UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Ana Lídia dos Santos Tapajós Figueira

SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

BELÉM

2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

CURSO DE LICENCIATURA PLENA EM MATEMÁTICA

Ana Lídia dos Santos Tapajós Figueira

SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado, como requisito parcial, para obtenção do grau de Licenciado Pleno em Matemática da Universidade Federal do Pará.

Orientadora: Profª. Drª. Rúbia Gonçalves Nascimento

BELÉM

2013

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

Ana Lídia dos Santos Tapajós Figueira

SEQUÊNCIAS E SÉRIES NUMÉRICAS

Trabalho de Conclusão de curso apresentado, como requisito parcial, para obtenção do título de Licenciatura Plena em Matemática, da Universidade Federal do Pará pela seguinte banca examinadora:

Banca Examinadora:

____

Prof. Msc. Augusto César dos R. Costa

Faculdade de Matemática, UFPA

____

Prof. Dr. Giovany de Jesus M. Figueiredo

Faculdade de Matemática, UFPA

____

Prof[a]. Dr[a]. Rúbia Gonçalves Nascimento.

Orientadora

Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ______________________________

Dedico este trabalho aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pois sem ele não estaría aqui e que sempre está presente em minha vida, guiando em cada passo que dou.

Aos meus pais, Mírian Silva dos Santos e Raimundo Jorge Tapajós Figueira, aos meus avós, tios, tias, irmãos e primos que me apoiam em qualquer circunstância da vida e que estão presente nos momentos felizes e tristes.

A Ronald Ribeiro Silva por estar ao meu lado durante todo o curso, pela compreensão e por sempre ser um ótimo companheiro. E a todos da sua família, que me acolheram e me fizeram sentir como se fizesse parte da família, e me deram liberdade para que eu pudesse descansar, quando precisei, me deixando a vontade o que ajudou muito para que eu pudesse concluir esse trabalho.

Aos meus amigos Érico Gabriel, Francimaria Mota, José Luiz Solon, Renan Barbosa, Sara Raissa Rodrigues e Thays Nathércya que me auxiliaram no decorrer do curso. Pelos momentos de alegria que ficarão na memória, como as brincadeiras que quase sempre envolviam as disciplinas que cursamos.

Aos meus amigos Fellipe Monteiro Gomes, Lusiane Pereira Fonseca, Priscila Silva e Rafael Paiva Cabral pois eles estiveram comigo antes mesmo de iniciar o curso e que me incentivaram a lutar para chegar até ele.

Aos meus colegas Claudionei Pereira de Oliveira e Jeziel Nascimento Correia que tiveram certa influência na escolha do tema e que me ajudaram quando eu mais precisei entender os assuntos da disciplina Análise Real.

Aos meus colegas de curso, de outros cursos, e principalmente de Ciência da Computação que acompanharam todos os semestres desde antes de começar o curso.

A minha orientadora Profª. Drª. Rubia Nascimento que, com poucas palavras de incentivo, foi de grande importancia para amar a disciplina Analise Real e que me fez decidir o tema deste trabalho.

Aos professores Celsa Maranhão, Jorge, Marco Antônio, Marcos Murakami, Maria de Nazaré Bezerra, Rosângela, Wilson Maranhão e aos professores em geral, do ensino médio e da graduação que contribuiram para essa formação com carinho pelo mútuo aprendizado, por suas orientações e eficiência.

Aos professores Augusto César dos R. Costa e Giovany de Jesus M. Figueiredo que compõem a banca examinadora, por aceitarem tal trabalho e se disporem a avalia-lo.

Aos meus colegas de todos os estágios que me ensinaram sobre convivência e que possibilitaram enorme experiência sobre o que virá pela frente. E também aos meus alunos que compartilharam momentos importantes e me ensinaram que não é importante somente o conteúdo, mas também um bom relacionamento com eles.

Enfim, a todos, meu muito obrigado.

"A Matemática é, não só um conjunto de técnicas úteis mas também um conjunto de ideias que fazem parte do patrimônio cultural da humanidade. Se estas notas conseguirem transmitir ao leitor um pouco da beleza e continuidade de uma parte da Matemática, terão valido a pena os feriados e noites perdidas."

Manfredo Perdigão do Carmo

RESUMO

Este trabalho de conclusão de curso teve como objetivo estudar e reunir os conceitos e posteriormente verificar a veracidade dos resultados, vistos como Proposições, Teoremas e Corolários. Será abordado de maneira formal, mas evitando os detalhes que são de fácil percepção nas demonstrações feitas e tentando ao máximo conseguir mostrar com clareza as operações utilizadas, de modo que seja possível o entendimento do desenrolar dos resultados.

Palavras-chave: Sequências, Séries, Convergência, Divergência.

ABSTRACT

This course conclusion work aimed to study and gather the concepts and subsequently verify the accuracy of the results, viewed as Propositions, Theorems and Corollaries. Will be addressed in a formal way, but avoiding the details that are easily understood in the statements made, and trying hard to get to show clearly the operations used, so as that you can understanding how the results.

Key words: Sequences, series, convergence, divergence.

Sumário

Introdução

Este trabalho está dividido em quatro capítulos e um apêndice, onde serão abordadas diferentes questões que envolvem convergência e divergência de sequências e séries numéricas, e também resoluções de limites, que está envolvido em todos os tópicos deste trabalho. Além do apêndice foram colocados exemplos relacionados com o que foi abordado anteriormente para melhor fixação da ideia que foi dada.

No capítulo *História* mostramos um pouco da história do surgimento da *Análise real* (de onde surge o tema *Sequências e Séries Numéricas*), o porque da necessidade deste novo modo de escrita matemática e também da história de alguns dos principais matemáticos que contribuíram para o estudo e a construção do que será abordado.

No capítulo *Resultados básicos: Números Reais* o foco foi iniciar com os axiomas e conceitos preliminares necessários, relações de supremo e ínfimo de conjuntos, que serão utilizados no decorrer do trabalho, definindo o corpo dos Números Reais que é o ambiente matemático em que está inserido Sequências e Séries Numéricas.

No capítulo *Sequências numéricas* demos ênfase para o que realmente é o objetivo deste trabalho (reunir e verificar conceitos), com a preocupação de mostrar cada um dos resultados que foram postos em cheque como Proposições, Teoremas, Corolários, Lemas e Propriedades.

No capítulo *Séries numéricas* nos detivemos em mostrar como fazer a verificação da convergência ou divergência de séries numéricas por meio de testes e critérios que foram explicitados e demonstrados ao longo do capítulo.

Capítulo 1

Uma Breve História

Neste capítulo, faremos um breve comentário sobre a história da Análise Real como um todo, mas enfatizando o tópico de sequências e séries numéricas e a história dos principais matemáticos que contribuiram com resultados importantes que serão vistos no decorrer deste trabalho.

Devemos ter em mente que análise real é o ramo da análise matemática que lida com o conjunto dos números reais e as funções reais. A análise real é um tópico novo da matemática que surgiu da necessidade de prover provas rigorosas às ideias intuitivas do cálculo tais como continuidade, limite, derivadas, integrais e sequências de funções. Essas provas rigorosas seguiram do fato de que com o passar dos anos se tornou necessário o cuidado com a linguagem em que os textos matemáticos estavam sendo escritos, por isso é necessária a utilização da linguagem formal para melhor estética exigida pelo rigor lógico.

Esse cuidado com a escrita é tido para evitar paradoxos e essa ideia foi introduzida em 1922 quando Adolf Fraenkel e Albert Skolem propuseram a troca da linguagem corrente pela linguagem formal nos textos matemáticos, sugerindo que fossem utilizados símbolos que conhecemos (como por exemplo os sinais de adição, subtração, implica, existe, para todo, entre outros que também serão muito utilizados nas demonstrações posteriormente) e expressões matemáticas para substituir, sintetizar e organizar as ideias das demonstrações dalí por diante.

Vários matemáticos tiveram participação importante nos tópicos da análise, mas nos deteremos a falar dos que tiveram participação nos tópicos números reais, sequências e séries numéricas, que é o objetivo principal para ser abordado neste trabalho. Veremos agora a história e a importância dos principais resultados dos matemáticos que contribuíram para estes tópico.

1.1 Giuseppe Peano

Giuseppe Peano nasceu em 27 de agosto de 1858 e morreu em 20 de abril de 1932, foi um matemático e filósofo italiano que ficou conhecido pelas suas contribuições à teoria dos conjuntos. Peano foi responsável pelos conhecidos *Axiomas de Peano* que dizem respeito aos axiomas de corpo que utilizaremos posteriormente neste trabalho.

1.2 Augustin Cauchy

Augustin Louis Cauchy foi um matemático francês que nasceu em 21 de agosto de 1789, em Paris e faleceu em 23 de maio de 1857 em sua cidade natal. Seguia os mandamentos da Igreja Católica e teve intensa participação na matemática na área de equações diferenciais, integração, combinatória, funções de variável complexa, álgebra, sequências e séries numéricas, que serão estudadas posteriormente.

1.3 Bernhard Bolzano

Bernhard Placius Jojann Nepomuk Bolzano, nasceu em Praga, Boêmia, atual República Tcheca, dia 5 de outubro de 1781 e morreu em 18 de dezembro de 1848 em Praga. Estudou matemática, filosofia e teologia, o que o levou a se tornar padre, mas tinha ideias contrárias às da igreja católica e também às condições sociais do império Austro-húngaro e, por isso, foi obrigado pelo imperador Franz I, da Áustria, a aposentar-se.

1.4 Karl Weierstrass

Karl Wilhelm Theodor Weierstrass, foi um matemático alemão que nasceu em 31 de outubro de 1815, em Ostenfelde e morreu em 19 de fevereiro de 1897 em Berlim. Weierstrass foi um dos pioneiros na Análise Matemática e foi professor de matemática da Universidade de Berlim e antes disso foi professor de Alemão, caligrafia, geografia e matemática em nível secundarista.

1.5 Gottfried Leibniz

Gottfried Wilhelm von Leibniz foi um matemático e filósofo alemão que nasceu em 1 de julho de 1646 em Leipzig e morreu em 14 de novembro de 1716 em Hannover. Teve participação em séries numéricas no estudo de séries alternadas e também é considerado um dos criadores do cálculo diferencial e integral. Leibniz é considerado um grande gênio matemático do século XVII e foi rival de Isaac Newton na invenção do cálculo.

Quando ainda era criança aprendeu latim e grego por conta própria e aos 12 anos já dominava o conhecimento da matemática, da filosofia, da teologia e das leis publicadas pelos textos da época. Posteriormente, devido à pouca idade, foi-lhe negado o grau de doutor em leis na Universidade de Leipzig e logo após se mudou para Nuremburg, onde escreveu sobre o ensino de leis pelo método histórico e daí pra frente esteve engajado no serviço diplomático até sua morte.

Inventou uma máquina de calcular e por isso teve a oportunidade de exibir seus conhecimentos à Royal Society e após isso deixou Paris e, após ter descoberto o teorema fundamental do cálculo, se dirigiu para Hanover, onde trabalhou no serviço público, em uma biblioteca, e arranjou tempo para escrever artigos sobre todos os temas que já havia estudado.

Seus últimos sete anos de vida foram amargurados pela polêmica com relação a Newton e a criação do cálculo e como consequência disso foi marginalizado em Hanoveer e conta a história de que no dia de seu funeral apenas seu fiel secretário compareceu.

1.6 Niels Abel

Niels Henrik Abel morreu de tuberculose e subnutrição aos 26 anos de idade e suas obras somente foram avaliadas após sua morte.

Abel nasceu em Findo, na Noruega, onde seu pai era pastor religioso, em 1802. Em 1824 demonstrou a impossibilidade de estabelecer a solução da equação quíntica geral, acabando com um problema que estava sendo estudado e não solucionado por vários matemáticos. Como consequência deste trabalho obteve uma bolsa de estudos e viajou para a Alemanha, Itália e França. Durante este período escreveu vários artigos em diferentes tópicos da matemática, como por exemplo sobre a convergência de séries infinitas.

1.7 Jean D'Alembert

Jean Le Round D'Alembert foi um matemático e físico que nasceu em 17 de novembro de 1717 em Paris e morreu em 29 de outubro de 1783 em sua cidade natal. Assim que nasceu foi abandonado por sua mãe na igreja de St. Jean Le Round, de onde foi a inspiração para seu nome, e foi adotado por Louis-Camus Destouches e posteriormente foi entregue a Mme Rousseau. Logo após ver que o menino era um gênio, sua mãe biológica quis tê-lo de volta, mas ele a renegou.

D'Alembert participou da edição da primeira enciclopédia e fez importantes descobertas em vários campos da matemática e um deles foi em séries numéricas, onde fez o estudo de um dos testes de convergência que é conhecido como teste da razão ou também como teste de D'Alembert.

1.8 Richard Dedekind

Julius Wilhem Richard Dedekind foi um matemático alemão que nasceu em 6 de outubro de 1831, em Braunschweig. Dedekind idealizou os *Cortes de Dedekind* onde ele garante a existência de um corpo ordenado completo e também é famoso na Análise Matemática pelo *Postulado de Dedekind*, que será estudado posteriormente.

Dedekind foi um dos matemáticos que tiveram grande importância no século XIX e que contribuiu para a construção dos números reais. Estudou em Gottingen, onde foi aluno de Gauss e Dirichlet. em 1858 foi professor em Zurique e em 1862 foi transferido para lecionar em Braunschweig, sua terra natal e permaneceu até sua morte.

Capítulo 2

Resultados Básicos: Números Reais

Neste capítulo, falaremos de maneira formal, evitando detalhes, sobre alguns conceitos iniciais onde serão estudados os números reais, várias de suas propriedades e suas consequências, com definições que serão necessárias para o entendimento dos capítulos posteriores no desenrolar das demonstrações.

Definição 2.1. *(Corpo) Um corpo é um conjunto munido de duas operações*

$$+ : F \times F \to F,$$

que a cada dois valores de F, $(x, y) \in F$ associa um valor $x + y \in F$ e

$$\cdot : F \times F \to F,$$

que a cada dois valores de F, $(x, y) \in F$ associa um valor $x \cdot y \in F$ (que convencionamos escrever somente $xy \in F$, ocultando o $\cdot$), denominadas adição e multiplicação denotado por $(F, +, \cdot)$.

Para que F seja um corpo, suas operações precisam satisfazer os seguintes axiomas:

Axiomas da adição

A1) Associatividade: Sejam x, y e z valores quaisquer tais que $x, y, z \in F$, então

$$(x + y) + z = x + (y + z);$$

A2) Comutatividade: Sejam x, y e z valores quaisquer tais que $x, y, z \in F$, então

$$x + y = y + x;$$

A3) Elemento neutro: Existe $a \in F$ tal que $x + a = x$. Este elemento a será denotado por 0 e chama-se zero. Por comutatividade temos também que $a + x = x$.

A4) Simétrico: Todo elemento x, tal que, $x \in F$, possui um simétrico y tal que $y \in F$ e $x + y = 0$. Esse elemento y será denotado por $-x$, ou seja, $x + (-x) = 0$ e por comutatividade temos que $(-x) + x = 0$.

Axiomas da multiplicação

M1) Associatividade: Sejam x, y e z valores quaisquer, tais que, $x, y, z \in F$, então

$$(xy)z = x(yz);$$

M2) Comutatividade: Sejam x, y e z valores quaisquer tais que $x, y, z \in F$, então

$$xy = yx;$$

M3) Elemento neutro: Existe $a \in F$ tal que $xa = x$. Este elemento a será denotado por 1 e chama-se um. Por comutatividade temos também que $1x = x$;

M4) Inverso multiplicativo: Todo elemento $x \in F$ tal que $x \neq 0$ possui um inverso x^{-1}, onde $xx^{-1} = 1$. Por comutatividade também temos $x^{-1}x = 1$.

Observação 2.1. *O zero não possui inverso multiplicativo.*

Observação 2.2. *O conjunto em que está definida apenas uma dessas operações é chamado grupo abeliano.*

Em um corpo F temos, então, que as duas operações se relacionam, de onde surge o axioma a seguir.

D1) Distributividade: Dados $x, y, z \in K$, então $x(y + z) = xy + xz$. E por comutatividade

$$(y + z)x = yx + zx.$$

Segue da existência do simétrico que dados $x, y \in F$, existe $-y \in F$ e a soma $x+(-y) = c$, tal que $c \in F$, será indicada por $x - y = c$ que é uma operação chamada de subtração, e c será chamado de diferença entre x e y.

Exemplo 2.1. $\mathbb{Q} = \left\{ \dfrac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z} \text{ e } q \neq 0 \right\}$ é um corpo munido das operações de adição e multiplicação e é conhecido como conjunto dos números racionais.

Esses axiomas de corpo também são conhecidos como **axiomas de Peano**. Mostraremos agora as particularidades referentes a eles:

Propriedade 2.0.1. *O elemento neutro da adição (zero) é único.*

Demonstração: Por contradição, supomos $a \neq 0$ seja o elemento neutro, então

$$\begin{aligned} x + a &= x \\ (x + a) - x &= x - x \\ (a + x) - x &= 0 \\ a + (x - x) &= 0 \\ a + 0 &= 0 \\ a &= 0. \end{aligned}$$

Entrando em contradição, portanto o elemento neutro é único. ∎

Propriedade 2.0.2. *O simétrico é único.*

Demonstração: Sejam $x, y \in F$ e $y \neq -x$, supomos que y é o simétrico de x então

$$\begin{aligned} x + y &= 0 \\ (x + y) - x &= 0 - x \\ (y + x) - x &= -x \\ y + (x - x) &= -x \\ y + 0 &= -x \\ y &= -x. \end{aligned}$$

Entrando em contradição, portanto o simétrico é único. ∎

Segue então que é válida a **lei do corte para a adição**, ou seja, sejam $x, y, z \in F$ então $x + z = y + z$ se, e somente se, $x = y$.

De fato, pois

($\Rightarrow$)

$$\begin{aligned}
x+z &= y+z\\
(x+z)-z &= (y+z)-z\\
x+(z-z) &= y+(z-z)\\
x+0 &= y+0\\
x &= y.
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$)

$$\begin{aligned}
x &= y\\
x+z &= y+z.
\end{aligned}$$

Portanto é válida a lei do corte. $\blacksquare$

Dados $x, y \in F$ e $y \neq 0$ podemos escrever xy^{-1} da forma $\frac{x}{y}$, a operação chama-se divisão e o resultado chama-se quociente, dessa maneira temos que $\frac{x}{y} = z$ e $x = yz$, de onde surge a **lei do corte para a multiplicação**, onde temos $x, y, z \in F$ e $y, z \neq 0$ logo,

$$\begin{aligned}
xz &= yz\\
\frac{x}{y} &= \frac{z}{z}\\
\frac{x}{y} &= 1\\
x &= y.
\end{aligned}$$

Segue de $xy = x$ que temos duas situações:

i) Se $x \neq 0$, então $y = 1$, pela lei do corte;

ii) Se $x = 0$, então y pode ser qualquer elemento de F.

E de $xy = 1$, teremos que $x, y \neq 0$,

$$\begin{aligned}
xy &= 1\\
xyy^{-1} &= y^{-1}\\
x &= y^{-1}.
\end{aligned}$$

O que nos mostra que o inverso multiplicativo é único. $\blacksquare$

2.1 Corpo ordenado

Definição 2.2. *(Corpo ordenado) Corpo ordenado é um corpo F, no qual existe um subconjunto $P \subset F$, chamado o conjunto dos elementos positivos de F tal que:*

(P1) A soma e o produto de elementos positivos são positivos. Logo a operação é fechada e se $x, y \in P$, então $x + y,\ xy \in P$;

(P2) Dado $x \in F$, exatamente uma das três alternativas ocorre: ou $x = 0$, ou $x \in P$, ou $x \in -P$.

Dessa forma temos o conjunto $-P$ cujos elementos se chamam negativos e

$$F = P \cup (-P) \cup \{0\},$$

Sendo esses conjuntos todos disjuntos.

Além disso, dados dois elementos x, y tais que $x, y \in F$, sendo F um corpo ordenado,

$$x > y \text{ se, e somente se, } x - y \in P.$$

Podemos também escrever $y > x$ que as mesmas condições serão válidas.

Observação 2.3. *Se simbolizarmos $x \leq y$ quer dizer que $x < y$ ou $x = y$.*

Observação 2.4. *Se $x > 0$ então $x \in P$ e se $x < 0, x \in -P$ mas $-x > 0$ e $-x \in P$. Dessa forma, sempre que $x \in P$ e $y \in -P, x > y$.*

Dados $x, y \in F$ tais que $x < y$ então sendo F um corpo ordenado, F tem as seguintes propriedades:

O1) Transitividade: Se $x < y$ e $y < z$ então $x < z$;

Demonstração: Quando afirmamos que $x < y$ queremos dizer que $y - x \in P$ e $y < z$ implica que $z - y \in P$, como sabemos que a soma de elementos positivos é um elemento positivo, então, por (P1), $(z - y) + (y - x) \in P$, portanto $z - x \in P$ e $x < z$. ■

O2) Tricotomia: Sejam $x, y \in K$ ocorre uma das três situações, ou $x = y$, ou $x < y$, ou $x > y$;

Demonstração: Dados $x, y \in F$ então temos três opções:

i) $y - x = 0$;

ii) $y - x > 0$;

iii) $y - x < 0$.

Para (i) temos que $y - x = 0 \Rightarrow y = x$, para (ii) temos $y - x > 0 \Rightarrow y > x$ e para (iii), $y - x < 0 \Rightarrow y < x$. ■

O3) Monotonicidade da adição: Se $x < y$, então para todo $z \in K$, $x + z < y + z$;

Demonstração: Se $x < y$, então $y - x \in P$. Logo $y + z - z - x \in P$ e $(y + z) - (x + z) \in P$ portanto $x + z < y + z$. ■

Da mesma forma podemos somar duas desigualdades membro a membro e a desigualdade permanecerá, ou seja, se $x < y$ e $w < z$ então $x + w < y + z$.

O4) Monotonicidade da multiplicação: Se $x < y$ então para $z > 0$ temos $xz < yz$ e para $z < 0$ temos $xz > yz$.

Demonstração: se $x < y$ e $z > 0$ então $y - x \in P$ e $z \in P$. Sabemos que o produto de elementos positivos é positivo, então $(y - x)z \in P$ e $zy - zx \in P$, logo $zx < zy$. Com $z < 0$ temos que $-z > 0$ e $-z \in P$, portanto analogamente teremos
$(y - x)(-z) \in P \Rightarrow (x - y)z \in P \Rightarrow zx - zy \in P$. Portanto $zy < zx$. ■

Da mesma forma, se $0 < x < y$ e $0 < w < z$ então $xw < yz$. Além disso, se $x > 0$ e $y < 0$, então $xy < 0$, mostramos isso da seguinte forma: se $x > 0$ então $x \in P$ e se $y < 0$ teremos que $-y > 0$ e $-y \in P$, deste modo $x(-y) > 0 \Rightarrow -(xy) > 0 \Rightarrow xy < 0$.

Desigualdade de Bernoulli: Em todo corpo ordenado F, se $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$, vale $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

Demonstração: Para mostrar, faremos o uso do princípio da indução finita.

Se $n = 1$ temos,

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx$$

$$(1 + x)^1 \geq 1 + 1x$$

$$1 + x \geq 1 + x$$

Então, para $n = 1$ a afirmação é verdadeira. Supomos então que vale para $k \in \mathbb{N}$ e mostraremos que vale para o seu sucessor. De fato, tomemos $n = k + 1$, logo

$$(1 + x)^n = (1 + x)^{k+1} = (1 + x)(1 + x)^k$$

Mas, $(1 + x)^k \geq 1 + kx$, então

$$(1 + x)(1 + x)^k \geq (1 + kx)(1 + x)$$

Como

$$(1 + kx)(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2 = 1 + (k + 1)x + kx^2 \geq 1 + (k + 1)x$$

Pois $x \geq -1$. Portanto, por transitividade $(1 + x)^{k+1} \geq 1 + (k + 1)x$.
Logo, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \geq -1$. ■

Definição 2.3. *(Valor absoluto) Chamamos de valor absoluto de um número real x, ou módulo de x, o valor numérico deste número. Indicamos por $|x|$ e definimos como*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, se} \quad x \geq 0, \\ -x & \text{, se} \quad x < 0. \end{cases}$$

Teorema 2.1. *Sejam x, a elementos de um corpo ordenado K. As informações a seguir são equivalentes:*

i) $-a \leq x \leq a$

ii) $x \leq a$ e $-x \leq a$

iii) $|x| \leq a$

Demonstração: Queremos mostrar que de fato as três afirmações são equivalentes. Primeiramente analisamos que $-a \leq x \leq a$ pode ser escrito da forma $-a \leq x$ e $x \leq a$ o que implica que $-x \leq a$ e $x \leq a$ e também temos que se isso ocorre então $|x| \leq a$ (por propriedade de módulo), portanto as três afirmações são equivalentes ■

Teorema 2.2. *Seja c um real qualquer, então $|c| = \sqrt{c^2}$.*

Demonstração: A demonstração é feita em duas etapas:

i) $c \geq 0$;

Neste caso sabemos que de fato ocorre.

ii) $c < 0$;

Para $c < 0$ temos que $c^2 > 0$ e dessa forma

$$c^2 = |c|^2.$$

Assim, passando a raiz quadrada em ambos os membros temos,

$$\sqrt{c^2} = \sqrt{|c|^2} = |c|.$$

Portanto,

$$|c| = \sqrt{c^2}.$$

■

Teorema 2.3. *Sejam a e b reais positivos, tais que $a < b$, então $\sqrt{a} < \sqrt{b}$.*

Demonstração: Fazemos $x = \sqrt{a}$ e $y = \sqrt{b}$, dessa forma

$$x^2 = a \text{ e } y^2 = b.$$

Desde que $a < b$, então

$$x^2 < y^2,$$

logo

$$y^2 - x^2 > 0.$$

Assim,

$$y^2 - x^2 = (y - x)(y + x) > 0. \tag{2.1}$$

Como $x \in P$ e $y \in P$, para que (2.1) seja verdadeira devemos ter que

$$y - x \in P.$$

E assim

$$y - x > 0,$$

logo,

$$y > x$$

Portanto,

$$\sqrt{a} < \sqrt{b}$$

$$\blacksquare$$

Corolário 2.1. *Dados $a, x, b \in F$, tem-se $|x-a| \leq b$ se, e somente se, $a-b \leq x \leq a+b$.*

Demonstração: Queremos mostrar que $|x-a| \leq b \Leftrightarrow a-b \leq x \leq a+b$

($\Rightarrow$) Provemos então que $|x-a| \leq b \Rightarrow a-b \leq x \leq a+b$.

De fato temos que

$$\begin{aligned} |x-a| \leq b \quad &\Rightarrow -b \leq x-a \leq b \\ &\Rightarrow a-b \leq x \leq b+a \end{aligned}$$

Resta mostrar que $a-b \leq x \leq a+b \Rightarrow |x-a| \leq b$

($\Leftarrow$) Temos que

$$\begin{array}{rcl} a-b & \leq x \leq & a+b \\ -b & \leq x-a \leq & b \\ & |x-a| \leq & b \end{array}$$

$$\blacksquare$$

Teorema 2.4. *Para elementos arbitrários de um corpo ordenado K, valem as relações:*

i) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (Primeira desigualdade triangular)

ii) $|xy| = |x| \cdot |y|$ (Propriedade de módulo)

iii) $|x| - |y| \leq ||x| - |y|| \leq |x-y|$ (Segunda desigualdade triangular)

iv) $|x-z| \leq |x-y| + |y-z|$

Demonstração: (i) Se afirmarmos que $|x| \leq |x|$ podemos escrever da forma $-|x| \leq x \leq |x|$, analogamente podemos fazer para y e teremos então que

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

e

$$-|y| \leq y \leq |y|.$$

Dessa forma se somarmos as desigualdades teremos

$$\begin{aligned} -|x|-|y| &\leq x+y \leq & |x|+|y| \\ -(|x|+|y|) &\leq x+y \leq & |x|+|y| \\ |x+y| &\leq & |x|+|y|. \end{aligned}$$

■

(ii) Sabemos que $x^2 = |x|^2$ para qualquer $x \in F$, logo

$$|xy|^2 = (xy)^2 = x^2y^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 = (|x| \cdot |y|)^2.$$

Então temos que $|xy| = \pm|x| \cdot |y|$ mas como $|xy|$ e $|x| \cdot |y|$ são não negativos então

$$|xy| = |x| \cdot |y|.$$

■

(iii) Podemos dizer que $|x| = |x+y-y| = |(x-y)+y|$ e sabemos que $|(x-y)+y| \leq |x-y|+|y|$, logo $|x| \leq |x-y|+|y|$ e $|x|-|y| \leq |x-y|$. Seguindo o mesmo raciocínio temos $|y|-|x| \leq |y-x|$ e $|y|-|x| \leq |x-y|$, dessa forma $|x-y| \geq |x|-|y|$ e $|x-y| \geq -(|x|-|y|)$ então

$$||x|-|y|| \leq |x-y|$$

■

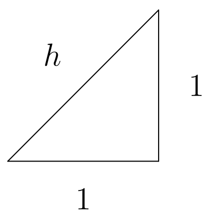
(iv) Sabemos que $x-z = (x-y)+(y-z)$ e $|x-z| = |(x-y)+(y-z)|$, portanto

$$|x-z| \leq |x-y|+|y-z|$$

■

Lema 2.1. *A hipotenusa de um triângulo retângulo isósceles cujos catetos medem* 1 *não é racional.*

Demonstração:



Seja h a hipotenusa do triângulo retângulo isósceles, suponhamos por contradição que h seja um número racional, isto é,

$$h = \frac{p}{q}$$

com p, q primos entre si, com $q \neq 0$.

Pelo Teorema de Pitágoras sabemos que

$$h^2 = 1^2 + 1^2$$

ou seja,

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$$

logo,

$$p^2 = 2q^2. \tag{2.2}$$

Logo, p^2 é um número par.

Afirmação: Se p^2 é par, então p é par.

Para mostrarmos esta afirmação, verificaremos a sua contra positiva, isto é, vamos mostrar que se p é impar, então p^2 é impar.

Com efeito, sendo p impar temos que

$$p = 2k + 1, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado teremos

$$p^2 = (2k+1)^2 = 2(2k^2 + 2k) + 1.$$

Chamamos $(2k^2 + 2k) = r$, dessa forma

$$p^2 = 2r + 1$$

ou seja, p^2 também é impar.

Portanto, se p^2 é par segue-se que p é par. Assim,

$$p = 2t, \forall k \in \mathbb{Z}$$

logo, substituindo em (2.2) encontramos

$$(2t)^2 = 2q^2$$

dessa forma,

$$q^2 = 2t^2$$

Logo q^2 é par e assim q é par.

Encontrames então que p e q são pares, mas por hipótese p e q são primos entre si, portanto chegamos em uma contradição e encontramos que $h \notin \mathbb{Q}$. ∎

2.2 Supremo e Ínfimo

A seguir daremos algumas definições importantes para a compreenssão dos conceitos de supremo e ínfimo, bem como alguns exemplos para melhor entendimento dos mesmos.

No que segue, consideremos $A \subset F$ um subconjunto de F.

Definição 2.4. *(Máximo de um conjunto) Seja F um conjunto em um corpo ordenado K. Diz-se que F possui um máximo (maior elemento), denotado por $t_0 = \max(F)$, se:*

i) $t_0 \in F$;

ii) para cada $s \in F$ *tem-se que* $s \leq t_0$.

Definição 2.5. *(Mínimo de um conjunto) Seja F um conjunto em um corpo ordenado K. Diz-se que F possui um mínimo (menor elemento), denotado por $s_0 = \min(F)$, se:*

i) $s_0 \in F$;

ii) para cada $s \in F$ *tem-se que* $s_0 \leq s$.

Definição 2.6. *(Cota superior) Sejam F um corpo ordenado e $A \subset F$. Diz-se que $\beta \in F$ é uma cota superior do conjunto A se*

$$a \leq \beta, \text{ para todo } a \in A.$$

Definição 2.7. *Diz-se que um subconjunto A de um corpo ordenado F é limitado superiormente se ele possuir uma cota superior.*

Definição 2.8. *(Cota inferior) Sejam F um corpo ordenado e $A \subset F$. Diz-se que $\alpha \in F$ é uma cota inferior do conjunto A se*

$$\alpha \leq a, \textit{ para todo } a \in A.$$

Definição 2.9. *Diz-se que um subconjunto A de um corpo ordenado F é limitado inferiormente se ele possuir uma cota inferior.*

Definição 2.10. *Um subconjunto A de um corpo ordenado F é limitado se ele for limitado superiormente e inferiormente.*

Definição 2.11. *(Supremo) Chama-se supremo do subconjunto A um elemento $x \in F$ tal que x satisfaz as seguintes condições*

i) x é cota superior de A, isto é

$$x \leq a, \ \forall a \in A.$$

ii) x é a menor das cotas superiores de A, isto é, se $y \in F$ é cota superior de A, então

$$x \leq y.$$

Definição 2.12. *(Ínfimo) Chama-se ínfimo do subconjunto A um elemento $x \in F$ tal que x satisfaz as seguintes condições*

i) x é cota inferior de A, isto é

$$b \leq x, \ \forall a \in A.$$

ii) x é a maior das cotas inferiores de A, isto é, se $z \in F$ é cota superior de A, então

$$z \leq x.$$

Observação 2.5. *Se $X \subset F$ e $X = \varnothing$ então todo elemento de F será cota superior de X e como todo elemento de F é cota superior de X não podemos definir um elemento que seja o menor dentre os outros. Portanto $\varnothing$ não possui supremo e o mesmo raciocínio se aplica para concluir que não possui ínfimo.*

Exemplo 2.2. Dados os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $A \subset \mathbb{Q}$, tal que $A = \{1, 2, 3, 4\}$, então

$$\min A = 1, \quad \text{cota superior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 4\}, \quad \sup A = 4$$
$$\max A = 4, \quad \text{cota inferior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 1\}, \quad \inf A = 1$$

Exemplo 2.3. Dados os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $A \subset \mathbb{Q}$, tal que $A = \{\cdots, -3, -2, -1, 0\}$, então

$$\begin{array}{lll} \min A = \nexists, & \text{cota superior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}, & \sup A = 0 \\ \max A = 0, & \text{cota inferior de } A = \nexists, & \inf A = \nexists \end{array}$$

Exemplo 2.4. Dados os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $A \subset \mathbb{Q}$, tal que $A = \mathbb{N}$, então

$$\begin{array}{lll} \min A = 1, & \text{cota superior de } A = \nexists, & \sup A = \nexists \\ \max A = \nexists, & \text{cota inferior de } A = 1, & \inf A = 1 \end{array}$$

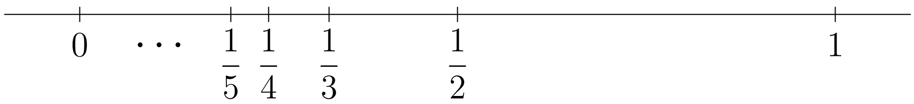
Exemplo 2.5. Dados os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $A \subset \mathbb{Q}$, tal que $A = \{\cdots, -3, -2, -1, 0\}$, então

$$\begin{array}{lll} \min A = \nexists, & \text{cota superior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\}, & \sup A = 0 \\ \max A = 0, & \text{cota inferior de } A = \nexists, & \inf A = \nexists \end{array}$$

Exemplo 2.6. Dados os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $A \subset \mathbb{Q}$, tal que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 \leq x < 2\}$, então

$$\begin{array}{lll} \min A = 1, & \text{cota superior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 2\}, & \sup A = 2 \\ \max A = \nexists, & \text{cota inferior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}, & \inf A = 1 \end{array}$$

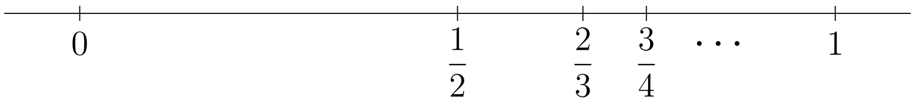
Exemplo 2.7. Dados os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $A \subset \mathbb{Q}$, tal que $A = \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, podemos notar que A é da forma $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \cdots\right\}$



Logo, os elementos de A estão ordenados de forma decrescente e

$$\begin{array}{lll} \min A = \nexists, & \text{cota superior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\} & \sup A = 1 \\ \max A = 1, & \text{cota inferior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 0\} & \inf A = 0 \end{array}$$

Exemplo 2.8. Dados os conjuntos $\mathbb{R}$ e $A \subset \mathbb{R}$, tal que $A = \left\{\frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$, podemos notar que A é da forma $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots\right\}$.



Logo, os elementos de A estão ordenados de forma crescente e

$$\begin{array}{lll} \min A = \frac{1}{2}, & \text{cota superior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}, & \sup A = 1 \\ \max A = \nexists, & \text{cota inferior de } A = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq \frac{1}{2}\right\}, & \inf A = \frac{1}{2} \end{array}$$

Exemplo 2.9. Dados os conjuntos $\mathbb{Q}$ e $A \subset \mathbb{Q}$, tal que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid 1 < x < 2\}$, então

$$\begin{array}{lll} \min A = \nexists, & \text{cota superior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 2\}, & \sup A = 2 \\ \max A = \nexists, & \text{cota inferior de } A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geq 1\}, & \inf A = 1 \end{array}$$

Já vimos no Lema 2.1 que existem elementos que não pertencem ao conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais, ou seja, ele não consegue preencher todos os pontos da reta pois $\sqrt{2}$ é um ponto da reta numérica, mas $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Dessa deficiência, da não-completeza dos números racionais, surge a necessidade de construir um novo conjunto em que os elementos que a ele pertencem são exatamente os que não pertencem a $\mathbb{Q}$, em que a união desses dois conjuntos consegue preencher toda a reta real. Essa construção foi feita pela primeira vez de maneira rigorosa pelo matemático Richard Dedekind e seu estudo ficou conhecido como *Cortes de Dedekind*.

Dessa forma, devemos analisar o exemplo a seguir para compreender o resultado que será visto porteriormente.

Exemplo 2.10. Seja o conjunto A, tal que

$$A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2 \text{ e } x > 0\}$$

sabemos pelo Lema 2.1 que A não possui supremo em $\mathbb{Q}$ pois não existe um racional x tal que $x^2 = 2$. Como temos que $x > 0$ e $x \in \mathbb{Q}$, sabemos que

$$x^2 < 2 \text{ ou } x^2 > 2$$

Tomemos então a primeira afirmação e assumimos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

Dessa forma encontramos que

$$\begin{aligned} x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} &< 2 \\ n^2x^2 + 2xn + 1 &< 2n^2 \\ (x^2 - 2)n^2 + 2xn + 1 &< 0 \end{aligned}$$

E temos então uma expressão do segundo grau em que o coeficiente do termo de maior grau é $(x^2 - 2)$, que é um número negativo pois $x^2 < 2$, então, existe um n suficientemente grande de forma que o polinômio seja negativo. É suficiente tomar n maior que a maior raiz do polinômio e teremos

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 < 2$$

E como x e $\frac{1}{n}$ são racionais positivos, então sua soma também o é e pertence a A e nenhum desses elementos será cota superior de A.

Tomamos agora $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x > 0$ e $x^2 > 2$, dessa forma x é cota superior de A e podemos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 > 2$$

como já foi visto podemos tomar essa desigualdade como

$$(x^2 - 2)n^2 + 2xn + 1 > 0.$$

E teremos que $(x^2 - 2) > 0$ e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que a desigualdade é satisfeita. Desse modo, qualquer $x \in \mathbb{Q}$ tal que $x^2 > 2$ não pode ser cota superior de A e concluimos que A não possui supremo em $\mathbb{Q}$.

Observação 2.6. *O Exemplo 2.10 nos mostra que existem subconjuntos dos números que são limitados superiormente, porém não possuem supremo. Tal caracteristica nos leva à conclusão de que o conjunto* $\mathbb{Q}$ *não é completo.*

Iremos então introduzir o corpo dos números reais pelo seguinte postulado:

Postulado de Dedekind Existe um corpo ordenado $\mathbb{R}$, chamado *corpo dos números reais*, com $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, tal que todo subconjunto não vazio de $\mathbb{R}$, limitado superiormente, possui supremo em $\mathbb{R}$.

Notação: Denotamos por $\mathbb{I}$ ou $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ o conjunto complementar de $\mathbb{Q}$ que completa os números reais e chamamos de *Irracionais*.

Proposição 2.1. *Se um subconjunto de* $\mathbb{R}$ *for limitado inferiormente então possui ínfimo.*

Demonstração: Queremos mostrar que dado um subconjunto A de $\mathbb{R}$, limitado inferiormente, A possui ínfimo.

Sabemos que se A é limitado inferiormente, assim, seja x uma cota inferior de A. Desta forma,

$$x \leq a, \text{ para todo } a \in A$$
$$\text{e}$$
$$-x \geq -a, \text{ para todo } a \in A. \tag{2.3}$$

Considere $-A$ o seguinte
$$-A = \{-a \mid a \in A\}.$$

Segue de (2.3) que $-A$ é limitado superiormente e $-x$ é cota superior de $-A$, assim, pelo postulado de Dedekind, $-A$ possui supremo. Daí segue que $\sup(-A) = -\inf(A)$.

Mostremos que de fato isso acontece.

Faremos $\sup(-A) = \alpha$, então $\alpha \geq -a$ e $-\alpha \leq a$ para todo $a \in A$, logo $-\alpha$ é cota inferior de A. Para que $-\alpha$ seja o infimo, devemos mostrar que ele é a maior das cotas inferiores.

Seja β uma cota inferior de A, ou seja, $\beta \leq a$, para todo $a \in A$. Da mesma forma que $-\beta \geq -a$, para todo $a \in A$ e $-\beta$ será cota superior de $-A$. Logo, $-\beta \geq \alpha$ e $\beta \leq -\alpha$, ou seja $-\alpha$ será a maior das cotas inferiores de A. Portanto, todo conjunto limitado inferiormente, diferente do vazio, possui ínfimo. ∎

Proposição 2.2. *O conjunto dos números naturais não é limitado superiormente.*

Demonstração: Supomos por contradição que o conjunto dos números naturais seja limitado superiormente, pelo postulado de Dedekind $\mathbb{N}$ possuiria supremo, que chamaremos de α, logo $n \leq \alpha$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então se $n \in \mathbb{N}, (n+1) \in \mathbb{N}$ e $(n+1) \leq \alpha$ e $n \leq \alpha - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ dessa forma teríamos que $\alpha - 1$ é cota superior de $\mathbb{N}$ o que é uma contradição pois α é supremo de $\mathbb{N}$. Portanto $\mathbb{N}$ é ilimitado superiormente. ∎

Proposição 2.3. *(Propriedade Arquimediana) Dados números reais $0 < a < b$, existe um número natural n de forma que $b < an$.*

Demonstração: Queremos mostrar que dados números reais $0 < a < b$, existe um número natural n tal que $b < an$. Para isso vamos supor por contradição que $an \leq b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Isso implicaria que o conjunto $A = \{an \mid n \in \mathbb{N}\}$ seria limitado superiormente e possuiria supremo, que indicaremos por α. dessa forma $an \leq \alpha$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mas se estamos trabalhando com $n \in \mathbb{N}$ então o seu sucessor $(n+1)$ também vai existir e $(n+1)a \leq \alpha$. Logo

$$\begin{aligned}(n+1)a &\leq \alpha\\ an+a &\leq \alpha\\ an &\leq \alpha - a.\end{aligned}$$

Dessa forma encontramos que A é limitado superiormente por $\alpha - a$ o que é uma contradição pois afirmamos que A era limitado superiormente por α. Logo $b < an$. ■

Definição 2.13. *Um subconjunto A de $\mathbb{R}$ é denso em $\mathbb{R}$ se para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$ existe $x \in A$ tal que $a < x < b$.*

Teorema 2.5. *O conjunto $\mathbb{Q}$ dos números racionais e o conjunto $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ dos números irracionais são ambos densos em $\mathbb{R}$.*

Demonstração: Veremos primeiramente que $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, para isso sejam $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$, então $b - a > 0$. Segue da propriedade Arquimediana que existe um número natural q tal que $q(b-a) > 1$, então $qb - qa > 1$.

O que nos diz que o intervalo (qa, qb) possui comprimento maior que 1, logo existe $p \in \mathbb{Z}$ tal que $qa < p < qb$ o que implica que $a < \frac{p}{q} < b$, portanto, para todo $a, b \in \mathbb{R}$, existe $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ tal que $a < \frac{p}{q} < b$, logo existe um racional entre dois números reais e $\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.

Resta mostrar que $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$, novamente consideramos o intervalo (a, b) e vamos mostrar que existe um elemento de $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ neste intervalo. Para isso tomamos $p \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{p} < \frac{b-a}{\sqrt{2}}$, ou seja $\frac{\sqrt{2}}{p} < b-a$, pois $\frac{\sqrt{2}}{p}$ é um elemento de $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$. Tomamos então os números da forma $\frac{m\sqrt{2}}{p}$, onde $m \in \mathbb{Z}^*$, esses números dividirão a reta real em m partes de tamanho $\frac{\sqrt{2}}{p}$ e como $\frac{2}{p} < b - a$ então existe um $m_0 \in \mathbb{Z}$ tal que $\frac{m_0\sqrt{2}}{p}$ está no intervalo (a, b) e por isso $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$. ■

Definição 2.14. *(Vizinhança) Dado um número L qualquer, chama-se vizinhança ε de L a todos os números x do intervalo $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ o qual é denotado por $V_\varepsilon(L)$.*

Temos então que uma vizinhança desta forma é escrita da seguinte forma:

$$|x - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < x - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < x < L + \varepsilon$$

Definição 2.15. *(Ponto de acumulação) Seja A um subconjunto de $\mathbb{R}$. Diz-se que $x \in \mathbb{R}$ é ponto de acumulação de A se todo intervalo da forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ contém um ponto de A diferente de x, qualquer que seja $\varepsilon > 0$.*

Capítulo 3

Sequências Numéricas

Um problema fundamental em cálculo consiste em obter, por exemplo, os valores de expressões do tipo

$$\sin x, e^x, \ln x, \cdots x \in \mathbb{R}$$

ou valores de outras funções transcendentes.

As séries numéricas podem ser usadas para obter valores funcionais de uma certa função $f(x)$, portanto é necessário que saibamos interpretá-los, para saber seu significado preciso.

Para tal entendimento devemos primeiramente estudar as chamadas *Sequências ou sucessões numéricas*, assunto que tratamos neste capítulo.

Definição 3.1. *Sequência numérica (ou sucessão numérica) é uma função definida no conjunto dos números naturais e tomando valores reais, em que cada n natural associa a um número real.*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & a(n) \end{array}$$

Observação 3.1. *O valor de $a(n)$ será representado por a_n e será denominado de n-ésimo termo ou termo geral da sequência, onde n é a ordem do termo em questão.*

A partir de tal informação, tomaremos sempre n um número natural.

Notação: Uma sequência é indicada por $(a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots)$ ou simplesmente (a_n) e o conjunto de seus termos é dado por $a(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$.

Exemplo 3.1. $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right)$ possui como termo geral $a_n = \frac{1}{n}$ e $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\right\}$ é seu conjunto de valores.

Exemplo 3.2. A sequência $(1, -1, 1, -1, 1, -1, \cdots)$ tem como termo geral $a_n = (-1)^{n+1}$ e seu conjunto de valores é $\{-1, 1\}$.

3.1 Sequência Limitada

Definição 3.2. *Dizemos que uma sequência (a_n) é limitada quando o conjunto de seus termos é limitado, ou seja, existem K e M, números reais, tais que $K \leq a_n \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 3.3. *Uma sequência é dita:*

i) Limitada superiormente quando o conjunto dos seus termos $a(\mathbb{N})$ é limitado superiormente, ou seja, existe um número real M tal que

$$a_n \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

ii) Limitada inferiormente quando o conjunto dos seus termos $a(\mathbb{N})$ é limitado inferiormente, ou seja, existe um número real K tal que

$$K \leq a_n, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

iii) Limitada quando é limitada superiormente e inferiormente, ou, se existe $k > 0$ tal que

$$|a_n| \leq k, \ \forall n \in \mathbb{N}, \text{ ou seja } -k < a_n < k, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Exemplo 3.3. A sequência $(a_n) = 3$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem como conjunto dos seus termos

$$a(\mathbb{N}) = \{3\}.$$

Que é limitado, logo (a_n) é limitada.

Exemplo 3.4. A sequência $(a_n) = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem o conjunto dos seus termos

$$a(\mathbb{N}) = \{1, 2, 3, \cdots\}$$

Que é limitado inferiormente mas não superiormente.

Exemplo 3.5. A sequência (a_n) tal que o conjunto de seus termos é dado por

$$a_n = \{0, -1, -2, -3, \cdots\}$$

Limitado superiormente mas não inferiormente.

Exemplo 3.6. A sequência $(a_n) = \dfrac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem como conjunto dos seus termos

$$a(\mathbb{N}) = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots\}$$

Que é limitado pois seus termos estão entre $0 < \dfrac{1}{n} \leq 1$.

Definição 3.4. *Dizemos que uma sequência tem limite L ou converge para um número L se, dado qualquer número $\varepsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que*

$$|a_n - L| < \varepsilon, \forall n > n_0$$

Que equivalentemente, utilizando definição vizinhança teríamos

$$a_n \in V_\varepsilon(L)$$

$$-\varepsilon < a_n - L < \varepsilon$$

$$L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon,\ \forall n > n_0.$$

Notação: Escrevemos $a_n \to L$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ou simplesmente $\lim a_n = L$.

3.2 Limite de uma Sequência

Definição 3.5. *(Sequência convergente) Dizemos que a sequência (a_n) é convergente se* $\lim a_n$ *existe, e é finito.*

Observação 3.2. *Uma sequência que não é convergente é dita divergente.*

Teorema 3.1. *(Unicidade do limite) O limite de uma sequência é único.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência convergente, supomos, por contradição, que existem L_1 e L_2, números reais tais que

$$\lim a_n = L_1 \text{ e } \lim a_n = L_2$$

Por definição temos que dado $\varepsilon > 0$, existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_n - L_1| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_1 \tag{3.1}$$

analogamente,

$$|a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n \geq n_2 \tag{3.2}$$

somando (3.1) e (3.2) temos

$$|a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \tag{3.3}$$

Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos que $n_0 \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma,

$$\begin{aligned}
|L_1 - L_2| &= |a_n - a_n + L_1 - L_2| \\
&= |(a_n - L_2) + (L_1 - a_n)| \\
&= |(a_n - L_2) + (-1)(a_n - L_1)| \\
&\leq |(a_n - L_2)| + |(-1)(a_n - L_1)|
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|(a_n - L_2)| + |(-1)(a_n - L_1)| &= |a_n - L_2| + |-1| \cdot |a_n - L_1| \\
&= |a_n - L_2| + |a_n - L_1| \\
&= |a_n - L_1| + |a_n - L_2|
\end{aligned}$$

Portanto,

$$|L_1 - L_2| \leq |a_n - L_1| + |a_n - L_2|,$$

mas, por (3.3)

$$|a_n - L_1| + |a_n - L_2| < \varepsilon,$$

então por transitividade,

$$|L_1 - L_2| < \varepsilon$$

E como $\varepsilon > 0$ e é suficientemente pequeno,

$$L_1 - L_2 = 0 \Rightarrow L_1 = L_2$$

■

Exemplo 3.7. Seja $a_n = (-1)^{n+1}$, note que para $n = 2k$

$$\lim a_n = 1$$

para $n = 2k + 1$

$$\lim a_n = -1$$

Logo $\lim a_n$ não existe e portanto (a_n) é uma sequência divergente.

O Teorema a seguir nos fornece uma importante e interessante propriedade das sequências convergentes.

Teorema 3.2. *Toda sequência convergente é limitada.*

<u>*Demonstração:*</u> Queremos mostrar que, dada uma sequência convergente ela será limitada. Para isso, seja (a_n) uma sequência convergente com $\lim a_n = L$, então para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n > n_0$.
Mas temos que, utilizando o conceito de vizinhança,

$$\begin{aligned} |a_n - L| < \varepsilon \quad &\Rightarrow -\varepsilon < a_n - L < \varepsilon \\ &\Rightarrow L - \varepsilon < L + \varepsilon. \end{aligned}$$

Ou seja, a partir de um índice n a sequência (a_n) é limitada pela direita por $L+\varepsilon$ e pela esquerda por $L - \varepsilon$. Resta agora mostrar que a sequência também será limitada para $m < n$, de fato, para isto temos uma sequência finita de números tais que,

$$a_1, a_2, \cdots, a_m < a_n$$

E englobamos também os valores $L - \varepsilon$ e $L + \varepsilon$ e chamamos de um conjunto X

$$X = \{a_1, a_2, \cdots, a_m, L - \varepsilon, L + \varepsilon\}$$

Tomamos então $A = \max(X)$ e $B = \min(X)$. Portanto, se existe um elemento mínimo e um elemento máximo, a sequência (a_n) é limitada e

$$B \leq a_n \leq A.$$

■

Exemplo 3.8. A sequência constante $(a, a, a, \cdots)$, em que $a_n = a$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é convergente e seu limite é o próprio a. Basta observar que, para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

De fato, para qualquer $\varepsilon > 0$ dado temos que

$$|a_n - a| = |a - a| = 0 < \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$$

Exemplo 3.9. Para a sequência $a_n = \dfrac{1}{n}$ temos que

$$\lim_{n \to \infty} a_n = 0.$$

De fato, usando a Propriedade Arquimediana, para um dado $0 < \varepsilon < 1$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n_0 \varepsilon > 1$$

Daí, para $n \geq n_0$ natural, segue que

$$n\varepsilon \geq n_0 \varepsilon > 1$$

logo,

$$n\varepsilon > 1, \forall n \geq n_0$$

assim,

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Portanto,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

e $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Exemplo 3.10. Mostrar que $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

Note que

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| = \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Portanto,

$$\left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

3.3 Propriedades Operatórias de Limites

Propriedade 3.3.1. *Se (a_n) e (b_n) são duas sequências convergentes, então a sucessão (a_n+b_n) é convergente e*

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$, tomemos $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$, tais que

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_1$$

e

$$|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \geq n_2.$$

O que queremos provar então é que

$$\lim(a_n + b_n) = a + b.$$

Por definição de limite temos que isso implica que dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.$$

De fato, temos, por comutatividade, vem que

$$|(a_n + b_n) - (a + b)| = |(a_n - a) + (b_n - b)|.$$

E, pela primeira desigualdade triangular,

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| \leq |a_n - a| + |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$|(a_n - a) + (b_n - b)| < \varepsilon, \forall n \geq n_0,$$

onde $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$.

Portanto, $(a_n + b_n)$ é convergente e

$$\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n = a + b$$

$\blacksquare$

Observação 3.3. *Se (a_n) e (b_n) forem divergentes, $(a_n + b_n)$ pode, ou não, divergir.*

Teorema 3.3. *(Regra do sanduíche) Sejam* $a_n \leq c_n \leq b_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se* $\lim a_n = \lim b_n = A$ *então* $\lim c_n = A$.

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que $|a_n - A| < \varepsilon$, para todo $n > n_1$, então por definição de vizinhança temos que

$$|a_n - A| < \varepsilon, \; \forall n > n_1$$

$$-\varepsilon < a_n - A < \varepsilon, \; \forall n > n_1$$

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \; \forall n > n_1,$$

logo, $a_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

De modo análogo encontramos que $b_n \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon)$.

Como por hipótese temos que $a_n \leq c_n \leq b_n$, mas $A - \varepsilon < a_n$ e $b_n < A + \varepsilon$, logo

$$A - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < A + \varepsilon.$$

Portanto,

$$A - \varepsilon < c_n < A + \varepsilon, \forall n > n_1$$

$$-\varepsilon < c_n - A < \varepsilon, \forall n > n_1$$

$$|c_n - A| < \varepsilon, \forall n > n_1.$$

Por definição, temos então que $\lim c_n = A$. ■

Propriedade 3.3.2. *Se* (a_n) *e* (b_n) *são duas sequências convergentes, então a sequência* $(a_n \cdot b_n)$ *é convergente e*

$$\lim(a_n \cdot b_n) = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

Demonstração: Seja $\varepsilon > 0$, tomemos $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ então,

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab|.$$

Pela primeira desigualdade triangular temos,

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leq |a_n b_n - ab_n| + |ab_n - ab|$$

Dessa forma teremos que

$$
\begin{aligned}
|a_nb_n - ab_n| + |ab_n - ab| &= |b_n(a_n - a)| + |a(b_n - b)| \\
&= |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b|.
\end{aligned}
$$

Sabendo que (b_n) é convergente, então é limitada e existe $k > 0$ tal que $|b_n| < k$,

$$|b_n| \leq k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como assumimos que, dado $\varepsilon > 0$, e $\lim a_n = a, \lim b_n = b$ então existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$k|a_n - a| \Rightarrow |a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2k}, \forall n \geq n_1$$

e

$$|a| \cdot |b_n - b| \Rightarrow |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot |a|}, \forall n \geq n_2.$$

Assumindo $a \neq 0$ e $n > n_0 = \max\{n_1, n_2\}$,

$$|a_nb_n - ab| \leq |b_n| \cdot |a_n - a| + |a| \cdot |b_n - b| < k\frac{\varepsilon}{2k} + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot |a|} = \varepsilon$$

portanto,

$$|a_nb_n - ab| < \varepsilon.$$

Por definição de limite de sequência encontramos que

$$|a_nb_n - ab| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

e portanto

$$\lim(a_nb_n) = ab = \lim a_n \cdot \lim b_n.$$

■

Observação 3.4. *Como consequência das propriedades anteriores temos*

$$\lim(-a_n) = -\lim a_n \Rightarrow \lim(a_n - b_n) = \lim a_n - \lim b_n$$

Propriedade 3.3.3. *Caso a sequência (b_n) seja constante, indicamos ela por b e a sequência $(b \cdot a_n)$ é convergente para toda sequência a_n convergente, e*

$$\lim(b \cdot a_n) = b \cdot \lim a_n.$$

Demonstração: Segue da Propriedade 3.3.2 que considerando (b_n) uma sequência constante em que $b_n = b$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, de fato, a sequência é convergente e

$$\lim(b \cdot a_n) = b \cdot \lim a_n.$$

■

Propriedade 3.3.4. *Se (a_n) é uma sequência convergente, então a sequência $|a_n|$ é convergente e*

$$\lim |a_n| = |\lim a_n|.$$

Demonstração: Tomemos $\lim a_n = a$, temos então que pela segunda desigualdade triangular,

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Sabemos que (a_n) é convergente, pois $\lim a_n = a_n$ e por consequência temos que $(|a_n|)$ é convergente, e por definição

$$||a_n| - |a|| < \varepsilon, \forall n > n_0$$

e

$$\lim |a_n| = |a| = |\lim a_n|.$$

■

Observação 3.5. A recíproca da Propriedade 3.3.4 não é verdadeira, ou seja, se $(|a_n|)$ não implica que (a_n) é convergente.

Contra exemplo: Dada a sequência (a_n) onde $a_n = (-1)^{n-1}$ sabemos que

$$|a_n| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Logo, $(|a_n|)$ é constante, portanto convergente, mas a sequência (a_n) não converge.

Propriedade 3.3.5. *Se (a_n) é uma sequência convergente então $\lim a_n = 0$ se, e somente se, $\lim |a_n| = 0$.*

Demonstração:

$(\Rightarrow)$

$$\lim a_n = 0 \Rightarrow \lim |a_n| = 0$$

Sabemos que $\lim(a_n) = 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Pela segunda desigualdade triangular sabemos que

$$||a_n| - |0|| \leq |a_n - 0|$$

e por tansitividade teremos que

$$||a_n| - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Desta forma temos que $\lim |a_n| = 0$.

$(\Leftarrow)$

$$\lim |a_n| = 0 \Rightarrow \lim a_n = 0.$$

Se $\lim |a_n| = 0$, então para um dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$||a_n| - 0| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Por definição temos então que $\lim a_n = 0$, como queríamos mostrar. ■

Propriedade 3.3.6. *Se (a_n) for uma sequência que converge para $a \neq 0$ então existem $n_0 \in \mathbb{N}$ e $k > 0$ tais que $|a_n| > k$ para todo $n \geq n_0$*

Demonstração: Como $\lim a_n = a \neq 0$ então dado $\varepsilon > 0$ um valor aleatório e positivo, diremos que $\varepsilon = \dfrac{|a|}{2}$, logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que,

$$|a_n - a| < \frac{|a|}{2}, \forall n \geq n_0.$$

Mas, pela segunda desigualdade triangular sabemos que

$$||a_n| - |a|| \leq |a_n - a|.$$

Portanto,

$$||a_n| - |a|| < \frac{|a|}{2}, \forall n \geq n_0,$$

que podemos escrever da seguinte forma

$$||a| - |a_n|| < \frac{|a|}{2}, \forall n \geq n_0.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
-\frac{|a|}{2} < & \quad |a_n| \quad -|a| < \frac{|a|}{2}, \ \forall n \geq n_0 \\
|a| - \frac{|a|}{2} < & \quad |a_n| \quad < |a| + \frac{|a|}{2}, \ \forall n \geq n_0 \\
\frac{|a|}{2} < & \quad |a_n| \quad < 3\frac{|a|}{2}, \ \forall n \geq n_0.
\end{aligned}$$

Mas $\frac{|a|}{2} > 0$, então $0 < \frac{|a|}{2} < |a_n|$, para todo $n \geq n_0$. ■

Observação 3.6. Esta afirmação é idêntica à afirmação de que dada uma sequência convergente, ela será limitada, que foi vista no Teorema 3.3.

Propriedade 3.3.7. *Se (a_n) é uma sequência convergente tal que $a_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim a_n = a \neq 0$, então*

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim a_n}$$

Demonstração: Notemos que

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \left|\frac{a - a_n}{a_n \cdot a}\right| = \left|\frac{(-1)(a_n - a)}{a_n \cdot a}\right| = \left|\frac{a_n - a}{a_n \cdot a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n| \cdot |a|} \tag{3.4}$$

Usando o fato de que $\lim a_n = a \neq 0$, logo $|a| > 0$ implica que $\frac{|a|}{2} > 0$ e existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n| > \frac{|a|}{2}, \forall n \geq n_1.$$

Desta forma temos em (3.4) que

$$\frac{|a_n - a|}{|a_n| \cdot |a|} < \frac{|a_n - a|}{\frac{|a|}{2} \cdot |a|} = \frac{|a_n - a|}{|a|^2} 2 = \frac{2|a_n - a|}{|a|^2}.$$

Mas, por definição, sabemos que dado $\varepsilon' > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - a| < \varepsilon', \forall n \geq n_2.$$

Fazendo $\varepsilon' = \frac{|a|^2}{2}\varepsilon$, que será um número positivo, teremos que

$$|a_n - a| < \frac{|a|^2}{2}\varepsilon, \forall n \geq n_2,$$

portanto, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos

$$\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|a_n - a|}{|a_n| \cdot |a|} < \frac{2|a_n - a|}{|a|^2} < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Logo, $\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| < \varepsilon$, para todo $n \geq n_0$ então

$$\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a} = \frac{1}{\lim a_n}.$$

■

Propriedade 3.3.8. *Se (a_n) e (b_n) são sequências convergentes tal que $b_n \neq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim b_n \neq 0$, então $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ converge e $\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$.*

Demonstração: Sabemos que (a_n) e (b_n) são sequências convergentes, e que

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right).$$

Segue da Propriedade 3.3.2 que

$$\lim \left(a_n \cdot \frac{1}{b_n}\right) = \lim a_n \cdot \lim \left(\frac{1}{b_n}\right),$$

e pela Propriedade 3.3.7 que

$$\lim \left(\frac{1}{b_n}\right) = \frac{1}{\lim b_n}.$$

Então

$$\lim \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \lim a_n \cdot \frac{1}{\lim b_n} = \frac{\lim a_n}{\lim b_n}$$

Assim, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ é convergente. ■

Propriedade 3.3.9. *Se (a_n) e (b_n) são duas sequências convergentes, então $a_n \leq b_n$ e $\lim a_n \leq \lim b_n$.*

Demonstração: Queremos mostrar que se (a_n) e (b_n) são sequências convergentes e $a_n \leq b_n$, então $\lim a_n \leq \lim b_n$.

Chamaremos $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$ e por contradição, dizemos que $a > b$. Então por definição sabemos que existem $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tais que

$$|a_n - a| < \varepsilon, \forall n > n_1 \quad \text{e} \quad |b_n - b| < \varepsilon, \forall n > n_2.$$

Como ε é um valor qualquer, maior que zero, estimamos que ele seja $\dfrac{a-b}{2}$, que é um número positivo pois supomos que $a > b$.
Portanto
$$|a_n - a| < \frac{a-b}{2}, \forall n > n_1 \text{ e } |b_n - b| < \frac{a-b}{2}, \forall n > n_2. \tag{3.5}$$
Desde que
$$a - b = a - a_n + a_n - b$$
e como, por hipótese $a_n \leq b_n$, então
$$a - a_n + a_n - b \leq a - a_n + b_n - b.$$
Pela primeira desigualdade triangular temos,
$$|a - a_n + b_n - b| \leq |a - a_n| + |b_n - b|.$$
Colocando (-1) em evidência no primeiro módulo temos
$$|a - a_n| + |b_n - b| = |(-1)(a_n - a)| + |b_n - b|$$
por propriedade de módulo,
$$|(-1)(a_n - a)| + |b_n - b| = |-1| \cdot |a_n - a| + |b_n - b| = |a_n - a| + |b_n - b|$$
Mas, de (3.5) temos que
$$|a_n - a| + |b_n - b| < \frac{a-b}{2} + \frac{a-b}{2} = a - b$$
Chegando em uma contradição pois, dessa forma, afirmamos que $a - b < a - b$. Portanto, se $a \leq b$, então $\lim a_n \leq \lim b_n$. ■

Exemplo 3.11. Tomamos a sequência (a_n) onde $a_n = \dfrac{1}{n}$. Sabemos que
$$\lim a_n = \lim \frac{1}{n} = 0$$
Portanto (a_n) é convergente.
Além disso, verificamos que (a_n) é limitada e $0 < a_n \leq 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Observação 3.7. Notemos que a recíproca do Teorema 3.2 não é verdadeira, ou seja, basta verificar que uma sequência não é limitada para concluir que ela não é convergente.

Contra-exemplo: Sabemos que a sequência (a_n), onde $a_n = (-1)^{n-1}$, e o conjunto dos seus termos é dado por $a(\mathbb{N}) = \{-1, 1\}$, portanto é limitada porém não converge, como já foi visto anteriormente.

3.4 Limites Infinitos

Definição 3.6. *Seja dada uma sequência (x_n) de números reais, dezemos que x_n tende para infinito ($\lim x_n = \infty$) quando para todo um número real qualquer $a > 0$ podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que*

$$x_n > a, \forall n > n_0,$$

ou seja, existe apenas um número finito de índices tais que $x_n \leq A$.

3.5 Propriedades Operatórias de Limites Infinitos

Veremos então as operações aritméticas com limites infinitos.

Propriedade 3.5.1. *Se $\lim x_n = +\infty$ e (y_n) é limitada inferiormente, então $\lim(x_n+y_n) = \infty$.*
Demonstração: Seja $A > 0$. Do fato de y_n ser limitada inferiormente e existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que

$$c < y_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

E existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n > A - c$ para todo $n > n_0$, deste modo, somando as desigualdades teremos que $x_n + y_n > A - c + c = A$, logo $\lim(x_n + y_n) = \infty$. ■

Propriedade 3.5.2. *Se $\lim x_n = +\infty$ e existe $c > 0$ tal que $y_n > c$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então $\lim x_n \cdot y_n = \infty$.*
Demonstração: Seja $A > 0$ então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$x_n > \frac{A}{c}, \forall n > n_0$$

e segue da hipótese que $y_n > c$, logo $x_n y_n > \left(\frac{A}{c}\right) c = A$ para todo $n > n_0$, portanto $\lim(x_n y_n) = \infty$. ■

Propriedade 3.5.3. *Seja $x_n > 0$ para todo n. Então $\lim x_n = 0$ se, e somente se, $\lim \frac{1}{x_n} = \infty$.*
Demonstração:
($\Rightarrow$) Primeiramente supomos que $\lim x_n = 0$. Dado $A > 0$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < x_n < \frac{1}{A}$, para todo $n > n_0$, portanto $\frac{1}{x_n} > A$. Logo $\lim\left(\frac{1}{x_n}\right) = \infty$.

($\Leftarrow$) Da mesma forma, se $\lim\left(\dfrac{1}{x_n}\right) = \infty$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{x_n} > \dfrac{1}{\varepsilon}$, para todo $n > n_0$, deste modo $0 < x_n < \varepsilon$ e $\lim x_n = 0$. $\blacksquare$

Propriedade 3.5.4. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números positivos, então se existe $c > 0$ tal que $x_n > c$ para todo n e se $\lim y_n = 0$ tem-se $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \infty$.*

Demonstração: Dado $A > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < y_n < \dfrac{c}{A}$, para todo $n > n_0$, então $\dfrac{x_n}{y_n} > \dfrac{c}{\frac{c}{A}} = A$. Logo $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = \infty$. $\blacksquare$

Propriedade 3.5.5. *Sejam (x_n) e (y_n) sequências de números positivos, então se (x_n) é limitada e $\lim y_n = \infty$ então $\lim \dfrac{x_n}{y_n} = 0$.*

Demonstração: Existe $k > 0$ tal que $x_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $y_n > \dfrac{k}{\varepsilon}$, para todo $n > n_0$. Dessa forma $0 < \dfrac{x_n}{y_n} < \dfrac{k}{\frac{k}{\varepsilon}} = \varepsilon$, e assim

$$\lim\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0.$$

$\blacksquare$

3.6 Sequências Monótonas

Definição 3.7. *Uma sequência é dita monótona quando:*

a) *(a_n) é estritamente crescente, ou seja, $a_n < a_{n+1}$;*

b) *(a_n) é estritamente decrescente, ou seja, $a_n > a_{n+1}$;*

c) *(a_n) é não decrescente, ou seja, $a_n \leq a_{n+1}$;*

d) *(a_n) é não crescente, ou seja, $a_n \geq a_{n+1}$.*

Exemplo 3.12. A sequência $(1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, \cdots)$ é não decrescente.

De fato, note que

$$\begin{array}{llll} a_1 = 1 & a_2 = 1 & a_3 = 2 & \\ a_4 = 2 & a_5 = 3 & a_6 = 4 & \cdots \end{array}$$

Assim podemos ver que

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5 \leq a_6 \leq \cdots$$

E a sequência é não decrescente.

Exemplo 3.13. A sequência cujo termo geral é dado por $a_n = \dfrac{n-1}{n}$, onde $n \in \mathbb{N}$ é crescente.
De fato, note que

$$a_1 = 0 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{2}{3}$$
$$a_4 = \frac{3}{4} \quad a_5 = \frac{4}{5} \quad a_6 = \frac{5}{6} \quad \cdots$$

Assim podemos ver que

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < \cdots$$

E a sequência é crescente.

Exemplo 3.14. Uma sequência $\left(1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$ é não crescente.
De fato, note que

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 1 \quad a_3 = \frac{1}{2}$$
$$a_4 = \frac{1}{2} \quad a_5 = \frac{1}{3} \quad a_6 = \frac{1}{3} \quad \cdots$$

Assim podemos ver que

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6 \geq \cdots$$

E a sequência é não crescente.

Exemplo 3.15. A sequência (a_n), onde $a_n = \dfrac{1}{n} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots\right)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é decrescente.
De fato, note que

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3}$$
$$a_4 = \frac{1}{4} \quad a_5 = \frac{1}{5} \quad a_6 = \frac{1}{6} \quad \cdots$$

Assim podemos ver que

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > \cdots$$

E a sequência é decrescente.

Teorema 3.4. *Toda sequência limitada e monótona é convergente.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência limitada e monótona e $a(\mathbb{N})$ o conjunto dos seus termos, dado por

$$a(\mathbb{N}) = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\} = \{a_n | \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Temos, por hipótese, que a sequência limitada, então possui ínfimo e supremo (denotaremos por $\alpha = \sup\{a_n|\forall n \in \mathbb{N}\}$ e $\beta = \inf\{a_n|\forall n \in \mathbb{N}\}$).

Vamos mostrar primeiramente, para (a_n) não decrescente, que $\beta = a_1$ e $\alpha = L_1$.

De fato temos que para $\beta = a_1$ é trivial. Vamos mostrar agora que $\alpha = L_1$, onde $\lim(a_n) = L_1$.

Seja $\varepsilon > 0, \alpha > \alpha - \varepsilon$. Isso implica dizer que $\alpha - \varepsilon$ não é cota superior de (a_n), portanto existe a_{n_0} tal que $\alpha - \varepsilon < a_{n_0}$.

Como a sequência é não decrescente, então para todo $n > n_0$, existe $a_n \geq a_{n_0}$. Logo

$$\alpha - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon$$

e

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon.$$

Pelo conceito de vizinhança sabemos que

$$\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon, \forall n > n_0$$

Portanto, por definição de limite de sequência, temos

$$\lim a_n = \alpha = L_1$$

Analogamente, vamos mostrar para (a_n) não crescente que $\alpha = a_1$ e $\inf(a(\mathbb{N})) = L_2$. Temos que $\alpha = a_1$ é trivial. Vamos mostrar então que $\beta = L_2$, onde $\lim a_n = L_2$.

Seja $\varepsilon > 0$, temos que $\beta + \varepsilon > \beta$. Isso implica dizer que $\beta + \varepsilon$ não é uma cota inferior de (a_n), portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_{n_0} < \beta + \varepsilon$.

Como a sequência é não decrescente, então para todo $n > n_0$, existe $a_n \leq a_{n_0}$. Logo

$$\beta + \varepsilon > a_{n_0} \geq a_n \geq \beta > \beta - \varepsilon$$

e

$$\beta + \varepsilon > a_n > \beta - \varepsilon.$$

Pelo conceito de vizinhança sabemos que

$$\beta + \varepsilon > a_n > \beta - \varepsilon \Rightarrow |a_n - \beta| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Portanto, por definição de limite de sequência, temos

$$\lim a_n = \beta = L_2$$

Logo a sequência (a_n) é convergente. ∎

Podemos concluir dos Teoremas 3.2 e 3.4 que uma sequência (a_n) monótona é convergente se, e somente se, é limitada, que é conhecido como **Teorema da Sequência Monótona**.

3.7 Subsequências

Definição 3.8. *Seja $X = (a_n)$ uma sequência e $n = (n_k)$ uma sequência crescente de números naturais*

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$$

Então a sequência

$$X \circ n = \{a_{n_k} | k \in \mathbb{N}\} = (a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots)$$

É chamada subsequência de (a_n).

Exemplo 3.16. Dada uma sequência (a_n) tal que $a_n = \dfrac{1}{n}$, então tomando $n_k = 2k$ teremos a subsequência (a_{n_k}) onde $a_{2k} = \dfrac{1}{2k}$ e também, tomando $n_k = 2k + 1$ teremos a subsequência (a_{n_k}) onde $a_{2k+1} = \dfrac{1}{2k+1}$.

Exemplo 3.17. Dada uma sequência (a_n) tal que $a_n = (-1)^{n-1}$, então tomando $n_k = 2k$ teremos a subsequência (a_{2k}) onde $a_{2k} = (-1, -1, \cdots, -1)$ e também, tomando $n_k = 2k + 1$ teremos a subsequência (a_{2k+1}) onde $a_{2k+1} = (1, 1, \cdots, 1)$.

Proposição 3.1. *Se* $\lim a_n = L$*, então toda subsequência de* (a_n) *convergente para* L*.*

Demonstração: Seja $(a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \cdots, a_{n_i}, \cdots)$ uma subsequência de (a_n) e sabemos que $\lim a_n = L$, então dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| < \varepsilon, \forall n > n_0.$$

Como o subconjunto dos indices de uma subsequência é infinito, então existe $n_i > n_0$ tal que

$$|a_{n_i} - L|\varepsilon, \forall n_i > n_0.$$

Portanto,

$$\lim a_{n_i} = L.$$

■

Corolário 3.1. *Uma sequência que possui duas subsequências convergindo para limites distintos é divergente.*

Demonstração: Afirmamos, por contradição, que a sequência (a_n) é convergente e que as sequências (a_{n_j}) e (a_{n_k}) são subsequências de (a_n) e convergem para limites distintos, ou seja,

$$\lim a_{n_j} = L_1 \ \text{ e } \ \lim a_{n_k} = L_2$$

Onde $L_1 \neq L_2$, o que é uma contradição, pois afirmamos que (a_n) é convergente e pela Proposição 3.1 sabemos que se uma sequência é convergente então todas as suas subsequências convergem para o mesmo limite. Portanto (a_n) é divergente. ■

Definição 3.9. *Diz-se que* L *é o valor de aderencia da sequência* (a_n) *se existir uma subsequência* (a_{n_k}) *tal que*

$$\lim_{n_k \to \infty} a_{n_k} = L.$$

Exemplo 3.18. a sequência $a_n = (-1)^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ possui duas subsequências convergindo para limites diferentes. Se tomarmos $n_k = 2k$ teremos

$$(1, 1, 1, 1, \cdots)$$

então a_{2k} converge para 1.

Se tomarmos $n_k = 2k + 1$ teremos

$$(-1, -1, -1, -1, \cdots)$$

então a_{2k+1} converge para -1.

Logo, pelo Corolário 3.1, a sequência $(a_n) = (-1)^{n-1}$ é divergente.

Corolário 3.2. *Uma sequência limitada de números reais (a_n) é convergente se, e somente se, possui um único valor de aderência.*

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se a sequência (a_n) converge, então o valor de aderência é único.

De fato, se a sequência (a_n) converge então existe L tal que $\lim a_n = L.$ Sabendo que (a_{n_k}) é uma subsequência de (a_n) e

$$\lim_{n_k \to \infty} a_{n_k} = L.$$

Logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $|a_{n_k} - L| < \varepsilon$ para todo $n_k > n_0$

Supomos que exista L_1 tal que $\lim a_{n_i} = L_1$ e $L \neq L_1$ então pelo Corolário 3.1 a sequência (a_n) seria divergente, o que contraria a hipótese.

($\Leftarrow$) Se o valor de aderência é único, então a sequência (a_n) converge.

Sabendo que L é único, então

$$\lim_{n_k \to \infty} a_{n_k} = L$$

Supomos então que (a_n) diverge, para isso existem duas subsequências (a_{n_i}) e (a_{n_j}) tais que

$$\lim a_{n_i} = L_1 \text{ e } \lim a_{n_j} = L_2$$

Mas como por hipótese o valor de aderência é único, então $L_1 = L_2$ e temos duas subsequências convergindo para o mesmo limite. Portanto (a_n) é convergente. ∎

Teorema 3.5. *Toda sequência possui ou uma subsequência não crescente, ou uma subsequência não decrescente, ou ambas.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência e

$$A = \{N \in \mathbb{N} | \text{ se } m > n \text{ então } a_m < a_N\} \tag{3.6}$$

Um subconjunto de $\mathbb{N}$ e supomos que A não é limitado superiormente (por ser um subconjunto de $\mathbb{N}$). Logo A possui elementos da forma

$$k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$$

Por (3.6) construiremos então

$$a_{k_1} > a_{k_2} > a_{k_3} > \cdots$$

que é uma subsequência decrescente.
Tomemos agora A limitado superiormente, dessa forma, como A é subconjunto de $\mathbb{N}$ e é limitado superiormente, então A é finito, ou seja, a partir de certo índice $k_1 \in \mathbb{N}$

$$\{k_1, k_1 + 1, k_1 + 2, \cdots\} = \{k_1, k_2, k_3, \cdots\}$$

não pertencem a A mas também formam uma subsequência de $\mathbb{N}$ de tal forma que

$$a_{k_1} \leq a_{k_2} \leq a_{k_3} \leq \cdots$$

que é uma subsequência não decrescente, o que conclui a veracidade do Teorema. ∎

Teorema 3.6. *(Bolzano-Weierstrass) Toda sequência limitada possui uma subsequência convergente.*
Demonstração: Tomamos uma sequência (a_n) que, por hipótese, é limitada, então existe um $k > 0$ tal que

$$-k \leq a_n \leq k, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue do Teorema 3.5 que (a_n) possui uma subsequência não crescente ou uma subsequência não decrescente ou ambas. Estudaremos então estes casos.
Se a subsequência for decrescente, e como ela é limitada, então ela convergirá para o ínfimo. Da mesma forma se a sequência for não decrescente ela convergirá para o supremo. Portanto, em todas as situações as sequências serão convergentes. ∎

3.8 Algumas Sequências Especiais

Seja r um número real e consideremos a sequência (r^n). Estudaremos todos os casos possíveis com relação aos valores de r.

(a) Se $r = 0$, a sequência será constante, $(0, 0, 0, \cdots)$, e, portanto, convergirá para 0.

(b) Se $r = 1$, a sequência será constante, $(1, 1, 1, \cdots)$, e, portanto, convergirá para 1.

(c) Se $r = -1$ a, sequência será $(-1, 1, -1, 1, \cdots)$ divergente. Pois ela contém duas subsequências convergentes: $(1, 1, 1, \cdots)$, quando $n = 2k$ e $(-1, -1, -1, -1, \cdots)$ quando $n = 2k - 1$, $k \in \mathbb{N}$.

(d) Consideremos o caso em que $0 < r < 1$. Fazendo $a_n = r^n$ teremos

$$a_{n+1} = r^{n+1} = rr^n < r^n = a_n$$

e assim (a_n) é decrescente e limitada inferiormente por 0. Daí, concluímos que (r^n) converge.

Seja L o seu limite. Como (r^n) converge, (rr^n) também convergirá e

$$\lim rr^n = r \lim r^n$$

ou

$$\lim r^{n+1} = rL$$

e como (r^{n+1}) também converge para L (observe que (r^{n+1}) é subsequência de uma sequência convergente), teremos $L = rL$ e assim $(1 - r)L = 0$. Mas $1 - r \neq 0$, pois $r < 1$, e então $L = 0$. Portanto, se $0 < r < 1$ a sequência (r^n) converge para 0.

(e) Se $r < 0$ a sequência será oscilante, como ocorre em (c), ou seja, os termos de ordem ímpar serão negativos e os termos de ordem par serão positivos.

(f) Suponhamos que $r > 1$. Desse modo, $r = 1 + h$, para algum $h > 0$. Pela Desigualdade de Bernoulli, temos

$$r^n = (1 + h)^n \geq 1 + nh.$$

Como h é positivo, tem-se $\lim(1 + nh) = \infty$ então, usando a última desigualdade, concluímos que

$$\lim r^n = \infty.$$

Portanto é divergente.

3.9 Sequência de Cauchy

Definição 3.10. *Dizemos que uma sequência de números reais* (a_n) *é chamada sequência de Cauchy se, dado* $\varepsilon > 0$*, existir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon, \forall m, n > n_0.$$

Exemplo 3.19. Tomando a sequência (a_n) onde $a_n = \dfrac{1}{n}$ queremos mostrar que (a_n) é uma sequência de Cauchy.
Devemos mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| < \varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Convencionamos que $0 < \varepsilon < 1$ e pela Propriedade Arquimediana $1 < \varepsilon n_0$, logo $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$.
Como $n \geq n_0$ temos que $n \geq n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$ e por transitividade $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$, daí $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.
De modo análogo $\dfrac{1}{m} < \varepsilon$. Portanto

$$\left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{m} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon, \forall n, m \geq n_0.$$

Lema 3.1. *Se uma sequência de Cauchy* (a_n) *possui uma subsequência convergindo para* $a \in \mathbb{R}$ *então* $\lim a_n = a$.

Demonstração: Queremos mostrar que se uma subsequência converge para a, então a sequência também converge para a.
De fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, para todo $m, n > n_0$. Como sabemos que existe uma subsequência que converge para a, então podemos escrever

$$|a_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n_1 > n_0$$

E, pela desigualdade triangular

$$|a_n - a| \leq |a_n - a_{n_1}| + |a_{n_1} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \forall n > n_0$$

Logo, $|a_n - a| < \varepsilon$, para todo $n > n_0$. Portanto

$$\lim a_n = a.$$

■

Proposição 3.2. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração: Seja (a_n) uma sequência de Cauchy, então tomando $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, logo

$$|a_n - a_{n_0+1}| < \varepsilon \Rightarrow a_{n_0+1} - \varepsilon < a_n < a_{n_0+1} + \varepsilon.$$

Tomando $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_0+1} - \varepsilon, a_{n_0}, a_{n_0+1} + \varepsilon\}$ então

$$\min A \leq a_n \leq \max A, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, (a_n) é limitada. ■

Teorema 3.7. *Uma sequência (a_n) é convergente se, e somente se, é de Cauchy.*

Demonstração:

$(\Rightarrow)$ Se (a_n) é Convergente, então (a_n) é de Cauchy.

Supondo que (a_n) é uma sequência convergente com $\lim a_n = L$. Então para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|x_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > n_0.$$

Assim para todo $m, n > n_0$

$$|x_m - x_n| = |x_m - L + L - x_n|$$

Mas, pela primeira desigualdade triangular,

$$|x_m - L + L - x_n| \leq |x_m - L| + |L - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Por fim, temos que

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

Logo, se uma sequência (a_n) é convergente, ela é de Cauchy. Resta mostrar então que toda sequência de Cauchy é convergente.

$(\Leftarrow)$ Se (a_n) é de Cauchy, então (a_n) é convergente.

Seja (a_n) uma sequência de Cauchy, sabemos que ela é limitada, pela Proposição 3.2, e que existe uma subsequência convergente, pelo Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Supondo que $\lim a_{n_i} = a$. Vamos mostrar que $\lim a_n = a$. Portanto, seja $\varepsilon > 0$, então

i) $\lim a_{n_i} = a$ e existe n_1 tal que $|a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2}$, para todo $n_i > n_1$

ii) Se (a_n) é uma sequência de Cauchy, então existe n_2, para todo $m, n > n_2$ tal que $|a_m - a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Então, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ temos, então, que para todo $n > n_0$

$$|a_n - a| = |a_n - a_{n_i} + a_{n_i} - a|$$

Pela desigualdade triangular,

$$|a_n - a_{n_i} + a_{n_i} - a| \leq |a_n - a_{n_i}| + |a_{n_i} - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto $\lim a_n = a$ e a sequência (a_n) é convergente. ∎

Capítulo 4

Séries Numéricas

Após o estudo das sequências e tendo em mente os resultados que foram obtidos do capítulo anterior daremos início ao estudo de série, ou ainda, série infinita, que surgiu da tentativa de generalizar o conceito de soma para uma sequência de infinitos termos. Apresentaremos alguns resultados básicos para verificarmos a convergência e a divergência de séries, assim como exemplificar os mesmos.

Definição 4.1. *Uma série infinita, ou simplesmente série, é um par de sequências reais* (a_n) *e* (s_n) *cujos termos estão ligados pelas relações*

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 \\ s_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ s_m &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

onde (a_n) é a sequência de termos da série, a_n é o termo geral e s_n a soma parcial das reduzidas.

Notação:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ ou } \sum a_k.$$

Definição 4.2. *Dada uma série* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$*, se a sequência das somas parciais* (s_n) *convergir para* s *diremos que a série converge, isto é*

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Caso a sequência das somas parciais não convirja, diremos que a série diverge.

Exemplo 4.1. (**Série Geométrica**) Dada a série $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$, denominada série geométrica, estudaremos as diferentes situações para r.

- Se $|r| < 1$ teremos que

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n.$$

Notemos que s_n é a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão r, dessa forma

$$s_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \lim s_n &= \lim \left(\frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \right) \\ &= \lim \left(\frac{1}{1 - r} - \frac{r^{n+1}}{1 - r} \right) \\ &= \lim \left(\frac{1}{1 - r} \right) - \lim \left(\frac{r^{n+1}}{1 - r} \right) \end{aligned}$$

Desde que $|r| < 1$, então,

$$\lim s_n = \lim \left(\frac{1}{1 - r} \right) - \lim \left(\frac{r^{n+1}}{1 - r} \right).$$

Sabemos que $|r| < 1$, logo, $0 \leq r < 1$ e dessa forma, quanto maior for o valor de n, menor será o valor de r^{n+1}, logo

$$\lim \left(\frac{r^{n+1}}{1 - r} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim s_n &= \frac{1}{1 - r} - 0 \\ &= \frac{1}{1 - r}. \end{aligned}$$

Portanto a série $\sum r^n$ é convergente para $|r| < 1$.

- $r = 1$ teremos

$$s_n = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n \cdot 1 = n.$$

Aplicando o limite teremos

$$\lim s_n = \lim n = \infty.$$

Assim, uma vez que a sequência das reduzidas não converge, segue que a série $\sum r^n$ é divergente para $r = 1$.

- Para $r = -1$ teremos

$$\sum r^n = \sum (-1)^n.$$

Que é divergente pois, se tomarmos a soma das parciais s_{2n} e s_{2n+1} teremos

$$\lim s_{2n} = 1 \quad \text{e} \quad \lim s_{2n+1} = -1.$$

isto é, a sequência das reduzidas possui duas subsequências que tendem para limites distintos, logo pelo Corolário 4.1 a sequência das reduzidas diverge e assim a série $\sum r^n$ é divergente para $r = -1$

- Para $|r| > 1$ analisaremos caso $r > 0$, então a sequência (s_n), onde $s_n = r^n$ será crescente e $\lim r^n = \infty$. Caso $r < 0$ a sequência (s_n) terá termos positivos e negativos, dessa forma $\lim r^n = \infty$ se $n = 2k$ e $\lim r^n = -\infty$ se $n = 2k + 1$. Então,

$$\lim r^n = \pm\infty.$$

Portanto será divergente.

Definição 4.3. *Diz-se que uma sequência (a_n) é telescópica ou de Mengoli se for conhecida uma outra sequência (u_n), com $n \in \mathbb{N}$, tal que para todo $n \in \mathbb{N}$,*

$$a_n = u_n - u_{n+1}.$$

Exemplo 4.2. $a_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}.$

Exemplo 4.3. $a_n = \ln\left(\sqrt{\dfrac{n}{n+1}}\right) = \dfrac{1}{2}\ln(n) - \dfrac{1}{2}\ln(n+1)$.

Notemos que o termo geral da sequência das somas parciais associado a uma sequência telescópica (a_n) pode ser obtido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}(u_k - u_{k+1}) \\ &= (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{n-2} - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_n) \\ &= u_1 - u_{n+1}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.4. (**Série Telescópica**) Considere $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ denominada série telescópica, usando frações parciais temos que

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = u_n - u_{n+1}.$$

Pelo que foi visto

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Aplicando o limite temos

$$\begin{aligned} \lim s &= \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= \lim 1 - \lim \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Portando a série telescópica é convergente.

4.1 Álgebra das Séries

Teorema 4.1. *Se λ é uma constante e $\lambda \neq 0$ então a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge se, e somente se, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir.*

Demonstração: Queremos mostrar que $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge se, e somente se, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, para isso temos que

($\Rightarrow$) Se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

De fato temos que se $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge, então existe s tal que

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n \\ &= \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots). \end{aligned}$$

Mas,

$$(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

então,

$$s = \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Portanto a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente.

($\Leftarrow$) Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge então, $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ converge.

De fato, temos que se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então existe s tal que

$$\begin{aligned} s &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ \lambda s &= \lambda \sum_{n=1}^{\infty} a_n \\ \lambda s &= \lambda(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots) \\ \lambda s &= \lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \cdots \\ \lambda s &= \sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n. \end{aligned}$$

Portanto, como λ é uma constante e $\lambda \neq 0$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda a_n$ é convergente. ■

Teorema 4.2. *Suponhamos que as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convirjam. Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *converge.*

Demonstração: Queremos mostrar que a série $\sum(a_n + b_n)$ converge.

De fato, desde que as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem, existem s e l tais que

$$\sum a_n = s \text{ e } \sum b_n = l.$$

Dessa forma,

$$s = \lim s_n = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k$$

e

$$l = \lim{}_n = \lim \sum_{k=1}^{n} b_k$$

então

$$\lim(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = s \text{ e } \lim(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) = l$$

Logo, usando propriedade de limite e agrupando os termos convenientemente, temos

$$\lim[(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + (a_3 + b_3) + \cdots + (a_n + b_n)] = s + l = r.$$

Assim, temos que

$$r = \lim \sum_{k=1}^{n} = \sum(a_n + b_n).$$

Logo, $\sum(a_n + b_n)$ é convergente. ■

Corolário 4.1. *Suponhamos que as séries* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *convirjam. Então a série* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - b_n)$ *converge.*

Demonstração: Partindo do fato de que $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergem, então existem s_1 e s_2 tais que

$$\sum a_n = s \text{ e } \sum b_n = l$$

Dessa forma,

$$s = \lim s_n = \lim \sum_{k=1}^{n} a_k$$

e

$$l = \lim{}_n = \lim \sum_{k=1}^{n} b_k$$

então

$$\lim(a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n) = s \text{ e } \lim(b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n) = l.$$

Logo, usando propriedade de limite e agrupando os termos convenientemente, temos

$$\lim[(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + (a_3 - b_3) + \cdots + (a_n - b_n)] = s - l = r$$

Assim, temos que

$$r = \lim \sum_{k=1}^{n} = \sum (a_n - b_n).$$

Logo, $\sum (a_n - b_n)$ é convergente. ■

Exemplo 4.5. Seja $\sum \left(\frac{2}{(-5)^n} + 7\arctan(n) - 7\arctan(n+1) \right)$. Verifique a convergência da série.

Note que

$$\sum \frac{2}{(-5)^n} = 2 \sum \frac{1}{(-5)^n} = 2 \sum \left(-\frac{1}{5} \right)^n.$$

Observe que $\sum \left(-\frac{1}{5} \right)^n$ é uma série geométrica de razão $r = -\frac{1}{5}$.

Como

$$|r| = \left| -\frac{1}{5} \right| = \frac{1}{5} < 1,$$

segue que

$$\lim s_n = \frac{1}{1-r} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{5}} = \frac{1}{\frac{6}{5}}$$

Isto é,

$$\lim s_n = \frac{5}{6}.$$

Logo, é convergente. Notemos agora que

$$\sum (7\arctan(n) - 7\arctan(n+1))$$

é uma série telescópica, assim

$$\arctan(n) - \arctan(n+1) = \arctan 1 - \arctan(n+1)$$

Logo,

$$\lim[\arctan 1 - \arctan(n+1)] = \arctan 1 - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}.$$

Logo, pelo Teorema 4.2 a série é convergente.

Observação 4.1. *Consideremos as séries* $\sum a_n$ *e* $\sum b_n$ *podemos notar que*

- Se $\sum a_n$ é convergente e $\sum b_n$ é divergente, então $\sum (a_n + b_n)$ é divergente.

De fato, suponhamos, por absurdo, que $\sum c_n$, onde $c_n = a_n + b_n$ é uma série convergente.
Sendo $c_n = a_n + b_n$, segue que

$$b_n = c_n - a_n$$

logo,

$$\sum b_n = \sum (c_n - a_n) = \sum [c_n + (-1)a_n]$$

Como $\sum c_n$ e $\sum a_n$ são convergentes teremos que, pelos Teoremas 4.2 e 4.1, a série

$$\sum b_n$$

é convergente, o que é um absurdo, pois contraria a hipótese.
Portanto se $\sum a_n$ é convergente e $\sum b_n$ é divergente, então $\sum (a_n + b_n)$ é divergente.

- Se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são divergentes, nada podemos afirmar sobre a convergência ou divergência da série $\sum (a_n + b_n)$.

De fato, seja $a_n = 1$ e $b_n = -1$, assim as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são ambas divergentes, no entando $\sum (a_n + b_n) = 0$, portanto é convergente. Agora, tomando $a_n = 1$ e $b_n = 1$ teremos as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ ambas divergentes e $\sum (a_n + b_n) = 2$, que também é divergente. Logo, nada podemos afirmar com relação à convergência ou divergência da série $\sum (a_n + b_n)$.

Teorema 4.3. *Se $\sum a_n$ é uma série convergente então* $\lim a_n = 0$.
Demonstração: Seja $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, desde que a série $\sum a_n$ é convergente, existe s tal que

$$s = \lim_{n \to \infty} s_n$$

e também

$$s = \lim_{n \to \infty} s_{n-1}.$$

Logo, podemos escrever da seguinte forma,

$$0 = s - s = \lim s_n - \lim s_{n-1} = \lim (s_n - s_{n-1}) = \lim a_n.$$

■

Podemos observar que a recíproca do Teorema 4.3 não é verdadeira.

Contra-exemplo 1: (**Série Harmônica**) Dada a série $\sum \frac{1}{n}$, denominada série harmônica, queremos mostrar que seu termo geral $\frac{1}{n}$, tende para zero mas a série diverge.
Temos que a série pode ser escrita da seguinte forma

$$\sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

Agruparemos as parcelas de modo conveniente tal que

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots$$

Observe que os termos agrupados são maiores que $\frac{1}{2}$.
De fato, visto que

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}.$$
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} > \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

Agora sabemos que

$$s_n = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{16}\right) + \cdots + \frac{1}{n}$$

$$s_n > 1 + n\frac{1}{2}.$$

Então

$$0 < 1 + \frac{n}{2} < s_n.$$

Aplicando o limite temos

$$0 < \lim \left(1 + \frac{n}{2}\right) < \lim s_n.$$

Mas, sabemos que

$$\lim \left(1 + \frac{n}{2}\right) = \infty.$$

Portanto $\lim s_n$ não converge para zero, logo a série é divergente.

Contra-exemplo 2: Seja $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ temos que $a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, e assim

$$\lim a_n = \lim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln 1 = 0.$$

No entanto,

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} [\ln(k+1) - \ln k \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 \\ &= \ln(n+1). \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim s_n = \lim \ln(n+1) = \infty.$$

Mostrando que a série $\sum \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ é divergente, mas $\lim a_n = 0$.

Corolário 4.2. *(Um critério de divergência) Se* $\lim a_n$ *não existir ou, se existir e for não-nulo, então a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverge.*

Demonstração: Primeiramente, se $\lim a_n$ não existir então contraria a definição logo a série não convirgirá, portanto a série diverge.

Se $\lim a_n$ existe e é diferente de zero então teremos

$$\lim a_n = \lim(s_n - s_{n-1}) = \lim s_n - \lim s_{n-1} = s_1 - s_2.$$

Mas, como $\lim a_n \neq 0$, então $s_1 \neq s_2$, dessa forma teríamos uma sequência (s_n) convergindo para limites distintos. Portanto $\sum a_n$ é divergente. ■

Exemplo 4.6. Tomemos a série $\sum \cos\dfrac{1}{n}$, sabemos que $a_n = \cos\dfrac{1}{n}$, dessa forma aplicando o limite teremos

$$\lim a_n = \lim \cos\frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

Logo, pelo critério de divergência a série diverge.

4.2 Testes de Convergência para Séries

Teorema 4.4. *(Teste de Cauchy para Séries) Seja* $a_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *a série* $\sum a_n$ *converge se, e somente se, as reduzidas* $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *formam uma sequência* *limitada, isto é, se, e somente se, existe $k > 0$ tal que $a_1 + a_2 + \cdots a_n < k$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

<u>*Demonstração:*</u> Sendo $a_n \geq 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$, então

$$\begin{aligned} s_1 = &\ a_1 \\ s_2 = &\ a_1 + a_2 \\ s_3 = &\ a_1 + a_2 + a_3 \\ \vdots \end{aligned}$$

Dessa forma temos $s_1 \leq s_2 \leq s_3 \leq \cdots$, logo a sequência (s_n) converge se, e somente se, é limitada. ■

Teorema 4.5. *(<u>Teste da Comparação</u>) Sejam (a_n) e (b_n) sequências tais que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a série $\sum b_n$ converge então a série $\sum a_n$ converge.*

<u>*Demonstração:*</u> Sejam S_n e s_n as somas parciais

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} b_j \text{ e } s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j.$$

Em virtude de $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$0 \leq s_n \leq S_n.$$

Como $\sum b_n$ converge, existe $K > 0$ tal que $S_n \leq K$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e daí, como consequência da comparação acima, obtém-se

$$0 \leq s_n \leq S_n \leq K,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, a sequência (s_n) é não-decrescente e limitada superiormente. Pelo Teorema anterior, ela é convergente e daí a série $\sum a_n$ converge. ■

Corolário 4.3. *Sejam (a_n) e (b_n) sequências tais que $0 \leq a_n \leq b_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Se a série $\sum a_n$ divergir então a série $\sum b_n$ diverge.*

<u>*Demonstração:*</u> Sabendo que $\sum a_n$ é uma série diverge, então

$$\lim a_n = L_1 \neq 0.$$

Então, como por hipótese sabemos que

$$0 \leq a_n \leq b_n$$

$$\lim 0 \leq \lim a_n \leq \lim b_n$$

$$0 < L_1 \leq \lim b_n.$$

Portanto $\lim b_n = L_2 \neq 0$ e a série $\sum b_n$ é divergente. ■

Exemplo 4.7. Seja a série $\sum \dfrac{\arctan n}{n(n+1)}$, estude sua convergência.
Note que

$$\frac{\arctan n}{n(n+1)} \leq \frac{\pi}{2}\frac{1}{n(n+1)}.$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ teremos que

$$\sum \frac{\arctan n}{n(n+1)} \leq \sum \frac{\pi}{2}\frac{1}{n(n+1)} = \frac{\pi}{2}\sum \frac{1}{n(n+1)}.$$

Como sabemos que $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ é a série telescópica, portanto é convergente, temos pelo Teorema 4.5, a série $\sum \dfrac{\arctan n}{n(n+1)}$ é convergente.

Exemplo 4.8. Tomando a série $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, note que $\sqrt{n} \leq n$, para todo $n \in \mathbb{N}$, assim

$$0 \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge então pelo teste da comparação $\sum \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Exemplo 4.9. Verifique a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}.$$

Temos que

$$\sum \frac{1}{2^n} = 1$$

é uma série geométrica de razão $\dfrac{1}{2}$, então para todo $n \geq 1$ teremos

$$0 \leq \frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}.$$

Então, pelo Teste da Comparação, a série $\sum \dfrac{1}{n2^n}$ é convergente.

4.2.1 Critério de comparação do limite

Teorema 4.6. *Sejam* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *duas séries, com* $a_n > 0$ *e* $b_n > 0$*, para todo* $n \geq k$*, onde* k *é um natural fixo. Supomos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

Então:

i) Se $L > 0$*,* $L \in \mathbb{R}$*, ou ambas são convergentes ou ambas são divergentes;*

ii) Se $L = \infty$ *e se* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *for divergente,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *também será divergente;*

iii) Se $L = 0$ *e se* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *for convergente,* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *também será convergente.*

Demonstração: (i) Segue de $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ e que $L > 0$ que existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Convencionamos $\varepsilon = \frac{L}{2}$, dessa forma

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \frac{L}{2}, \forall n \geq n_0$$

Pela definição de vizinhança teremos

$$-\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} - L < \frac{L}{2}, \forall n \geq n_0$$

$$L - \frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{L}{2} + L, \forall n \geq n_0$$

$$\frac{L}{2} < \frac{a_n}{b_n} < \frac{3L}{2}, \forall n \geq n_0$$

$$\frac{L}{2} b_n < a_n - L < \frac{3L}{2} b_n, \forall n \geq n_0.$$

Logo, pelo critério de comparação, se $\sum b_n$ convergir, então $\sum a_n$ irá convergir e se $\sum b_n$ divergir, $\sum a_n$ irá divergir.

(ii)Segue de $\lim \frac{a_n}{b_n} = \infty$ que tomando $\varepsilon = 1$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $p > k$, de modo que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \infty\right| < 1, \forall n > p.$$

Então,

$$\frac{a_n}{b_n} > 1, \forall n > p$$

$$a_n > b_n, \forall n > p$$

Portanto, pelo critério de comparação temos que se $\sum b_n$ diverge, então $\sum a_n$ diverge.
(iii) Segue de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0$ que existe um $\varepsilon > 0$ tal que

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0$$

Convencionamos $\varepsilon = 1$, dessa forma

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| < 1, \forall n \geq n_0$$

Ou seja, $a_n < b_n$ para todo $n \geq n_0$, dessa forma $\sum a_n < \sum b_n$ e, pelo critério de comparação, se $\sum b_n$ converge, então $\sum a_n$ converge. ■

Exemplo 4.10. Seja $\sum a_n$ uma série tal que $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, e $\sum b_n$ uma série tal que $b_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ verifique a convergência das séries.

Analisemos o limite do quociente abaixo

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_n}{b_n} &= \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}} \\
&= \lim \frac{1}{n^2} n(n+1) \\
&= \lim \frac{n^2+n}{n^2} \\
&= \lim \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n^2} = 1 > 0.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Critério de comparação do limite as duas séries ou são ambas convergentes ou ambas divergentes. Sabendo que $\sum b_n = \sum \dfrac{1}{n(n+1)}$ é uma série telescópica, a qual é convergente, segue que $\sum \dfrac{1}{n^2}$ é convergente.

Exemplo 4.11. Verifique a convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} ne^{-n}$.

Tomemos a série $\sum e^{-\frac{n}{2}}$, que é convergente pois é uma série geométrica de razão $e^{-\frac{1}{2}} < 1$.

Convencionalmente tomamos

$$a_n = ne^{-n} \text{ e } b_n = e^{-\frac{n}{2}}$$

Analisando o limite do quociente abaixo teremos

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n}{e^{\frac{k}{2}}} = 0.$$

Portanto, pelo Critério de Comparação do limite, a série $\sum a_n$ é convergete.

4.2.2 Teste da Integral Imprópria

Teorema 4.7. *Se f for for uma função positiva definida no intervalo $0 \leq x < \infty$ e decrescente com $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, então a série*

$$\sum f(n)$$

(i) Converge se, e somente se, a integral

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

converge.

(ii) Diverge se, e somente se, a integral

$$\int_1^\infty f(x)dx$$

diverge.

Demonstração: (i) Chamamos

$$a_n = f(n)$$

e

$$b_n = \int_n^{n+1} f(x)dx.$$

Como f é decrescente

$$f(n+1) = f(n+1)[(n+1) - n] = \int_n^{n+1} f(n+1)dx \leq \int_n^{n+1} f(x)dx \leq f(n),$$

ou seja,

$$a_{n+1} \leq b_n \leq a_n.$$

Pelo Teste da Comparação, se $\sum a_n$ converge então $\sum b_n$ converge. Mas $\sum b_n$ converge quando b_n converge, então a integral imprópria $\int_1^\infty f(x)dx$ converge.

(ii) De modo análogo teremos

$$a_{n+1} \leq b_n \leq a_n.$$

Pelo teste da comparação, se $\sum a_{n+1}$ diverge, então $\sum b_n$ diverge. ■

Exemplo 4.12. A série $\sum \dfrac{1}{n\ln n}$ converge ou diverge?
Tomemos a função f tal que $f(n) = \dfrac{1}{n\ln n}$ para $n \geq 2$ e sabemos que f é uma função positiva, contínua e decrescente, portanto, aplicando o critério da integral teremos

$$\int_2^\alpha \frac{1}{n\ln n}dn = [\ln(\ln n)]_2^\alpha = \ln(\ln \alpha) - \ln(\ln 2).$$

Como $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \ln(\ln\alpha) = \infty$, então $\displaystyle\int_2^\infty \frac{1}{n\ln n}dn = \infty$ e a série diverge.

Exemplo 4.13. Seja $\alpha > 1$, onde $\alpha \in \mathbb{R}$. Estude a convergência da série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.
Aplicando o critério da integral tomamos a função

$$f(n) = \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$$

Que é contínua e decrescente, portanto

$$\int_2^\beta \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}dn = \left[\frac{1}{(1-\alpha)(\ln n)^{\alpha-1}}\right]_2^\beta$$

Então

$$\int_2^\beta \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}dn = \frac{1}{1-\alpha}\left[\frac{1}{(\ln\beta)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha-1}}\right] = 0$$

Então, para $\alpha > 1$ teremos que $\lim\limits_{\beta\to\infty} \dfrac{1}{(\ln\beta)^{\alpha-1}} = 0$, portanto a série é convergente.

4.3 Critérios de Convergência para Séries Numéricas

4.3.1 Séries Alternadas

Definição 4.4. *Uma série alternada é uma série da forma*

$$\sum(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

em que os termos a_n são não-negativos para todo $n \in \mathbb{N}$.

Teorema 4.8. *Seja (a_n) uma sequência não-crescente convergente para 0. Então a série alternada*

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots \quad \textit{ou} \quad \sum(-1)^{n+1}a_n$$

é convergente.

Demonstração: Para mostrar que de fato a série alternada converge, mostraremos que (s_{2n}) e (s_{2n+1}), que são subsequências de (s_n), convergem para o mesmo limite, desta forma encontraremos que (s_n) é convergente.

Podemos ver que

$$\begin{aligned} s_{2n+2} - s_{2n} &= (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2}) - (a_1 - a_2 + \cdots + a_{2n-1} - a_{2n}) \\ &= a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq 0. \end{aligned}$$

Pois a sequência (a_n) é não crescente por definição e também

$$s_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} \leq a_1,$$

pois os termos entre parênteses e o a_{2n} são não negativos. Portanto a subsequência (s_{2n}) é não-decrescente e limitada superiormente por a_1, então ela converge para s. Da mesma forma

$$s_{2n+1} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + a_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1}$$

e como $s_{2n} \to s$ e $a_{2n+1} \to 0$, tem-se

$$s_{2n+1} \to s.$$

Então $s_n \to s$, ou seja, a série alternada $\sum(-1)^{n+1}a_n$ converge. ■

Exemplo 4.14. Dada a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, queremos estudar sua convergência.

Sabemos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ é uma série alternada, onde $a_n = \dfrac{1}{\ln n}$ e $n \geq 2$. Note que a_n é decrescente pois,

$$\ln 2 < \ln 3 < \ln 4 < \ln 5 < \ln 6 < \cdots .$$

Portanto,

$$\frac{1}{\ln 2} > \frac{1}{\ln 3} > \frac{1}{\ln 4} > \frac{1}{\ln 5} > \frac{1}{\ln 6} > \cdots$$

Dessa forma,

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > \cdots > a_{n-1} > a_n.$$

Assim, $\lim a_n = \lim \dfrac{1}{\ln n} = 0$ e pelo Teorema 4.8 a série $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$ é convergente.

4.3.2 Teste da Razão ou de D'Alembert

Teorema 4.9. *Seja* $\sum a_n$ *uma série de termos positivos e para cada* $n \in \mathbb{N}$ *consideremos a razão* $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$.

(i) Se todas as razões $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *são menores do que ou iguais a um número* $r < 1$ *então a série converge;*

(ii) Se todas as razões $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ *são maiores do que ou iguais* 1 *então a série diverge.*

Demonstração: (i) Primeiramente definimos um número r tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r < 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Dessa forma sabemos que

$$\frac{a_2}{a_1} \leq r; \frac{a_3}{a_2} \leq r; \frac{a_4}{a_3} \leq r; \cdots$$

e por isso,

$$\begin{aligned}
&a_2 \leq r a_1;\\
&a_3 \leq r a_2 \leq r^2 a_1;\\
&a_4 \leq r a_3 \leq r^3 a_1;\\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto $0 \leq a_n \leq r^{n-1}a_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desde que a série $\sum r^{n-1}$ converge, a série $\sum r^{n-1}a_1$ também convirgirá, portanto, pelo Teste da Comparação, a série $\sum a_n$ converge pois $0 \leq a_n \leq r^{n-1}a_1$.

(ii) Primeiramente definimos um número r tal que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq r > 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Dessa forma sabemos que

$$\frac{a_2}{a_1} > 1; \frac{a_3}{a_2} > 1; \frac{a_4}{a_3} > 1; \cdots$$

E por isso,

$$
\begin{aligned}
&a_2 > a_1;\\
&a_3 > a_2 > a_1;\\
&a_4 > a_3 > a_2 > a_1;\\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Então $0 < a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$. Daí a sequência (a_n) não converge para zero, e assim $\sum a_n$ diverge. ■

Observação 4.2. *Se forem iguais a 1 nada se pode afirmar sobre a convergência ou divergência da série.*

Corolário 4.4. *(Teste da Razão ou de D'Alembert) Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos para a qual a sequência $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ converge para um certo limite r. Então*

(i) Se $r < 1$ a série converge;

(ii) Se $r > 1$ a série diverge;

(iii) Se $r = 1$ nada se pode afirmar sobre a convergência ou divergência da série.

Demonstração: (i) Queremos mostrar que uma sequência $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ de termos positivos converge para L com $0 \leq L < 1$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Pela definição de vizinhança podemos escrever da seguinte forma

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + L, \forall n \geq n_0.$$

Mas, como $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ é uma sequência de termos positivos, então

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon + L, \forall n \geq n_0.$$

Sabemos que $0 \leq L < 1$ e $\varepsilon > 0$ arbitrário, convencionamos que $L + \varepsilon < 1$, portanto pelo Teorema 4.9 a série converge.

(ii) Queremos mostrar que uma sequência $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ de termos positivos converge para L com

$0 \leq L < 1$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - L\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Sem perda de generalidade, podemos escrever

$$\left|L - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \varepsilon, \forall n \geq n_0.$$

Pela definição de vizinhança

$$-\varepsilon - L < -\frac{a_{n+1}}{a_n} < \varepsilon - L.$$

Multiplicando por (-1) temos

$$+\varepsilon + L > \frac{a_{n+1}}{a_n} > -\varepsilon + L.$$

Como $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ é uma sequência de termos positivos, então

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1}}{a_n} < 0.$$

Sabendo que $L > 1$, tomando $\varepsilon > 0$ tal que $L - \varepsilon > 1$ podemos escrever

$$a_{n+1} > (L - \varepsilon)a_n.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&a_{n_0+1} > a_{n_0}(r - \varepsilon)\\
&a_{n_0+2} > a_{n_0+1}(r - \varepsilon) > a_{n_0}(r - \varepsilon)^2\\
&a_{n_0+3} > a_{n_0+2}(r - \varepsilon) > a_{n_0}(r - \varepsilon)^3\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

Como $L - \varepsilon > 1$, temos que $(L - \varepsilon)^k$, quando $k \to \infty$, diverge. Logo, pelo Critério de Comparação, (a_{n_0+k}) é divergente e a série diverge.

(iii) Caso $L = 1$ nada podemos afirmar pois podem haver séries convergentes e divergentes. Veremos nos exemplos a seguir.

Exemplo 4.15. (Convergente) Tomemos a série $\sum \frac{1}{n^p}$, com $p > 1$, que sabemos que é convergente pois é uma série geométrica e $\frac{1}{n} < 1$. Vamos analisar de acordo com o teste da razão.
Sabemos que $a_n = \frac{1}{n^p}$ e que $a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p}$, então

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{\frac{1}{(n+1)^p}}{\frac{1}{n^p}}\right) = \lim \left(\frac{n^p}{(n+1)^p}\right) = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^p = 1$$

Exemplo 4.16. (Divergente) Tomemos a série $\sum \frac{1}{n}$, com $p > 1$, que sabemos que é divergente pois é a série harmônica. Vamos analisar de acordo com o teste da razão.
Sabemos que $a_n = \frac{1}{n}$ e que $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, então

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \left(\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right) = \lim \left(\frac{n}{n+1}\right) = 1.$$

Podemos concluir dos Exemplos 4.15 e 4.16, quando $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ nada podemos afirmar. ■

Observação 4.3. *Observamos que a série $\sum \frac{1}{n^p}$ é denominada Série de Dirichlet.*

Daremos agora exemplos da utilização do teste da raiz para o estudo da convergencia de séries numéricas.

Exemplo 4.17. Dada a série $\sum \frac{2^n}{n!}$ queremos estudar sua convergencia.
De fato, seja $a_n = \frac{2^n}{n!}$, temos $a_{n+1} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$. Dessa forma, aplicando o teste da razão teremos

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\frac{n!}{2^n} = \frac{2^n 2n!}{(n+1)n!2^n} = \frac{2}{n+1} = 0 \neq 1.$$

Logo, pelo teste da razão $\sum \frac{2^n}{n!}$ é convergente.

4.3.3 Teste da Raiz ou de Cauchy

Teorema 4.10. *Seja $\sum a_n$ uma série de termos positivos e para cada $n \in \mathbb{N}$ considere a raiz $\sqrt[n]{a_n}$. Então*

(i) se todas as raízes $\sqrt[n]{a_n}$ são menores do que ou iguais a um número $r < 1$, então a série converge;

(ii) se todas as raízes $\sqrt[n]{a_n}$ são maiores do que ou iguais a 1, então a série diverge.

<u>*Demonstração:*</u> (i) Queremos mostrar que se todas as raízes de $\sqrt[n]{a_n}$ são menores ou iguais a um número $L < 1$, a série $\sum a_n$ será convergente.
De fato, temos que

$$\sqrt[n]{a_n} \leq L < 1.$$

Dessa forma, como (a_n) é uma sequência de termos positivos, então,

$$0 < a_n < L^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando o somatório temos

$$0 < \sum a_n < \sum L^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Como $\sum L^n$ é uma série geométrica, sabemos que é convergente, então, pelo Teste da Comparação, $\sum a_n$ converge.
(ii) Para $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, necessáriamente $a_n \geq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e o termo geral não converge para zero, portanto a série diverge. ■

Corolário 4.5. *(<u>Teste da Raiz ou de Cauchy</u>) Seja $\sum a_n$ uma série determos positivos tal que a sequência $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ converge para um certo limite r. Então*

(i) se $r < 1$, a série converge;

(ii) se $r > 1$, a série diverge;

(iii) se $r = 1$, nada se pode afirmar sobre a convergência ou divergência da série.

<u>*Demonstração:*</u> (i) Queremos mostrar que uma sequência $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ de termos positivos converge para L com $0 \leq L < 1$.
De fato, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|\sqrt[n]{a_n} - L|, \forall n \geq n_0.$$

E pela definição de vizinhança

$$-\varepsilon + L < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + L, \forall n \geq n_0.$$

Como $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ é uma sequência de termos positivos, então

$$0 < \sqrt[n]{a_n},\ \forall n \geq n_0.$$

Tomando $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon + L < 1$ então

$$a_n < (\varepsilon + L)^n, \forall n \geq n_0.$$

Aplicando o somatório teremos, sem perda de generalidade que

$$\sum a_n < \sum (\varepsilon + L)^n, \forall n \geq n_0.$$

Como $(\varepsilon + L)^n$ é uma série geométricae, por conveniência $\varepsilon + L < 1$, portanto, converge e pelo teste da comparação, $\sum a_n$ converge.

(ii) Queremos mostrar que uma sequência $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ de termos positivos converge para L com $L > 1$.

De fato, temos que dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sqrt[n]{a_n} - L\right|, \forall n \geq n_0.$$

E pela definição de vizinhança

$$-\varepsilon + L < \sqrt[n]{a_n} < \varepsilon + L, \forall n \geq n_0.$$

Como $\varepsilon > 0$ e $L > 1$ então convencionamos que $L - \varepsilon > 1$ então

$$1 < L - \varepsilon < \sqrt[n]{a_n}, \forall n \geq n_0$$

$$1 < (L - \varepsilon)^n < a_n, \forall n \geq n_0.$$

Portanto, $1 < a_n$ para todo $n \geq n_0$ e (a_n) não converge para zero, logo a série $\sum a_n$ é divergente.

(iii) Caso $L = 1$ nada podemos afirmar pois podem haver séries convergentes e divergentes.

De fato, seja $a_n = \dfrac{1}{n}$,

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim (a_n)^{\frac{1}{n}} = \lim \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}} = 1.$$

e $\sum \dfrac{1}{n}$ é divergente.

Por outro lado, se $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, teremos também que $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$, mas $\sum \dfrac{1}{n^2}$ é convergente. ■

Exemplo 4.18. Tomemos a série $\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$. Vamos analisar sua convergência de acordo com o teste da raiz.

Sabemos que

$$a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\lim \sqrt[n]{a_n} &= \lim (a_n)^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim \left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} \\
&= \lim \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n^2}{n}} \\
&= \lim \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n} \\
&= \lim \left(1 + \frac{(-1)}{n}\right)^{n^2} \\
&= e^{-1}.
\end{aligned}$$

Como $e^{-1} < 1$, pelo Critério de Cauchy

$$\sum \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}.$$

converge.

4.4 Convergência absoluta

Até o momento, os critérios que foram estudados aplicam-se apenas a séries cujos termos são positivos. Nesta seção estudaremos séries cujos termos não possuem sinal constante.

Definição 4.5. *Uma série $\sum a_n$ é dita absolutamente convergente se $\sum |a_n|$ for convergente.*

Observação 4.4. *Toda série absolutamente convergente é convergente mas nem toda série convergente é absolutamente convergente.*

Contra-exemplo: Considere a série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, usando o Critério de Leibniz prova-se que a série é convergente. No entanto, $\sum \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$, que é divergente.

Observação 4.5. *Toda série convergente que não é absolutamente convergente é dita condicionalmente convergente.*

Teorema 4.11. *Toda série absolutamente convergente é convergente, ou seja, se* $\sum |a_n|$ *convergir então* $\sum a_n$ *convergirá.*

<u>*Demonstração:*</u> Seja $\sum |a_n|$ uma série absolutamente convergente então existe um s tal que

$$\sum |a_n| = s.$$

Dessa forma podemos escrever esse somatório como

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots = s.$$

Mas pela desigualdade triangular sabemos que

$$|a_1 + a_2 + a_3 + \cdots| \leq |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots = s$$

$$\left|\sum a_n\right| \leq \sum |a_n| = s.$$

Portanto, pelo critério de comparação temos que $\sum a_n$ é convergente. ∎

Corolário 4.6. *Seja* $\sum b_n$ *uma série convergente, com* $b_n \geq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se existirem* $k > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tais que* $|a_n| \leq kb_n$ *para todo* $n > n_0$, *então a série* $\sum a_n$ *é absolutamente convergente.*

<u>*Demonstração:*</u> Queremos mostrar que $\sum a_n$ é absolutamente convergente. Como sabemos que $\sum b_n$ é convergente então $\sum kb_n$ também é convergente.

Por hipótese sabemos que

$$|a_n| \leq kb_n.$$

Aplicando o somatório a desigualdade não se altera, então

$$\sum |a_n| \leq \sum kb_n.$$

Como sabemos que $\sum kb_n$ converge então, pelo teste da comparação, $\sum |a_n|$ é convergente, portanto, pela Definição 4.5, $\sum a_n$ é absolutamente convergente. ∎

Apêndice

Neste apêndice trabalharemos algumas questões que envolvem os assuntos que foram estudados anteriormente, mostrando como analisar a convergência de diferentes diferentes tipos de sequências e séries numéricas.

Questão 4.1. *Estude a convergência da sequência* $\left(\dfrac{r^n}{n!}\right)$*, onde* $r > 0$*.*

Solução 4.1. *Como queremos estudar a convergência da sequência em questão, e temos* $0 < r \leq 1$*, então analisaremos três situações:*

(i) Para $0 < r < 1$ *sabemos que fazendo* $a_n = r^n$*, teremos* $a_{n+1} = r^{n+1} = rr^n$*, logo* $a_{n+1} < a_n$ *e a sequência é decrescente, portanto monótona, e limitada e a sequência* (a_n) *converge. Mas* $r^n \leq \dfrac{r^n}{n!}$*. Então, pelo teste da comparação, a sequência converge.*

(ii) Para $r = 1$ *teremos* $a_n = \dfrac{1}{n!}$*, que é decrescente pois*

$$a_1 = \frac{1}{1!} \quad a_2 = \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} \quad a_3 = \frac{1}{3!} = \frac{1}{3 \cdot 2} = \frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{1}{4!} = \frac{1}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{24} \quad a_5 = \frac{1}{5!} = \frac{1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{120} \quad a_6 = \frac{1}{6!} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{720} \quad \cdots$$

Logo $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > \cdots$ *e é limitada, pois* $0 < a_n \leq 1$*, portanto* $\left(\dfrac{1^n}{n!}\right)$ *converge.*

Questão 4.2. *Mostre que a sequência cujos termos são dados por* $\sqrt{2}$*,* $\sqrt{2+\sqrt{2}}$*,* $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$*,* $\cdots$*, onde* $a_n > 0$ *é convergente e calcule para onde converge.*

Solução 4.2. *Para mostrar a convergência da sequência basta mostrar que ela é monótona e limitada. De fato temos que ela é monótona pois*

$$a_1 = \sqrt{2} \qquad a_2 = \sqrt{2\sqrt{2}} \quad a_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$$
$$a_4 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}} \qquad \cdots \qquad a_n = \sqrt{2a_{n-1}}$$

Portanto,

$$\sqrt{2} < \sqrt{2\sqrt{2}} < \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} < \cdots$$

Dessa forma,

$$a_1 < a_2 < a_3 < \cdots$$

E a sequência é crescente. Além disso, podemos concluir que é limitada inferiormente por $\sqrt{2}$*, que é seu elemento mínimo.*

Como a sequência é crescente, se ela for convergente o limite existirá e ela convergirá para o elemento máximo da sequência, portanto basta calcular seu limite. Diremos que

$$\lim a_n = L$$

Dessa forma teremos também que

$$\lim a_{n+1} = L$$

Então

$$\lim a_n = \lim a_{n+1}$$

Como $a_{n+1} = \sqrt{2a_n}$*, então*

$$\begin{aligned} \lim a_n &= \lim \sqrt{2a_n} \\ \lim a_n &= \sqrt{2} \lim a_n^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Mas como $\lim a_n = L$*, substituimos e teremos*

$$\begin{aligned} \lim a_n &= \sqrt{2} \lim a_n^{\frac{1}{2}} \\ L &= \sqrt{2} L^{\frac{1}{2}} \\ \frac{L}{L^{\frac{1}{2}}} &= \sqrt{2} \\ L^{\frac{1}{2}} &= \sqrt{2} \\ L &= 2 \end{aligned}$$

Dessa forma, segue de $\lim a_n = 2$ *que a sequência será limitada superiormente por* 2 *e será convergente.*

Questão 4.3. *Considere a sequência (a_n) dada por,*

$$a_1 = \frac{3}{2} \text{ e } a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2}, \text{ para } n \geq 2.$$

Mostre que (a_n) é estritamente crescente.

Solução 4.3. *Para mostrar que uma sequência é estritamente crescente, verificamos o comportamento de seus termos de acordo com a ordem crescente de seus indices. Notemos então que*

$$a_1 = \frac{3}{2}$$

$$a_2 = \sqrt{3a_{2-1} - 2} = \sqrt{3a_1 - 2} = \sqrt{3\frac{3}{2} - 2} = \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$a_3 = \sqrt{3a_{3-1} - 2} = \sqrt{3a_2 - 2} = \sqrt{3\sqrt{\frac{5}{2}} - 2}$$

$$a_4 = \sqrt{3a_{4-1} - 2} = \sqrt{3a_3 - 2} = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\frac{5}{2}} - 2} - 2}$$

$$a_5 = \sqrt{3a_{5-1} - 2} = \sqrt{3a_4 - 2} = \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\frac{5}{2}} - 2} - 2} - 2}$$

$$\cdots$$

Dessa forma, podemos ver que

$$\frac{3}{2} < \sqrt{\frac{5}{2}} < \sqrt{3\sqrt{\frac{5}{2}} - 2} < \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\frac{5}{2}} - 2} - 2} < \sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{\frac{5}{2}} - 2} - 2} - 2} < \cdots$$

Portanto,

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < \cdots < a_{n-1} < a_n$$

E a sequência é estritamente crescente.

Questão 4.4. *Seja $a_n = n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que* $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Solução 4.4. *Sabemos que*

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{n} = \lim n^{\frac{1}{n}}$$

Segue de $n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}}$ e de

$$\lim \frac{\ln n}{n} = 0$$

Que,

$$\lim e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$$

E

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$$

Como queríamos mostrar.

Questão 4.5. *Seja* $\lim a_n = a$*, mostre que*

$$\lim \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = a$$

Solução 4.5. *Precisamos mostrar que dado* $\varepsilon > 0$*, existe um* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left| \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a \right| < \varepsilon, \forall n > n_0$$

Sabemos que por hipótese $\lim a_n = a$*, então dado* $\frac{\varepsilon}{2} > 0$*, existe* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall n > m_0$$

Então, teremos que

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como temos que $n > m_0$*, então*

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_{m+1} - a < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_{m+2} - a < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_{m+3} - a < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\vdots$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a < \frac{\varepsilon}{2}$$

Somando as $n - m_0$ *desigualdades encontramos*

$$-(n - m_0)\frac{\varepsilon}{2} < (a_{m_0+1} - a) + (a_{m_0+2} - a) + (a_{m_0+3} - a) + \cdots + (a_n - a) < (n - m_0)\frac{\varepsilon}{2}$$

$$-\frac{\varepsilon}{2} < \frac{(a_{m_0+1} - a) + (a_{m_0+2} - a) + (a_{m_0+3} - a) + \cdots + (a_n - a)}{n - m_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\left|\frac{(a_{m+1}-a)+(a_{m+2}-a)+(a_{m+3}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n-m_0}\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{4.1}$$

Como m_0 é um natural fixo

$$\lim\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+(a_3-a)+\cdots+(a_{m_0}-a)}{n}=0$$

Logo, existe $p\in\mathbb{N}$ tal que

$$\left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+(a_3-a)+\cdots+(a_{m_0}-a)}{n}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\forall n>p \tag{4.2}$$

Seja $n_0=\max\{m_0,p\}$, segue de (4.1) e (4.2) que para todo $n>n_0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right| &\le \left|\frac{(a_1-a)+(a_2-a)+(a_3-a)+\cdots+(a_{m_0}-a)}{n}\right|+\\ &\quad \left|\frac{(a_{m+1}-a)+(a_{m+2}-a)+(a_{m+3}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n}\right|\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\left|\frac{(a_{m+1}-a)+(a_{m+2}-a)+(a_{m+3}-a)+\cdots+(a_n-a)}{n-m_0}\right|\frac{n-m_0}{n}\\ &< \varepsilon\end{aligned}$$

Assim,

$$\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-a\right|<\varepsilon,\forall n>n_0$$

Portanto,

$$\lim\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$$

Questão 4.6. *Aplicando o teste de Cauchy estude a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$.

Solução 4.6. *Sejam $m,n\in\mathbb{N}$ com $m\ge n$. Então*

$$|s_m-s_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{n+1}+\frac{\sin(n+2)}{n+2}+\cdots+\frac{\sin(m)}{m}\right|$$

Sabendo que

$$\left|\frac{\sin n}{n}\right|\le\frac{1}{n}$$

Temos

$$|s_m-s_n|\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}$$

Com $m-n$ parcelas, dessa forma teremos que

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}\le\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{m-p}{n+1}$$

Tomamos em particular $m = n + 1$ *teremos*

$$\frac{m-n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \leq 1$$

Daí teremos que

$$|s_m - s_n| \leq 1$$

Que é limitado, portanto, pelo critério de Cauchy, é convergente.

Questão 4.7. *Mostre que se* $\sum a_n$ *é convergente, então* $\sum a_n^2$ *também é convergente.*

Solução 4.7. *Sabemos que se* $a_n > 0$ *e* $\sum a_n$ *é convergente então* $\lim a_n = 0$*, dessa forma, para todo* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|a_n - 0| < \varepsilon, \ \forall n > n_0.$$

Tomamos $\varepsilon = 1$*, dessa forma temos que*

$$|a_n| < 1.$$

Dessa forma, como $a_n > 0$ *podemos escrever*

$$a_n < 1.$$

Multiplicando por a_n *a desigualdade se mantém e teremos*

$$a_n^2 < a_n.$$

Logo,

$$\sum a_n^2 < \sum a_n.$$

Teremos então pelo teste de comparação que se $\sum a_n$ *é convergente, então* $\sum a_n^2$ *é convergente, como queríamos mostrar.*

Questão 4.8. *Investigue a convergência das séries*

a) $\frac{1}{3} + \frac{2}{6} + \frac{3}{11} + \frac{4}{18} + \frac{5}{27} + \cdots$

b) $\frac{1}{2} - \frac{2}{20} + \frac{3}{38} - \frac{4}{56} \cdots$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

e) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$

f) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n!}$

g) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

Solução 4.8. *a) Notemos que a soma* $\frac{1}{3}+\frac{2}{6}+\frac{3}{11}+\frac{4}{18}+\frac{5}{27}+\cdots$ *pode ser escrita da seguinte maneira*

$$\frac{1}{1^2+2}+\frac{2}{2^2+2}+\frac{3}{3^2+2}+\frac{4}{4^2+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+2}$$

Daí podemos escrever essa soma como $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+2}$*, dessa forma*

$$0\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$$

$$0\leq\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\leq\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$$

Mas $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ *diverge pois é a série harmônica, portanto, pelo critério de comparação segue que* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^2+2}$ *diverge.*

b) Notemos que a soma $\frac{1}{2}-\frac{2}{20}+\frac{3}{38}-\frac{4}{56}\cdots$ *pode ser escrita da seguinte maneira* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2(9n-8)}$.

Temos que $\lim\frac{(-1)^{n-1}n}{2(9n-8)}=-\frac{1}{18}$ *ou* $\frac{1}{8}$*, dessa forma* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}n}{2(9n-8)}$ *diverge pois a série tende para limites distintos.*

c) Aplicando o teorema de Cauchy para séries teremos que sejam $m,n\in\mathbb{N}$ *com* $m\geq n$*. Então*

$$|s_m-s_n|=\left|\frac{\sin(n+1)}{n+1}+\frac{\sin(n+2)}{n+2}+\cdots+\frac{\sin m}{m}\right|$$

Daí, da desigualdade triangular e do fato de que $\left|\frac{\sin n}{n}\right|\leq\frac{1}{n}$*, temos*

$$|s_m-s_n|\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{m}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{m-n}{n+1}$$

Fazendo em particular $m=n+1$ *teremos então* $\frac{m-n}{n+1}=\frac{1}{n+1}\leq 1$

Daí, se tomarmos $\varepsilon=\frac{1}{2}$ *ou* $\varepsilon<\frac{1}{2}$ *teremos que* $|s_m-s_n|\geq\frac{1}{2}$*. Logo, pelo critério de Cauchy, a série é divergente.*

d) Nesta questão usaremos o teste da comparação. Inicialmente veremos que

$$0<\frac{n}{(n+1)!}=\frac{n}{(n+1)n(n-1)!}=\frac{1}{(n+1)(n-1)!}$$

Note ainda que se

$$(n+1)(n-1)! > (n+1)(n-1)$$

então

$$\frac{1}{(n+1)(n-1)!} < \frac{1}{(n+1)(n-1)}$$

Desde que $n \geq 2$, *ou seja*

$$0 < \frac{n}{(n+1)!} \leq \frac{1}{(n+1)(n-1)}$$

Note que pelo teste de comparação, basta mostrarmos que $\sum \frac{1}{(n+1)(n-1)}$ *converge para concluirmos que esta série converge, então*

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1)-(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{2}{(n+1)(n-1)}$$

Logo,

$$\frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n-1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

e) Utilizaremos o teste da raiz para verificar que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$$

Converge, para isso temos então

$$a_n = \left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$$

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = \lim \sqrt[n]{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n} = \lim \frac{\ln n}{n}$$

Aplicando a regra de L'Hospital teremos que

$$\lim \frac{(\ln n)'}{(n)'} = \lim \frac{1}{x} = 0$$

Como $\lim \frac{\ln n}{n} = 0 < 1$, *pelo teste da raiz a série* $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^n$ *converge.*

f) Utilizaremos o teste da razão para verificar a convergência da série

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n!}$$

Para isso, temos que

$$a_n = \frac{(-1)^n n^n}{n!}$$

Então

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Aplicando o teste teremos

$$\begin{aligned}
\lim \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim \frac{\left|\dfrac{(-1)^{n+1}(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n n^n}{n!}\right|} \\
&= \lim \frac{\left|\dfrac{(-1)^n(-1)(n+1)^n(n+1)}{(n+1)n!}\right|}{\left|\dfrac{(-1)^n n^n}{n!}\right|} \\
&= \lim \left|\frac{(-1)(n+1)^n}{n^n}\right| \\
&= \lim \left|\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right| \\
&= \lim \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| \\
&= \lim e
\end{aligned}$$

Mas como $e > 1$, então a série $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n n^n}{n!}$ diverge.

g)Queremos verificar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

Para isso temos que

$$\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln n(n+1)^{-1} = \ln n + \ln(n+1)^{-1} = \ln n - \ln(n+1)$$

Podemos então dizer que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln n - \ln(n+1)]$$

Dessa forma encontramos que s_n é dado da forma

$$s_n = (\ln 1 - \ln 2) + (\ln 2 - \ln 3) + \cdots + (\ln(n-1) - \ln n)$$

Logo,

$$s_n = -lnn$$

Aplicando o limite teremos

$$\begin{aligned}\lim s_n &= \lim(-\ln n)\\ &= -\ln(\lim n)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

Portanto, s_n *diverge e a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ *diverge.*

Questão 4.9. *Mostre que se* $a_n \geq 0$ *e* $\sum a_n$ *converge, então* $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ *converge.*

Solução 4.9. *Note que*

$$\left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{n}\right)^n \geq 0$$

$$(\sqrt{a_n})^2 - \frac{2\sqrt{a_n}}{2} + \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$a_n + \frac{1}{n^2} \geq \frac{2\sqrt{a_n}}{n} \geq 0$$

Aplicando o somatório teremos

$$\sum a_n + \sum \frac{1}{n^2} \geq \sum \frac{2\sqrt{a_n}}{n} \geq 0$$

Por hipótese temos que $\sum a_n$ *converge e sabemos que* $\dfrac{1}{n^2}$ *converge dessa forma, pelo critério de comparação* $\sum \dfrac{2\sqrt{a_n}}{n}$ *converge e* $\sum \dfrac{\sqrt{a_n}}{n}$ *converge.*

Questão 4.10. *Mostre que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}$ *diverge.*

Solução 4.10. *primeiramente podemos ver que*

$$0 < \sqrt{n} + \sqrt{n-1} < \sqrt{n} + \sqrt{n} = 2\sqrt{n} \leq 2n$$

Logo

$$0 < \sqrt{n} + \sqrt{n-1} \leq 2n$$

$$\frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \geq \frac{1}{2n} \geq 0$$

Veja que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ *diverge, pois se* $\sum \frac{1}{2n}$ *converge, então* $\sum \frac{1}{n}$ *convirgiria, o que é uma contradição pois a série* $\sum \frac{1}{n}$ *é a série harmônica e diverge. Logo,* $\sum \frac{1}{2n}$ *diverge. Portanto* $\sum \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$ *diverge.*

Questão 4.11. *Determine a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!n!}$.

Solução 4.11. *Para determinar a convergência da série em questão utilizaremos o teste da razão.*
Sabemos que $a_n = \frac{(2n)!}{n!n!}$*, dessa forma,* $a_{n+1} = \frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}$*. Então, aplicando o teste da razão teremos*

$$
\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \left(\frac{\frac{(2(n+1))!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} \right) \\
&= \lim \left(\frac{(2n+2))!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} \right) \\
&= \lim \left(\frac{2(2+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} \right) = 4
\end{aligned}
$$

Portanto, como $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 4 > 1$*, a série é divergente.*

Questão 4.12. *Investigue a convergência da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2-\sin^2(3n)}{2^n+n^2+1}$.

Solução 4.12. *Notemos que*

$$
\begin{aligned}
\left| \frac{2-\sin^2(3n)}{2^n+n^2+1} \right| &= \left| \frac{2-(1-\cos^2(3n))}{2^n+n^2+1} \right| \\
&= \left| \frac{1+\cos^2(3n)}{2^n+n^2+1} \right| \\
&\leq \frac{2}{2^n+n^2+1} \\
&< \frac{2}{2^n+n^2} \\
&< \frac{2}{n+n^2} \\
&< \frac{2}{n^2} \\
&< \frac{2}{n(n-1)}
\end{aligned}
$$

Aplicando o somatório teremos

$$\sum \left| \frac{2 - \sin^2(3n)}{2^n + n^2 + 1} \right| < \sum \frac{2}{n(n-1)}$$

Mas $\sum \frac{2}{n(n-1)}$ *é a série telescópica e é convergente, portando, pelo teste de comparação* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 - \sin^2(3n)}{2^n + n^2 + 1}$ *é convergente.*

Questão 4.13. *Estude a convergência da série* $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n!}$ *e calcule seu limite.*

Solução 4.13. *Para determinar a convergência da série em questão utilizaremos o teste da razão.*

Sabemos que $a_n = \frac{n-1}{n!}$*, dessa forma,* $a_{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}$*. Então, aplicando o teste da razão teremos*

$$\begin{aligned}
\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim \left(\frac{\frac{n}{(n+1)!}}{\frac{n-1}{n!}} \right) \\
&= \lim \left(\frac{n}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n-1} \right) \\
&= \lim \left(\frac{n}{n^2 - 1} \right) = 0
\end{aligned}$$

Questão 4.14. *Mostre que se* $a_n \geq 0$ *e* $\sum a_n$ *converge, então* $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ *converge.*

Solução 4.14. *Note que*

$$\left(\sqrt{a_n} - \frac{1}{n} \right)^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a_n})^2 - \frac{2\sqrt{a_n}}{n} + \frac{1}{n^2} \geq 0$$

$$a_n + \frac{1}{n^2} \geq \frac{2\sqrt{a_n}}{n} \geq 0$$

Pela hipótese temos que $\sum a_n$ *converge e sabemos que* $\sum \frac{1}{n^2}$ *converge, daí resulta que* $\sum (a_n \frac{1}{n^2})$ *converge e pelo teste da comparação encontramos que* $\sum \frac{2\sqrt{a_n}}{n}$ *converge, portanto* $\sum \frac{\sqrt{a_n}}{n}$ *converge.*

Questão 4.15. *A série*

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \cdots$$

tem seus termos alternados e seu termo geral tende a zero. Mostre que ela é divergente. Porque esse resultado não contradiz o teste de Leibniz?

Solução 4.15. *Pela definição de série podemos escrever*

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n}\right)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n} = -1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

Como $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ *diverge quando* $n \to \infty$, *então* $s_n \to \infty$. *Portanto a série é divergente.*
O fato da série ser divergente não contradiz o teste de Leibniz pelo fato de os termos da série serem monótonos, pois

$$1 > \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} < \frac{2}{3},$$
$$\frac{1}{3} < \frac{2}{4} \text{ e } \frac{2}{4} > \frac{1}{4}$$

e assim sucessivamente.

Questão 4.16. *Use frações parciais para mostrar que* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1$

Solução 4.16. *Faremos então*

$$a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n+1} + \frac{B}{n+2} = \frac{(A+B)n + 2A + B}{(n+1)(n+2)} \tag{4.3}$$

Desta forma podemos descobrir os valores de A e de B formando um sistema de equações

$$\begin{cases} A + B &= 0 \\ 2A + B &= 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A &= -B \\ 2A - A &= 1 \end{cases} \quad \begin{cases} B &= -1 \\ A &= 1 \end{cases}$$

Logo, substituindo em (4.3) teremos

$$a_n = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}$$

Dessa forma encontramos que a soma s_n vai ser dada por

$$
\begin{aligned}
s_0 = &\quad 1 - \tfrac{1}{2} \\
s_1 = &\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \\
s_2 = &\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \\
s_3 = &\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \\
&\vdots \\
s_n = &\quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}
$$

Logo, $s_n = 1 - \dfrac{1}{n+2}$ *daí temos que* $\lim s_n = \lim\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) = 1$*, portanto* $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1.$

Referências Bibliográficas

1. *LIMA, Elon L.* ***Curso de Análise vol. 1. 14ª edição****. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2012;*

2. *FIGUEIREDO, Djairo G.* ***Análise 1. 2ª edição****. Rio de Janeiro: LTC, 2011;*

3. *ÁVILA, Geraldo S. de S.* ***Análise Matemática Para Licenciatura. 3ª edição****. São Paulo: Blücher, 2006;*

4. *CORRÊA, Francisco Júlio S. de A.* ***Introdução à Análise Real****. Recife: Imprima, 2012;*

5. *GUIDORIZZI, Hamilton Luiz.* ***Um Curso de Cálculo, vol. 4, 5ª edição****; Rio de Janeiro: LTC, 2011;*

6. *EVES, Howard.* ***Introdução à História da Matemática 5ª edição****; tradução Hygino H. Domingues. Campinas: Editora da UNICAMP, 2011.*

7. *NERI, Cassio.* ***Curso de Análise Real. 1ª edição****. Rio de Janeiro, 1973;*

8. *CATTAI, Adriano P.* ***Análise Real****. Bahia: UNEB, 2009.*