), o primeiro termo da direita de (**??**) é majorado por

$$\sum_{i=1}^n |f(t_i) - f_{k_{t_i}}(t_i)|\ell(I_i) \leq \sum_{i=1}^n \varepsilon\ell(I_i) = (b-a)\varepsilon \tag{3.5}$$

Por outro lado, o segundo termo de (**??**) é majorado por

$$\sum_{i=1}^{n}\left|f_{k_{t_i}}(t_i)\ell(I_i)-\int_{I_i} f_{k_{t_i}}\right|. \tag{3.6}$$

Para estimar a soma (**??**), considere $s=\max\{k_{t_1},...,k_{t_n}\}\geq r$ e note que (**??**) pode ser escrita como uma soma iterada do seguinte modo: primeiro sobre todos os valores de i tais que $k_{t_i}=p$ para algum número natural $p\geq r$ e depois para $p=r,\ldots,s$. Considere todos os rótulos t_i com $k_{t_i}=p$ para p fixo. Cada subintervalo correspondente I_i está contido na bola fechada com centro t_i e raio $\delta_\varepsilon(t_i)=\delta_{k_{t_i}}(t_i)=\delta_p(t_i)$. Portanto, a coleção de pares ordenados $\{(I_i,t_i):k_{t_i}=p\}$ forma uma subpartição δ_p-refinada. Consequentemente, o Corolário **??** do Lema de Saks-Henstock implica que

$$\sum_{k_{t_i}=p}\left|f_{k_{t_i}}(t_i)\ell(I_i)-\int_{I_i} f_{k_{t_i}}\right|\leq\frac{1}{2^{p-1}} \tag{3.7}$$

Se somarmos (**??**) para $p=r,\ldots,s$ verificaremos que o termo (**??**) é majorado por

$$\sum_{p=r}^{s}\frac{1}{2^{p-1}}\leq\sum_{p=r}^{\infty}\frac{1}{2^{p-1}}=\frac{1}{2^{r-2}}<\varepsilon \tag{3.8}$$

Agora, vamos estimar o terceiro termo de (**??**). Como a sequência (f_k) é crescente e $r\leq k_{t_i}\leq s$ tem-se $f_r\leq f_{k_{t_i}}\leq f_s$. E pelo teorema (**??**)(iii) obtemos

$$\int_{I_i} f_r\leq\int_{I_i} f_{k_{t_i}}\leq\int_{I_i} f_s.$$

Somando essas inequações para $i=1,...,n$ e usando o corolário (**??**) obtemos

$$\int_{I_i} f_r\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{I_i} f_{k(t_i)}\leq\int_{I_i} f_s.$$

E segue de (**??**) que

$$A-\varepsilon\leq\sum_{i=1}^{n}\int_{I_i} f_{k(t_i)}\leq A.$$

Logo,

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\int_{I_i} f_{k(t_i)}-A\right|\leq\varepsilon.$$

Combinando todos estes resultados concluímos que

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}})-A|\leq(b-a)\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=(b-a+2)\varepsilon.$$

Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, temos que f é integrável em I e $A=\lim\int_I f_k$. ∎

3.2.1 Lema de Fatou

O seguinte resultado é usado quando a sequência de funções (f_k) não é monótona. Foi provado em 1906 por Pierre Fatou para a integral de Lebesgue. Para a demostração deste resultado precisaremos do seguinte lema auxiliar:

Lema 3.1 *Sejam* $\psi, f_k \in \mathcal{R}^*(I)$ *tais que*

$$\psi(x) \leq f_k(x) \quad para \quad x \in I,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Então, $\inf f_k \in \mathcal{R}^*(I)$.

Prova: Por (**??**) temos que $\inf\{f_k\}$ existe e $\inf\{f_k\} \geq \psi$. Seja $\phi_k = f_1 \wedge \ldots \wedge f_k$ com $f \wedge g = \min\{f, g\}$. Podemos mostrar que $\phi_k \in \mathcal{R}^*(I)$ (veja [**?**, p.121]). Além disso, a sequência (ϕ_k) é decrescente em I e limitada inferiormente por $\inf\{f_k\}$. Além disso, como $\int_I \phi_k \geq \int_I \psi$, pelo Teorema da convergência monótona temos que $\lim \phi_k \in \mathcal{R}^*(I)$. Mas, $\lim \phi_k = \inf\{f_k\}$. ∎

Lema 3.2 (Lema de Fatou) *Sejam* $\psi, f_k \in \mathcal{R}^*(I)$ *tais que*

$$\psi(x) \leq f_k(x) \quad para \quad x \in I,\ k \in \mathbb{N}.$$

Se

$$\liminf_{k\to\infty} \int_I f_k < \infty. \tag{3.10}$$

Então $\liminf_{k\to\infty} \int_I f_k$ *pertence a* $\mathcal{R}^*(I)$ *e*

$$-\infty < \int_I \lim_{k\to\infty} \inf f_k \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_I f_k < \infty. \tag{3.11}$$

Prova: Se $\varphi_k = \inf\{f_m : m \geq k, m \in \mathbb{N}\}$ para $k \in \mathbb{N}$, então o Lema **??** temos que $\varphi_k \in \mathcal{R}^*(I)$. Além disso, por $\psi(x) \leq \varphi_k(x) \leq f_k(x)$, para $x \in I, k \in \mathbb{N}$ obtemos

$$\int_I \psi \leq \int_I \varphi_k \leq \int_I f_k(x).$$

Pelas propriedades de limite inferior tem-se

$$\int_I \alpha < \liminf_{k\to\infty} \int_I \varphi_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_I f_k \tag{3.12}$$

Note que, (φ_k) é uma sequência crescente que converge em I para $\varphi = \liminf f_k$. Portanto, (**??**) implica que a sequência crescente $\left(\int_I \varphi_k\right)$ é convergente, logo, limitada. Então, aplicando o Teorema da Convergência Monótona obtemos $\varphi = \lim \varphi_k = \liminf f_k$ pertence a $\mathcal{R}^*(I)$ e que $\int_I \varphi = \lim \int_I \varphi_k \in \mathbb{R}$. Agora, sando (**??**) obtemos (**??**). ■

3.3 Convergência Dominada

O seguinte resultado é uma generalização para a integral de Riemann generalizada do teorema provado em 1908 por Lebesgue.

Teorema 3.2 *Seja*(f_k) *uma sequência em* $\mathcal{R}^*((I)$ *com* $f(x) = \lim f_k(x)$ *para todo* $x \in I = [a, b]$. *Suponha que existem funções* $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*(I)$ *tais que*

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \leq \omega(x) \quad \textit{para} \quad x \in I,\ k \in \mathbb{N}. \tag{3.13}$$

Então $f \in \mathcal{R}^*(I)$ *e*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k. \tag{3.14}$$

Prova Por hipótese temos que $f(x) = \lim f_k(x) = lim\ inf f_k(x) \in \mathcal{R}$ para todo $x \in I$. Além disso, por (**??**) e as propriedades da integral tem-se

$$\int_I \alpha \leq \int_I f_k \leq \int_I \omega \quad \text{para} \quad k \in \mathbb{N}.$$

Logo, $\liminf \int_I f_k$ e $\limsup \int_I f_k$ pertencem a $\mathbb{R}$. E pelo Lema de Fatou temos que $f \in \mathbb{R}^*(I)$ e

$$\int_I f \leq \lim_{k\to\infty} \inf \int_I f_k. \tag{3.15}$$

Agora, aplicando o Lema de Fatou na sequência $(-f_k)$ e lembrando que $\liminf(-\beta) = -\limsup(\beta)$ obtemos

$$-\int_I f = \int_I (-f) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_I (-f_k) = -\limsup_{k\to\infty} \int_I f_k. \tag{3.16}$$

Portanto,

$$\limsup_{k\to\infty} \int_I f_k \leq \int_I f \tag{3.17}$$

Combinando (**??**) e (**??**) tem-se (**??**). ■

Capítulo 4

Integral de McShane

Nesse capítulo, descreveremos uma variante da integral de Riemann generalizada, chamada de integral de McShane, em homeneagem a E.J. McShane. A ideia principal da integral de McShane é propor que os rótulos t_i não pertençam necessariamente aos intervalos I_i, mas considera $I_i \subset (t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i))$.

4.1 Definição e propriedades

4.1.1 Partições com rótulos livres

Sejam f uma função real, definida no intervalo compacto $I \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{P}$ uma partição de I. Dizemos que $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ é uma **partição rotulada livre** se $\{I_i\}_{i=1}^n$ formam uma partição de I e $t_i \in I$, ou seja, o rótulo não pertence necessariamente ao subintervalo I_i.

Definimos a soma de Riemann como antes e se $\delta(t)$ é um medidor em I, dizemos que uma partição rotulada livre $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ é δ-refinada se $I_i \subset [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)]$, $1 \leq i \leq n$.

Definição 4.1 *Uma função $f : I \to \mathbb{R}$ é McShane integrável se existe $\mathcal{S} \in \mathbb{R}$ tal que*

$\forall \varepsilon > 0$ existe um medidor $\delta(t)$ satisfazendo

$$|S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \mathcal{S}| < \varepsilon$$

para toda partição rotulada livre δ-refinada $\dot{\mathcal{P}}$ de I.

Representaremos integral de McShane de f por $\mathcal{MS}\int_I f$ e o conjunto das funções McShane integráveis por $\mathcal{MS}(I)$.

Observe que, pelo Teorema de Cousin **??** a definição da integral de McShane faz sentido (pois qualquer medidor tem uma partição rotulada (livre) δ-refinada) e além disso, quando existe o número $\mathcal{S}$ ele é único.

Como existem mais particões com rótulos livres do que partições rotuladas temos que toda função McShane integrável é Riemann Generalizada integrável e as integrais coincidem. Mas, existem funções que são Riemann generalizada integráveis que não são McShane integráveis, como a função dada no Exemplo **??**. De fato, neste exemplo, f' é Riemann Generalizada integrável, mas não é McShane integrável, pois $|f'|$ não é integrável. Logo, o uso de "rótulos livres" não produz uma teoria de integração mais geral. Em particular, veremos que o uso de rótulos livres implicará que as funções McShane intergráveis são absolutamente integráveis.

Uma importante observação que deverm ser feita sobre o uso de partições rotuladas livres é que embora o rótulo não pentença necessariamente ao seu subintervalo associado na partição, deve-se considerar um medidor $\delta(t)$ tal que o rótulo fique "próximo" do seu subintervalo associado.

4.1.2 Propriedades

Como a integral de McShane é um caso particular da integral de Riemann Generalizada, todas as propriedades apresentadas no Capítulo **??** são válidas para esta integral. No que segue, mostraremos que a integral de McShane é absolutamente integrável. Para isto, precisamos do seguinte lema auxiliar:

Lema 4.1 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ é McShane integrável em I e $\varepsilon > 0$. Suponha que $\delta(t)$ é um medidor de I tal que para toda partição rotulada livre δ- refinada $\overset{\bullet}{\mathcal{D}}$ tem-se*

$$|S(f, \overset{\bullet}{\mathcal{D}}) - \int_I f| < \varepsilon.$$

Se $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}= \{(t_i, I_i); 1 \leq i \leq n\}$ e $\overset{\bullet}{\mathcal{Q}}= \{(s_j, J_j); 1 \leq i \leq m\}$ são partições rotulada livres δ-refinadas de I então

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |f(t_i) - f(s_j)|\ell(I_i \cap J_j) \leq 2\varepsilon.$$

Prova: Seja $\mathcal{F} = \{I_i \cap J_j = K_{ij}; 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, {I_i}^0 \cap {J_j}^0 = \emptyset\}$. Definimos as partições rotuladas livres δ-refinadas $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}$ e $\overset{\bullet}{\mathcal{Q}}$ com segue:

(i) se $f(t_i) \geq f(s_j)$ fazemos $t_{ij} = t_i$ e $s_{ij} = s_j$;

(ii) se $f(t_i) < f(s_j)$ fazemos $t_{ij} = s_j$ e $s_{ij} = t_i$.

Note que $f(t_{ij}) - f(s_{ij}) = |f(t_i) - f(s_j)|$. Agora, fazendo $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}_1= \{(t_{ij}, K_{ij}); K_{ij} \in \mathcal{F})\}$ e $\overset{\bullet}{\mathcal{Q}}_1= \{(s_{ij}, K_{ij}); K_{ij} \in \mathcal{F})\}$ obtemos partições rotuladas δ-refinadas e por hipótese

$$\begin{aligned} |S(f, \overset{\bullet}{\mathcal{P}}) - S(f, \overset{\bullet}{\mathcal{Q}})| &= \left| \sum_{K_{ij} \in \mathcal{F}} \{f(t_{ij}) - f(s_{ij})\}\ell(K_{ij}) \right| \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |f(t_i) - f(s_j)|\ell(I_i \cap J_j) \leq 2\varepsilon. \qquad \blacksquare \end{aligned}$$

Teorema 4.1 *Se $f : I \to \mathbb{R}$ é McShane integrável em I então $|f|$ é McShane integrável em I e*

$$\left| \mathcal{MS} \int_I f \right| \leq \mathcal{MS} \int_I |f|. \tag{4.1}$$

Prova: Dado $\varepsilon > 0$ existe um medidor $\delta_\varepsilon(t)$ de I tal que $\left| S(f, \overset{\bullet}{\mathcal{P}}) - \mathcal{MS} \int_I f \right| < \varepsilon$ sempre que $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}$ é uma partição rotulada livre δ_ε-refinada de I.

Sejam $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}= \{(t_i, I_i)\}_{i=1}^{n}$ e $\overset{\bullet}{\mathcal{Q}}= \{(s_j, J_j)\}_{j=1}^{m}$ partições rotuladas livres δ_ε-refinadas. Então, pelo Lema **??** tem-se

$$\begin{aligned} |S(|f|, \overset{\bullet}{\mathcal{P}}) - S(|f|, \overset{\bullet}{\mathcal{Q}})| &= \left| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \{|f(t_i)| - |f(s_j)|\} \ell(I_i \cap J_j) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |f(t_i) - f(s_j)| \ell(I_i \cap J_j) \leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

E pelo Critério de Cauchy, $|f|$ é MCShane integrável. Além disso, como $f \leq |f|$ e $-f \leq |f|$ e aplicando as propriedades da integral obtemos (**??**). ■.

4.2 Teorema fundamental do Cálculo

Agora, mostraremos o Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de McShane. Para isto, precisamos do seguinte lema cuja prova é análoga a do Teorema **??**:

Lema 4.2 *Sejam $\varepsilon > 0$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$. Existe um medidor $\delta_\varepsilon(t)$ de $[a, b]$ tal que*

$$|S(f', \overset{\bullet}{\mathcal{P}}) - (f(b) - f(a))| < \varepsilon$$

para toda partição rotulada livre δ_ε-refinada $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}$ de $[a, b]$.

Teorema 4.2 (TFC I) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $[a, b]$. Se f' é McShane integrável em $[a, b]$ então*

$$\mathcal{MS} \int_a^b f' = f(b) - f(a). \tag{4.2}$$

Prova: Seja $\varepsilon > 0$. Como f' é McShane integrável existe um medidor $\delta'(t)$ em $[a, b]$ tal que para toda partição ratulada livre δ'-refinada $\overset{\bullet}{\mathcal{P}}$ tem-se

$$\left| S(f', \overset{\bullet}{\mathcal{P}}) - \mathcal{MS} \int_a^b f' \right| < \varepsilon. \tag{4.3}$$

Seja δ'' um medidor dado no Lema **??**. Fazendo $\delta_\varepsilon = \min\{\delta', \delta''\}$ e considerando $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição rotulada δ_ε-refinada de $[a, b]$.

Então, combinando o resultado do Lema **??** e (**??**) obtemos

$$\left|\mathcal{MS}\int_a^b f' - (f(b) - f(a))\right| \leq \left|\mathcal{MS}\int_a^b f' - S(f', \dot{\mathcal{P}})\right| + \left|S(f', \dot{\mathcal{P}}) - (f(b) - f(a))\right| < 2\varepsilon$$

e o resultado segue. ∎

Comparando as versões do TFC para a integral de McShane e a integral de Riemann Generalizada vemos que, no caso do Teorema **??** é necessário assumirmos a integrabilidade da derivada. O exemplo **??** mostra que está hipótese não pode ser descartada.

Veremos que a segunda parte do TFC para a integral de McShane é análoga à da integral de Riemann Generalizada.

Teorema 4.3 (TFC II) *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função McShane integrável em $[a, b]$ e F uma integral indefinida de f. Se f é contínua em $t_0 \in [a, b]$ então F é diferenciável em t_0 e $F'(t_0) = f(t_0)$.*

Proca: A demonstração é análoga à do Corolário **??**. ∎

A conexão entre as integrais de MacShane e Riemann generalizada é dada no seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [**?**, p. 121]:

Teorema 4.4 *Sejam $I[a, b]$ um intervalo compacto e $f : I \to \mathbb{R}$. f é McShane integrável se, e somente se, f é Riemann generalizada e absolutamente integrável.*

Outros resultados importantes para a integral de McShane são:

Proposição 4.1 *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é McShane integrável e $F(x) = \mathcal{MS}\int_a^x f$, $a \leq x \leq b$. Então F é absolutamente contínua.*

Prova: A demonstração pode ser encontrada em [**?**, p. 110]. ∎

Proposição 4.2 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é crescente, então f é McShane integrável.*

Ideia da Prova: Para demonstrar essa proposição, basta dividir o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos de comprimentos iguais, definindo assim a partição: $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Com isso, determinar para cada $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, $S_k = f(x_k)$ e $s_k = f(x_{k-1})$, e assim, fazer $\varphi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} S_k \chi_{I_k}$ e $\psi(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} s_k \chi_{I_k}$ e usar o Teorema **??**. ■

Proposição 4.3 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ McShane integrável em $[a,b]$ e $h \in \mathbb{R}$. Definimos: $f_h : [a+h, b+h] \to \mathbb{R}$ por $f_h(t) = f(t-h)$, então f_h é McShane integrável com* $M\displaystyle\int_a^b = M\int_{a+h}^{b+h} = f_h$

Capítulo 5

Integral de Lebesgue

Neste capítulo faremos uma breve introdução da integral de Lebesgue na reta. Nosso objetivo é mostrar a equivalência entre as integrais de McShane e Lebesgue.

O processo de integração de Lebesgue foi fundamentalmente diferente do processo de Riemann. Sua ideia simples e brilhante foi particionar a "imagem" da função em vez do seu domínio.

Para f limitada em $[a,b]$ temos $\alpha < f < \beta$. Considere a partição $\mathcal{P}$ de $[\alpha,\beta]$ dada por $\alpha = y_0 < y_1 < \ldots < y_n = \beta$. Deste modo, o intervalo $[a,b]$ também é particionado em conjuntos disjuntos $E_j = \{x\,;\, y_{i-1} < f(x) < y_i\}$ tais que $[a,b] = \bigcup_{j=1}^{n} E_j$. Observe que, cada E_j é a imagem inversa dos intervalos da partição, isto é, $E_j = f^{-1}((y_{j-1}, y_j))$. Escolhendo $y_j^* \in [y_{j-1}, y_j]$, $1 \leq j \leq n$, podemos considerar o "soma de Lebesgue"

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^* \mu(E_j)$$

com $\mu(E_j)$ o "comprimento" de E_j.

Com esta abordagem, a teoria deve garantir a mensurabilidade dos conjuntos E_j para poder definir a integral de f.

5.1 Definição e propriedades

5.1.1 Conjuntos mensuráveis

Sejam $[a,b]$ um intervalo compacto, $A, F \subset [a,b]$ tais que A é aberto e F é fechado.

Como A é um aberto da reta existe uma cobertura enumerável de intervalos abertos disjuntos dois a dois $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ de $[a,b]$ tais que $A = \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$. Definimos o comprimento de A por $|A| = \sum_{k=1}^{\infty} \ell(J_k)$ com $\ell(J_k)$ o comprimento de cada intervalo J_k.

Como F é fechado, o seu complementar (F^c) é aberto, e, logo podemos definir o comprimento de F por $|F| = b - a - |F^c|$.

Definição 5.1 *Seja $E \subset [a,b]$. Definimos $\overline{\mu}(E)$, a* **medida exterior** *de E, por*

$$\overline{\mu}(E) = \inf_{E \subset A} |A|$$

com o ínfimo tomado sobre todos os conjuntos abertos A tais que $E \subset A$.

Definimos $\underline{\mu}(E)$, a **medida interior**, *de E por*

$$\underline{\mu}(E) = \sup_{F \subset E} |F|$$

com o supremo tomado sobre todos os conjuntos fechados F tais que $F \subset E$.

Definição 5.2 *Dizemos que o conjunto $E \subset [a,b]$ é (Lebesgue)* **mensurável** *se $\overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)$ e definimos a* **medida** *de E por*

$$\mu(E) = \overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E).$$

Observe que $\overline{\mu}(E)$ e $\underline{\mu}(E)$, respectivamente, estão definidas para *todos* os subconjuntos E de $[a,b]$. De fato, por exemplo, o conjunto $\{\mu(A)\,;\, E \subset A\}$ é limitado inferiormente por zero, e logo, tem ínfimo. Porém $\mu(E)$ está definida apenas para aqueles subconjuntos E tais que $\overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E)$. Existem subconjuntos que não são mensuráveis, isto é, existem E tais que $\overline{\mu}(E) \neq \underline{\mu}(E)$.

Enunciaremos algumas propriedades das medidas exterior e interior cujas provas podems ser encontradas em [**?**, p. 127]. Apresentaremos vários exemplos que ilustram a aplicação desta propriedades.

Teorema 5.1 *Seja* $E \subset [a, b]$*.*

(i) $\underline{\mu}(E) \le \overline{\mu}(E)$*;*

(ii) $\underline{\mu}(E) + \overline{\mu}(E^c) = b - a$ *com* $E^c = [a, b] - E$*;*

(iii) E *é mensurável* $\Leftrightarrow$ $\underline{\mu}(E) + \overline{\mu}(E^c) \le b - a$*;*

(iv) *Se* E *é mensurável então* E^c *é mensurável e* $\overline{\mu}(E^c) = (b - a) - \overline{\mu}(E)$*;*

(v) *Se* A *é um subconjunto aberto de* $[a, b]$ *então* A *é mensurável e* $\mu(A) = |A|$*;*

(vi) *Se* F *é um subconjunto fechado de* $[a, b]$ *então* F *é mensurável e* $\mu(F) = |F|$*;*

(vii) *Sejam* $x \in [a, b]$ *e* $x + E = \{x + y\,;\, y \in E\}$*. Então* $\mu(E) = \mu(x + E)$*.*

Teorema 5.2 **(i)** *Se* $E_1, E_2, \ldots$ *são subconjuntos de* $[a, b]$ *então*

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n);$$

(ii) *Se* $E_1, E_2, \ldots$ *são subconjuntos disjuntos dois a dois de* $[a, b]$ *então*

$$\underline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \ge \sum_{n=1}^{\infty} \underline{\mu}(E_n).$$

(iii) *Se* $E_1, E_2, \ldots$ *são subconjuntos mensuráveis disjuntos dois a dois de* $[a, b]$ *então* $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ *é mensurável e*

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n).$$

Exemplo 5.1 *Qualquer conjunto* E *com* $\overline{\mu}(E) = 0$ *é mensurável e* $\mu(E) = 0$*.*

De fato, $0 = \overline{\mu}(E) \ge \underline{\mu}(E) \ge 0$*, logo,* $\overline{\mu}(E) = \underline{\mu}(E) = 0$*.* ∎

Pelo Exemplo **??** temos $\mu(\emptyset) = 0$.

Exemplo 5.2 *Um conjunto finito $E = \{a_1, \ldots, a_n\} \subset [a, b]$ é mensurável e $\mu(E) = 0$.*

De fato, pelo Exemplo **??** *basta mostrarmos que $\overline{\mu}(E) = 0$. Para isto, dado $\epsilon > 0$ considere o aberto*

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{\epsilon}{n}, a_i + \frac{\epsilon}{n} \right).$$

Então, $\overline{\mu}(A) \leq 2\epsilon$ e $\overline{\mu}(E) \leq \overline{\mu}(A) \leq 2\epsilon$, $\forall \epsilon$. Logo, $\overline{\mu}(E) = 0$. ■

Exemplo 5.3 *Todo subconjunto E enumerável de $[a, b]$ é mensurável e $\mu(E) = 0$. Em particular, $E = \mathbb{Q} \cap [a, b]$ tem medida zero.*

De fato, seja $E = \{a_1, a_2, \ldots\}$ então pelo Teorema **?? (i)** *e pelo Exemplo* **??** *tem-se*

$$\overline{\mu}(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(\{a_n\}) = 0.$$

Logo, $\overline{\mu}(E) = 0$. ■

Observe que, combinando o Teorema **?? (iv)** e o Exemplo **??** temos que o complementar de qualquer subconjunto enumerável E de $[a, b]$ é mensurável com medida igual a $b - a$. Em particular, o conjunto dos números irracionais de $[a, b]$ é mensurável com medida $b - a$.

Para finalizar, mostraremos que existem conjuntos que não são mensuráveis. Para isto, primeiro mostraremos que a medida exterior não é aditiva enumerável na classe de todos os subconjuntos de $[a, b]$.

Exemplo 5.4 *A medida exterior $\overline{\mu}$ não é aditiva enumerável na classe de todos os subconjuntos de $[a, b]$, ou seja, existem conjuntos E_n disjuntos dois a dois tais que $[a, b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, mas $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n) \neq b - a$.*

De fato, seja $E_\alpha = \{x \in [a, b]\,; \, x - \alpha \in \mathbb{Q} \cap [a, b]\}$ para cada $\alpha \in [a, b]$, ou seja, E_α é formado pelo pontos de $[a, b]$ que diferem de α por um racional. Podemos mostrar que cada E_α é enumerável e a coleção (E_α) é formada por subconjuntos dois a dois disjuntos.

Agora, usando o axioma da escolha, seja E o conjunto formado exatamente por um elemento x_α de cada E_α. Assim, dois elementos distintos de E não podem diferir por um racional. Sejam $\{r_1, r_2, \ldots\}$ uma enumeração dos racionais de $[a,b]$ e $E_n = r_n + E$.

Afirmo 1: *$E_n \cap E_m$ para $n \neq m$. De fato, se $y \in E_n \cap E_m$ então existem $x_\alpha, x_\beta \in E$ tais que $x_\alpha + r_n = y = x_\beta + r_m$. Logo, $x_\alpha - x_\beta$ é racional, o que implica $x_\alpha = x_\beta$. Portanto, $r_n = r_m$ e $E_n = E_m$.*

Afirmo 2: *$[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. De fato, se $x \in [a,b]$ então $x \in E_\alpha$ para algum α. Por outro lado, existe um representande de E_α em E, nomeado x_α, e logo, $x = x_\alpha + r_n$ para algum racional r_n, ou seja, $x \in E_n$.*

Afirmo 3: *$\overline{\mu}$ não é aditiva enumerável em $[a,b]$. De fato, claramente*

$$b - a = \overline{\mu}([a,b]) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Pelo Teorema **??(vii)** *temos que $\overline{\mu}(E) = \overline{\mu}(E_n)$, $\forall n$, pois E_n são transladados por E. Como E_n são disjuntos dois a dois (afirmação 1) se $\overline{\mu}$ é aditiva enumerável temos que*

$$b - a = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E),$$

ou seja, existem vários números $\overline{\mu}(E)$ iguais somado à $b-a$, o que é uma contradição.

■

Exemplo 5.5 *Existem conjuntos não mensuráveis.*

De fato, considere os subconjuntos (E_n) construídos no Exemplo **??**. *Observe que a medida exterior de cada E_n são iguais. Como $[a,b] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ temos que, se E_n são mensuráveis então então $\sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(E_n) = b-a$, o que é impossível. Logo, $\underline{\mu}(E_n) < \overline{\mu}(E_n)$ para cada n.* ■

5.1.2 Funções mensuráveis

No início do capítulo mencionamos que para definirmos a integral de Lebesgue precisamos medir conjuntos do tipo $E_j = \{x \in \{a,b]\,; y_{j-1} \leq f(x) < y_j\}$. Para isto, devemos considerar as funções f para as quais conjuntos do tipo $\{x \in \{a, b] \,; c \leq f < d\}$ com $c < d$ são mensuráveis. Tais funções são chamadas *funções mensuráveis.*

Definição 5.3 *Dizemos que uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é mensurável se o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, f(x) > s\}$ é mensurável, para todo $s \in \mathbb{R}$.*

Observe que, f é uma função mensurável se a imagem inversa de (s, ∞) é mensurável, para todo $s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 5.6 *Toda função contínua em $[a, b]$ é mensurável.*

De fato, se f é uma função contínua definida em $[a, b]$ então, para qualquer aberto (s, ∞), temos que a imagem inversa de (s, ∞) é aberto, e logo, mensurável. ∎

A prova das seguiuntes propriedades podem ser encontradas em [**?**, p. 6]:

Teorema 5.3 *a função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é mensurável se, e somente se, as seguintes afirmações são equivalentes: $\forall s, t \in \mathbb{R}$ com $t < s$*

(i) *o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, f(x) \geq s\}$ é mensurável;*

(ii) *o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, f(x) < s\}$ é mensurável;*

(iii) *o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, f(x) \leq s\}$ é mensurável;*

(iv) *o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, t < f(x) \leq s\}$ é mensurável;*

(v) *o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, t \leq f(x) < s\}$ é mensurável;*

(vi) *o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, t \leq f(x) \leq s\}$ é mensurável;*

(vii) *o conjunto $\{x \in [a, b] \,;\, t < f(x) < s\}$ é mensurável.*

Exemplo 5.7 *Sejam $I = [a, b]$, $E \in [a, b]$ e χ_E a função característica de E definida por*

$$\chi_E = \begin{cases} 1 & se \quad x \in E, \\ 0 & se \quad x \notin E. \end{cases}$$

χ_E é uma função mensurável, se e somente se, E é mensurável. De fato,

$$\{x \in E\,;\, \chi_E > s\} = \begin{cases} \emptyset & se \quad s \geq 1, \\ E & se \quad 0 \leq s < 1, \\ I & se \quad s < 0. \end{cases}$$

Em particular, as funções $\chi_{\mathbb{Q}}$ e $\chi_{I-\mathbb{Q}}$ são funções mensuráveis em $[a,b]$.

5.1.3 Partições mensuráveis

Uma partição mensurável de $[a,b]$ é uma coleção finita de conjuntos mensuráveis E_i tais que $E_i \subset [a,b]$ e $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ com $E_i \cap E_j = \emptyset$ quando $i \neq j$. Representaremos uma partição mensurável por $\mathcal{P}^* = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$.

Agora, considere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função **limitada**, $\mathcal{P}^*$ uma partição mensurável e $t_i \in E_i, i = 1, 2, \cdots, n$. A **Soma de Lebesgue** relativa à partição $\mathcal{P}^*$ é definida por

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\mu(E_i).$$

agora, definiremos a integral de Lebesgue.

Definição 5.4 (Integral de Lebesgue) *Seja $|\Delta^*| = \max_{1 \leq i \leq n} \mu(E_i)$. Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada é Lebesgue integrável em $[a,b]$ se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ satisfazendo*

$$|\Delta^*| < \delta \Rightarrow \left| S(f, \overset{*}{\mathcal{P}}) - L \right| < \varepsilon$$

para toda partição mensurável $\overset{*}{\mathcal{P}}$ de $I = [a,b]$.

Representaremos por $\mathcal{L}^*(I)$ o conjunto das funções Lebesgue integráveis e por $\mathcal{L} \int_a^b f d\mu$ a integral de Lebesgue.

A abordagem mais conveniente para definir a integral de Lebesgue é usar o conceito de **soma superior** e **soma inferior**. Para isto, sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $\overset{*}{\mathcal{P}} = \{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ uma partição mensurável de $I = [a,b]$. Considere

$$\overline{M}(f; E_k) = \sup_{x \in E_k} f(x) \quad \text{e} \quad \underline{M}(f; E_k) = \inf_{x \in E_k} f(x).$$

Então, definimos as somas superior e inferior, respectivamente, por

$$U(f,\overset{*}{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{M}(f;E_k)\mu(E_k), \quad L(f,\overset{*}{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{n} \underline{M}(f;E_k)\mu(E_k). \tag{5.1}$$

Não é complicado mostrarmos o seguinte resultado:

Lema 5.1 *Se $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é limitada então*

$$\inf_{\overset{*}{\mathcal{P}}} U(f,\overset{*}{\mathcal{P}}) \geq \sup_{\overset{*}{\mathcal{P}}} L(f,\overset{*}{\mathcal{P}}).$$

com o ínfimo e o supremo tomados sob todas as partições mensuráveis de $[a,b]$.

Com o Lema **??** podemos definir as **integrais superior e inferior** de f, respectivamente, por

$$\mathcal{L}\overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f,\overset{*}{\mathcal{P}});\overset{*}{\mathcal{P}}\} \tag{5.2}$$

$$\mathcal{L}\underline{\int_a^b} f = \sup\{U(f,\overset{*}{\mathcal{P}});\overset{*}{\mathcal{P}}\} \tag{5.3}$$

Note que, $\mathcal{L}\overline{\int_a^b} f \geq \mathcal{L}\underline{\int_a^b} f$.

Agora, vamos definir a integral de Lebesgue usando soma inferior e superior.

Definição 5.5 *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. Dizemos que f é Lebesgue integrável se*

$$\mathcal{L}\underline{\int_a^b} f = \mathcal{L}\overline{\int_a^b} f.$$

E nesse caso, definimos $\mathcal{L}\int_a^b f = \mathcal{L}\underline{\int_a^b} f = \mathcal{L}\overline{\int_a^b} f.$

No que segue, usaremos o seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [**?**]:

Teorema 5.4 *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada. f é Lebesgue integrável em $[a,b]$ se, e somente, se para todo $\epsilon>0$ existem uma partição mensurável $\overset{*}{\mathcal{P}}$ tal que*

$$U(f,\overset{*}{\mathcal{P}}) < L(f,\overset{*}{\mathcal{P}}) + \epsilon$$

com $U(f,\overset{*}{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x\in E_i} f(x)\,\mu(E_i)$ *e* $L(f,\overset{*}{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x\in E_i} f(x)\,\mu(E_i).$

Exemplo 5.8 *Considere a função característica dos irracionais de* $[0,1]$ *definida por*

$$\chi = \begin{cases} 1 & se \quad x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 0 & se \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

$\chi \in \mathcal{L}^*([0,1])$ *e* $\mathcal{L}\displaystyle\int_0^1 \chi = 1.$

De fato, sejam $E_1 = \{x\,;\, x \notin \mathbb{Q} \cap [0,1]\}$ *e* $E_2 = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ *então* $\overset{*}{\mathcal{P}}\ \{E_1, E_2\}$ *é uma partição mensurável de* $[0,1]$. *Como* $\chi(x) = 1$ *para* $x \in E_1$ *e* $\chi(x) = 0$ *para* $x \in E_2$ *temos que* $\overline{M}(\chi, E_1) = \underline{M}(\chi, E_1) = 1$ *e* $\overline{M}(\chi, E_2) = \underline{M}(\chi, E_2) = 0$. *Logo,* $U(\chi, \overset{*}{\mathcal{P}}) = 1.\mu(E_1) + 0.\mu(E_2) = 1$ *e* $L(\chi, \overset{*}{\mathcal{P}}) = 1.\mu(E_1) + 0.\mu(E_2) = 1$. *Portanto,* $U(\chi, \overset{*}{\mathcal{P}}) = L(\chi, \overset{*}{\mathcal{P}})$, *e pelo Teorema* **??** *temos* $\chi \in \mathcal{L}^*([0,1])$. *Além disso,*

$$L(\chi, \overset{*}{\mathcal{P}}) \leq \mathcal{L}\int_0^1 \chi \leq U(\chi, \overset{*}{\mathcal{P}}),$$

o que implica $\mathcal{L}\displaystyle\int_0^1 \chi = 1.$ ∎

Lembre que, $\chi \notin \mathcal{R}([0,1])$.

Teorema 5.5 *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é Riemann integrável em* $[a,b]$ *então* f *é Lebesgue integrável e as integrais coincidem.*

Prova: Seja $\overset{*}{\mathcal{P}}$ uma partição mensurável de I dada pelos intervalos $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Então,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x)\,(x_i - x_{i-1}) &\leq \sup_{\mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in E_i} f(x)\,\mu(E_i) \right) \\ &\leq \inf_{\mathcal{P}} \left(\sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in E_i} f(x)\,\mu(E_i) \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x)\,(x_i - x_{i-1}). \end{aligned} \tag{5.4}$$

Como f é Riemann integrável temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x)\,(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x)\,(x_i - x_{i-1})$$

e, por (**??**), concluímos que $U(f, \overset{*}{\mathcal{P}}) = L(f, \overset{*}{\mathcal{P}})$, o que implica $U(f, \overset{*}{\mathcal{P}}) < L(f, \overset{*}{\mathcal{P}}) + \epsilon$, $\forall \epsilon$. Logo, f é Lebesgue integrável. ∎

PAREI AQUI....

No que segue, definiremos a integral de Lebesgue para funções mensuráveis **ilimitadas**.

Seja f um função mensurável, não negativa e ilimitada de $[a, b]$. Definimos

$$ {}^{k}f(x) = \begin{cases} f, & \text{se} \quad 0 \leq f \leq k, \\ k, & \text{se} \quad f > k. \end{cases} $$

E assim, a sequência de funções $\{{}^{k}f\}$ limitadas e mensuráveis converge para monotonamente para f. Além disso, a sequência de números reais $\left\{ L \int_a^b {}^{k}f d\mu \right\}$ é decrescente que pode convergir ou não. Portanto, definimos a integral Lebesgue de f como segue:

Definição 5.6 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa, ilimitada e mensurável. Dizemos que f é Lebesgue integrável em $[a, b]$ se o $\lim\limits_{n \to \infty} \int_a^b {}^{k}f$ existe. Neste caso, definimos*

$$ \int_a^b f = \lim \int_a^b {}^{k}f. \tag{5.5} $$

Definição 5.7 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Definimos as funções f^+ e f^-, chamadas partes positiva e negativa de f, respectivamente, por*

$$ f^+ = \max\{f, 0\}, \;\; f^- = \max\{-f, 0\}. $$

Note que,

$$ f^+ = \frac{|f| + f}{2}, \quad f^- = \frac{|f| - f}{2}, \;\; f = f^+ - f^- = \frac{|f| + f}{2} - \frac{|f| - f}{2}. $$

Agora, definirmos a integral de Lebesgue de uma função mensurável arbitrária.

Definição 5.8 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Se as funções f^+ e f^- são Lebesgue integráveis em $[a, b]$ então f é integrável em $[a, b]$. E neste caso, temos*

$$ \int_a^b f = \int_a^b f^+ + \int_a^b f^-. \tag{5.6} $$

Definição 5.9 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e E um conjunto mensurável de $[a, b]$. Se f é Lebesgue integrável então*

$$ \int_E f = \int_a^b f \chi_E \tag{5.7} $$

5.2 Teorema Fundamental do Cálculo

Nesta seção enunciaremos o TFC para a integral de Lebesgue sem demostração. A prova dos resultados desta seção podem ser encontradas em [?].

Seja f uma função Lebesgue integrável, então podemos definir a integral indefinida de f por

$$F(x) = L\int_a^x f.$$

Proposição 5.1 *(i) Se f é limitada em $[a,b]$, então F é contínua em $[a,b]$*
(ii) F é contínua $[a,b]$ então f pode ser limitada ou não
(iii)Dado $\varepsilon > 0$, existe um $\delta > 0$ tal que $\mu(E) < \delta$ então $L\int_E |f| < \varepsilon$

Teorema 5.6 (Teorema Fundamental do Cálculo - 1ª Forma) *Se F é diferenciável e F' é limitada no intervalo $[a,b]$, então F' é Lebesgue integrável em $[a,b]$ e*

$$L\int_a^b F' d\mu = F(b) - F(a).$$

Teorema 5.7 (Teorema Fundamental do Cálculo- 2ª Forma) *Considere uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue integrável, e $F = \int_a^t F(t)$ uma integral indefinda de f. Então F é absolutamente contínua e $F' = f$ quase sempre em $[a,b]$.*

Agora, apresentamos uma outra forma do Teorema Fundamental do Cálculo para a integral de Lebesgue que envolve uma classe de funções chamadas absolutamente contínuas. Vamos, primeiramente defini-las e enunciar e mostrar o Teorema Fundamental do Cálculo.

Definição 5.10 (Função Absolutamente Contínua) *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é absolutamente contínua em $[a,b]$ se $\forall \varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para toda coleção finita de intervalos abertos $\{(a_k, b_k)\}_{k=1}^n$, dois a dois disjuntos com $\sum_{k=1}^n (b_k - a_k) < \delta$, então:*

$$\sum_{k=1}^n |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon \tag{5.8}$$

Podemos também destacar algumas propriedades das funções absolutamente contínuas. Portanto, considere f uma função absolutamente contínua.

Proposição 5.2 *(i) f é uniformemente contínua;*

(ii) f é de variação limitada e diferenciável quase sempre em $[a, b]$;

(iii) Se f' tendo a zero quase sempre, então f é constante em $[a, b]$.

Teorema 5.8 *Se F é absolutamente contínua em $[a, b]$ então F' é Lebesgue integrável e*

$$L \int_a^b F' d\mu = F(b) - F(a). \tag{5.9}$$

Prova: Sabemos que pela proposição **??**(ii) que F é de variação liimitada. Logo, pode ser escrita como uma diferrença de duas funções monótonas, então: $F = F_1 - F_2$, e suponha, F_1 e F_2 crescentes. Também, pela mesma proposição, F é diferenciável quase sempre em $[a, b]$. E pela Desigualdade Triangular temos que $|F'| \leq F - 1' + F_2'$ quase sempre em $[a, b]$. Logo, pelo teorema **??**, tem-se:

$$\begin{aligned} L \int_a^b |F'| d\mu &\leq L \int_a^b |F_1'| d\mu + L \int_a^b |F_2'| d\mu \\ &\leq F_1(b) - F(a) + F_2(b) - F(a). \end{aligned}$$

Pelo teorema **??**, F' é integrável. Agora, considere $G(x) = L \int_a^x F' d\mu$. Então, pelo teorema **??**, G é absolutamente contínua, logo, $(F - G)' = F' - G' = 0$ quase sempre em $[a, b]$. Usando este fato, Proposição **??**(iii) e $G(a) = 0$ obtemos

$$L \int_a^b F' d\mu = F(b) - F(a).$$

■

5.3 Teoremas de Convergência

Inicialmente, vamos enunciar uma proposição que usaremos nas demonstrações seguintes.

Proposição 5.3 *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, $\forall n$ funções mensuráveis tais que $f_n(x) \to f(x)$ quase sempre em $[a, b]$. Dados $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ existe $k_0\ in\mathbb{N}$ e um conjunto mensurável $E \subset [a, b]$ com $\mu(E) < \delta$, tais que $\forall x \notin E$, tem-se*

$$n \geq k_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \tag{5.10}$$

Teorema 5.9 (Teorema da Convergência Limitada) *Sejam $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções mensuráveis tais que $\exists M > 0$; $|f_n(x)| < M$, $\forall n$. Se $f_n(x) \to f(x)$ quase sempre então*

$$\lim_{n\to\infty} L\int_a^b f_n = L\int_a^b f. \tag{5.11}$$

Prova: Das hipóteses, temos que $|f_n(x)| < M$. E observemos que:

$$\left|L\int_a^b f_n - L\int_a^b f\right| = \left|L\int_a^b f_n - f\right| \leq L\int_a^b |f_n - f|.$$

E pela Proposição **??**, dado $\varepsilon > 0$ e dado $\delta = \dfrac{\varepsilon}{4M}$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ e um conjunto mensurável $E \subset [a, b]$ com $\mu(E) < \dfrac{\varepsilon}{4M}$ tais que, $\forall x \in E^c$, tem-se

$$n \geq k_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}.$$

Logo,

$$\left|L\int_a^b f_n - L\int_a^b f\right| \leq L\int_a^b |f_n - f| = L\int_{E^c} |f_n - f| + L\int_E |f_n - f|.$$

Então, para $n \geq k_0$ tem-se

$$\begin{aligned}
\left|L\int_a^b f_n - L\int_a^b f\right| &< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\mu(E^c) + L\int_E |f_n| + L\int_E |f| \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}\mu(E^c) + 2M\mu(E) \\
&< \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + 2M\frac{\varepsilon}{4M} < \varepsilon
\end{aligned}$$

e o resultado segue. ■

Lema 5.2 (Lema de Fatou) *Se (f_n) é uma sequência de funções mensuráveis não negativas em $\mathcal{L}^*(I)$ tais que $f_n(x) \to f(x)$ quase sempre em $[a, b]$ então*

$$L\int_a^b \leq \lim_{n\to\infty} \inf L\int_a^b f_n. \tag{5.12}$$

Prova: Consideremos que $f_n(x) \to f(x)$ pontualmente, pois a convergência é quase sempre em $[a,b]$. Agora, para qualquer $m \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$^m f_n(x) \to {}^m f(x) \quad \textit{quase sempre em } [a,b]. \tag{5.13}$$

E para cada m fixo, a sequência $({}^m f_n)_{n=1}^{\infty}$ é limitada por m, $\forall n$. Assim, temos que as hipóteses do Teorema da Convergência Limitada são satisfeitas, e logo,

$$\lim_{n\to\infty} L\int_a^b {}^m f_n = L\int_a^b {}^m f. \tag{5.14}$$

Contudo, para todo $x \in [a,b]$ tem-se ${}^m f_n(x) \leq f_n(x)$, portanto

$$\lim_{n\to\infty} L\int_a^b {}^m f_n = \lim_{n\to\infty} \inf L\int_a^b {}^m f_n \leq \lim_{n\to\infty} L \inf \int_a^b f_n. \tag{5.15}$$

Assim, combinando (**??**) e (**??**), obtemos:

$$\lim_{n\to\infty} \inf L\int_a^b f_n \geq L\int_a^b {}^m f \tag{5.16}$$

Fazendo $m \to \infty$ temos $\displaystyle\int_a^b f \leq \lim_{n\to\infty} \inf \int_a^b f_n$. ∎

Teorema 5.10 (Teorema da Convergência Monótona) *Seja (f_n) uma sequência monótona de funções mensuráveis em $\mathcal{L}^*(I)$. Se $f_n(x) \to f(x)$ em $[a,b]$, então*

$$\lim_{n\to\infty} L\int_a^b f_n = L\int_a^b f. \tag{5.17}$$

Prova: Pelo Lema de Fatou, temos que:

$$L\int_a^b \leq \lim_{n\to\infty} \inf L\int_a^b f_n \tag{5.18}$$

Usando que a sequência é crescente e $f_n(x) \to f(x)$ temos que $f_n(x) \leq f(x)$ e

$$\int_a^b f_n \leq \int_a^b f \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup \int_a^b f_n \leq \int_a^b f \tag{5.19}$$

De (**??**) e (**??**) segue (**??**). ∎

Teorema 5.11 (Teorema da Convergência Dominada) *Sejam* (f_n) *uma sequência de funções mensuráveis em* $\mathcal{L}^*(I)$ *e* $g \in \mathcal{L}^*(I)$. *Se* $|f_n(x)| \leq g(x)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ *em* $[a,b]$ *e* $f_n(x) \to f(x)$ *quase sempre em* $[a,b]$ *então*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b f. \tag{5.20}$$

Prova: Como $|f_n(x)| < g(x)$ tem-se $-g(x) < f_n(x) < g(x)$, $\forall n$, logo $0 < g(x) - f_n(x) < 2g(x)$, $\forall n$. Portanto, $g - f_n$ é uma sequência de funções mensuráveis e não negativas em $\mathcal{L}^*(I)$. Logo, pelo Lema de Fatou, temos

$$L\int_a^b (g - f_n) \leq \lim_{n\to\infty} \inf L \int_a^b (g - f_n). \tag{5.21}$$

Como $f_n(x) \to f(x)$ quase sempre e $|f_n(x)| < g(x)$ então $|f(x)| < g(x)$ em $[a,b]$. Portanto, $f \in \mathcal{L}^*(I)$ e por (**??**), segue que

$$L\int_a^b g - \int_a^b f \leq L\int_a^b g + \lim_{n\to\infty} \inf L\int_a^b -f_n \leq L\int_a^b g - \lim_{n\to\infty} \sup L \int_a^b f_n.$$

Logo,

$$L\int_a^b f \geq \lim_{n\to\infty} \sup L \int_a^b f_n >$$

Analogamente, para $g + f_n$, obtemos

$$L\int_a^b f \leq \lim_{n\to\infty} \inf L \int_a^b f_n.$$

E portanto,

$$L\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} L \int_a^b f_n.$$

■

5.4 Integral de Lebesgue & Integral de Riemann generalizada

Vamos enunciar os seguintes lemas que serão úteis para provarmos a equivalência entre a integral de McShane e Lebesgue. Nossa abordagem desta equivalência não usa teoria de medida e pode ser encontrada em [**?**]

Lema 5.3 *Seja $\{f_n\}$ uma sequência de funções contínuas e limitadas em um subconjunto fechado $E \subset \mathbb{R}$. Se $\{f_n\}$ converge em E com $n \to \infty$, então para cada $\eta > 0$, existe um conjunto aberto G, com $|G| < \eta$, tais que $\{f_n\}$ converge unformemente em $E \setminus G$.*

Lema 5.4 *Se f é Lebesgue integrável em $[a,b]$ com primitiva F, então $|f|$ é Lebesgue integrável com a primitiva V=V(F;[a,x]), que é a variação de F em $[a,x]$.*

Teorema 5.12 *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. f é McShane integrável se, e somente se, f for Lebsgue integrável e os valores das integrais são iguais.*

Prova: ($\Rightarrow$) Se f é McShane integrável e $F(t) = \displaystyle\int_a^t f$, então é diferenciável q.s. em $[a,b]$. Se mostrarmos que f é de Variação Limitada, terminamos essa parte do teorema. De fato, considere δ tal que

$$\left| S(f, \dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f \right| < \epsilon$$

sempre que $\dot{\mathcal{P}} = \{(t_i, I_i); 1 \leq i \leq m\}$ é uma partição δ-refinada de $[a,b]$.

Fixando i, considere $\dot{\mathcal{Q}} = \{(t_i, [x_{j-1}, x_j]; 1 \leq j \leq n\}$ uma partição δ-refinada de I_i. Logo, pelo Lema de Saks - Henstock

$$\sum_{j=1}^{n} \left| f(t_i)(x_j - x_{j-1}) - \int_{x_{j-1}}^{x_j} \right| \leq 2\epsilon$$

Logo, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |F(x_j) - F(x_{j-1})| \leq 2\epsilon + |f(t_i)| l(I_i)$. Logo, F é de variação limitada e diferenciável q.s. em $[a,b]$. Então, é absolutamente contínua, e portanto, Lebesgue integrável.

($\Leftarrow$) Suponhamos que F é a Lebesgue primitiva de f. Então f é absolutamente contínua e $F'(x) = f(x)$ q.s. em $[a,b]$. Suponhamos primeiramente, que a função f seja limitada por K. Para todo inteiro $n > 0$, seja $f_n = n\left[F\left(x + \dfrac{1}{n}\right) - F(x)\right]$. Então f_n é contínua em $[a,b]$ e $f_n(x) \to f(x)$ q.s. em $[a,b]$.

Dado $\epsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $n < \dfrac{\epsilon}{K}$. Assim, existe um conjunto aberto $G' \subset [a,b]$ tal que $|G'| < \dfrac{\eta}{2}$ e $\{f_n\} \to f$ em $[a,b] \setminus G'$. Com isso, cada f_n é contínua no conjunto fechado $[a, b] \setminus G'$. Logo, pelo lema **??** existe um conjunto aberto $G'' \subset [a, b]$com $|G''| < \dfrac{\eta}{2}$ tal que $\{f_n\} \to f$, uniformemente em $[a, b] \setminus G$, com $G = G' \cup G''$ com $|G| < \eta$. Com isso, temos que f é contínua.

Fazendo $\varphi(x) = f(x)$, se $x \in [a, b] \setminus G$ e linearmente para outros valores em $[a, b]$ temos que φ é McShane integrável. Portanto, existe um medidor δ tal que

$$\left| \sum_{x \in \dot{P}} \varphi(x)(v - u) - \mathcal{M} \int_a^b \varphi \right| < \epsilon$$

sempre que $\dot{P}$ é uma partição δ-refinada livre de $[a, b]$. Pela primeira parte desse teorema, φ é Lebesgue integrável em $[a, b]$ e $\mathcal{L} \int_a^b \varphi = \mathcal{M} \int_a^b \varphi$.

Logo, para toda partição δ-refinada livre, temos

$$\begin{aligned} &\left| \sum f(x)(v - u) - \mathcal{L} \int_a^b f \right| \\ &\leq \left| \sum f(x)(v - u) - \sum \varphi(x)(v - u) \right| \\ &+ \left| \sum \varphi(x)(v - u) - \mathcal{M} \int_a^b \varphi \right| + \left| \mathcal{L}\varphi - \mathcal{L} \int_a^b f \right| \\ &\leq \sum_{x \in G} |\varphi(x) + f(x)|(v - u) + \epsilon + \mathcal{L} \int_a^b |\varphi - f| \\ &< 2K|G| + \epsilon + 2K|G| < 5\epsilon \end{aligned} \tag{5.22}$$

Agora, escrevendo $G = \bigcup_k (a_k, b_k)$, k=1,2,... temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \int_a^b |\varphi - f| &= \sum_k \mathcal{L} \int_a^b |\varphi - f| \\ \leq \sum_k \mathcal{L} \int_a^b |\varphi| + |f| \leq \sum_k 2K(b_k - a_k) &= 2K|G| < \epsilon \end{aligned} \tag{5.23}$$

Portanto f é McShane integrável em $[a, b]$.

Agora, vamos supor que f é ilimitada em $[a, b]$. Sendo f é Lebesgue integrável em $[a, b]$. Sem perda de generalidade, podemos supor $f(x) \geq 0, \ \forall x \in [a, b]$ pelo lema **??**. Considere $g_n(x) = f(x)$ quando $f(x) \leq n$ e 0 0 nos outros valores de $[a, b]$. Então g_n é limitadda e Lebesgue integrável em $[a, b]$. Portanto, $\{g_n\}$ é McShane integrável e as integrais coincidem.

Notemos que $\{g_n\}$ é monótona $\{\mathcal{M}\int_a^b g_n\}$. Sendo $\{\mathcal{M}\int_a^b g_n\}$ converge. Segue do teorema da convergêncccia monótona que f é McShane integrável em $[a, b]$ ∎

Considerações Finais

Neste trabalho definimos a integral de Henstock - Kurzweil, também chamada de integral de Riemann generalizada, pois apresenta uma abordagem semelhante a de Riemann. Estudamos suas principais propriedades e teoremas importantes, como por exemplo, o Teorema Fundamental do Cálculo, em uma versão mais geral que o da integral de Lebesgue; e os teoremas de Convergência Monótona e Dominada. Também, apresentamos uma variante dessa nova integral, chamada integral de McShane e ao definirmos a integral de Lebesgue, e verificarmos algumas de suas propriedades, pudemos relaciona-las e obter uma ligação entre essa última e Riemann Generalizada.

Futuramente, a partir desse trabalho, pretende-se avançar nos estudos em Teoria de Integração e possibilitar ao estudante um embasamento para a pós - graduação. Assim como, divulgar a integral de Riemann generalizada e estimular outros alunos a pesquisar sobre esse tema, promovendo uma avanço nessa área do conhecimento.

Bibliografia

[1] R. G. Bartle, D. R. Sherbert *Introduction to Real Analysis*, John Wiley & Sons, 1976.

[2] R. G. Bartle, *The elements of Integration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons, 1995.

[3] R. G. Bartle, *A Modern Theory of Integration*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 32, American Mathematical Society, 2000.

[4] R. G. Bartle, *Return to the Riemann Integral*, Amer. Math. Monthly, 103, pp. 625-632, 1996.

[5] E. Phillips, *An introductory to Analysis and Integration Theory*, Dover Publications, Inc, New York, 1984.

[6] F. E. Burk, *A Garden of Integrals*, The Dolciani Mathematical Expositions, vol. 31, The mathematical Association of America, 2007.

[7] C. Swartz, *Introduction to Gauge Integrals*, World Scientific, 2001.

[8] C. Vaz, *Integral de Riemann Generalizada*, Notas, 2012.

[9] C. Vaz, *Medida e Integração*, Notas de aula, 2011.

[10] Ying-Jian Lin, *On the equivalence of McShane and Lebesgue Integrals*, Real Analysis Exchange, vol 21 (2), 1995-96.