UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

UMA INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES DE FOURIER COM APLICAÇÕES EM CONDUÇÃO DE CALOR

BELÉM - PA
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ADRIANA MARA DOS SANTOS BARROS

UMA INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES DE FOURIER COM APLICAÇÕES EM CONDUÇÃO DE CALOR

Trabalho de Conclusão de Curso de Licenciatura Plena em Matemática - modalidade presencial - apresentado à Faculdade de Matemática, sob orientação do professor Mauro Lima Santos.

BELÉM - PA
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS
FACULDADE DE MATEMÁTICA

ADRIANA MARA DOS SANTOS BARROS

UMA INTRODUÇÃO ÀS SÉRIES DE FOURIER COM APLICAÇÕES EM CONDUÇÃO DE CALOR

Prof. Mauro Lima Santos (Orientador)

Prof. Sebastião Martins Siqueira Cordeiro

Prof. Walter Jesus da Costa Martins Filho

Conceito: Excelente

Dedicatória

Dedico aos meus pais Ademar e Marilda Barros, que sempre acreditaram em meu potencial e me deram suporte em todos os momentos de minha vida.

Ao meu irmão André Barros, pelo companheirismo e compreensão.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida e por me abençoar em todos os momentos de minha vida.

Aos meus pais Ademar e Marilda Barros por não medirem esforços para investir em minha formação e acima de tudo por me darem a educação adequada para que eu me tornasse uma pessoa de bem.

Ao meu irmão André Barros por estar sempre ao meu lado.

Ao meu namorado Alessandro Galvão pelo carinho e incentivo em momentos de desânimo.

Aos meus tios, em especial, Inedes Barros, José Francisco, Oaci Barros, Onedina Soares e Pery Soares por tanto carinho e por contribuirem em grande parte em minha graduação.

Aos meus primos Orlando, Pricila, Tânia e Tatiane que se mostram verdadeiros irmãos com tanto carinho e compreensão.

Aos meus amigos, em especial aos que conquistei na universidade: Alan, Alison, Carlos Eduardo, Denise, Evelyn, Lidiane, Liliane, Márcia e Mônica, pelos momentos felizes, tristes e até de desentendimento, experiências essas que me fizeram crescer como pessoa.

Enfim, a todos que contribuíram de alguma maneira em minha vida, muito obrigada!!!

Conteúdo

Introdução

Na tentativa de resolver o problema da condução do calor, podemos utilizar a Matemática que aprendemos nos cursos de Cálculo Diferencial e Integral e de Equações Diferenciais, mas chegaremos à conclusão de que necessitamos de algo mais para solucioná-lo e esse algo mais é a Série de Fourier, a qual é definida por:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1}$$

Onde a_n e b_n são os coeficientes de Fourier, podemos assim observar que tal é série é composta por senos e cossenos.

No presente trabalho fazemos uma abordagem de dois temas principais: Séries de Fourier e condução de calor, sendo que discutiremos as Séries de Fourier, suas características e algumas das suas aplicações no problema da condução do calor em uma barra. O trabalho está dividido em três capítulos. No primeiro capítulo, fazemos um estudo teórico sobre as Séries de Fourier, como sua definição e algumas definições necessárias ao seu entendimento. No segundo capítulo, mostramos a Transformada de Fourier e algumas de suas propriedades, e no terceiro capítulo estudaremos as Séries de Fourier aplicadas em problemas de condução do calor.

Capítulo 1

Séries de Fourier

1.1 Introdução

Em 1811, estudando o problema da condução do calor em uma barra, Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) chegou aos coeficientes e às séries de senos e cossenos de várias funções. Mesmo cometendo o equívoco de afirmar que qualquer função poderia ser expressa pela série que leva o seu nome, ele tem o mérito de ter explicitado a série que representaria a função. Um dos primeiros a reconhecer que nem toda função pode ser representada pela série de Fourier foi Dirichlet, o qual produziu os primeiros critérios para a validade dessa representação.

1.2 Função Periódica

Definição 1.1 *Uma função* $f(x) = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *é periódica de período* T *se* $f(x+T) = f(x)$*, para todo* x*. Sempre que falarmos em período, consideraremos* $T \neq 0$*.*

Exemplo 1.1 *A função* $sen\,(x)$ *tem período* 2π*,* 4π*,* 6π*, ... , pois* $sen\,(x+\pi)$*,* $sen\,(x+2\pi)$*,* $sen\,(x+4\pi)$*,* $sen\,(x+6\pi)$*, ... são todas iguais a* $sen\,(x)$*. Todavia,* 2π *é o período mínimo, ou período de* $sen\,(x)$*. Ver gráfico na figura 1.1*

Exemplo 1.2 *A função* $f\,(x) = x - [x]$*, onde* $[x]$ *representa o maior inteiro menor do que ou igual a* x*, é periódica de período* 1*. Veja o gráfico da figura 1.2. Se* T *é um período para a função* f*, então* $2T$ *também é um período, pois* $f(x+2T) = f(x+T) = f(x)$*.*

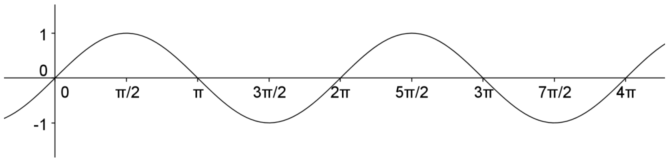


Figura 1.1: Seno

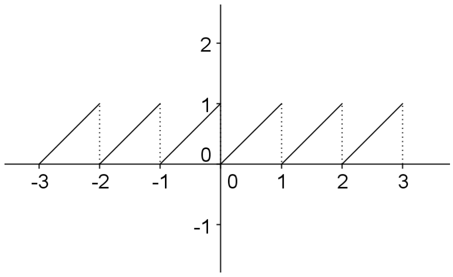


Figura 1.2: f(x)=x-[x]

Exemplo 1.3 *O período fundamental T da função $sen\dfrac{n\pi x}{L}$ pode ser determinado do seguinte modo. Devemos ter:*

$$sen\frac{n\pi\,(x+T)}{L} = sen\frac{n\pi x}{L},\ para\ todo\ x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$sen\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{n\pi T}{L} + \cos\frac{n\pi x}{L}sen\frac{n\pi T}{L} = sen\frac{n\pi x}{L} \tag{1.1}$$

Para $x = \dfrac{L}{2n}$, obtemos

$$sen\frac{\pi}{2}\cos\frac{n\pi T}{L} = sen\frac{\pi}{2}$$

o que implica

$$\cos\frac{n\pi T}{L} = 1 \tag{1.2}$$

e daí, usando a identidade $sen^2\theta + \cos^2\theta = 1$, obtemos

$$sen\frac{n\pi T}{L} = 0 \tag{1.3}$$

Como estamos interessados no menor valor positivo de T que satisfaça (1.2) e (1.3), simultaneamente, obtemos $\dfrac{n\pi T}{L} = 2\pi$, isto é, o período fundamental de $sen\dfrac{n\pi x}{L}$ é $T = \dfrac{2L}{n}$. O período fundamental de $\cos\dfrac{n\pi x}{L}$ é também $\dfrac{2L}{n}$.

1.3 Funções Seccionalmente Contínuas

Definição 1.2 *Sejam $f : I \to \mathbb{R}$ uma função definida num subconjunto $I \to \mathbb{R}$ e seja $x_0 \in I$ um ponto de acumulação de I.*

- *Dizemos que* x_0 *é um ponto de descontinuidade de* f *quando* $f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *ou quando este limite não existe;*

- *Dizemos que* x_0 *é um ponto de descontinuidade de primeira espécie quando existem os limites laterais* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$*, mas eles são diferentes;*

- *Dizemos que* x_0 *é um ponto de descontinuidade de segunda espécie quando não existe pelo menos um dos limites laterais* $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ *e* $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$.

Definição 1.3 *Uma função* $f(x) = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados* $a < b$ *existem* $a \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_n \leq b$ *tais que* f *é contínua em cada intervalo aberto* (a_j, a_{j+1}), $j = 1, \cdots, n-1$ *e existem os limites*

$$f\left(a_j + 0\right) = \lim_{x \to a_j^+} f\left(x\right) \text{ e } f\left(a_j - 0\right) = \lim_{x \to a_j^-} f\left(x\right)$$

Toda função contínua é seccionalmente contínua. A função $f\left(x\right) = \frac{1}{x}$ *não é seccionalmente contínua, pois sua descontinuidade é de segunda espécie. A função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \geq 1 \\ \dfrac{1}{n}, & se \quad \dfrac{1}{(n+1)} \leq x < \dfrac{1}{n}, n = 1, 2... \\ 0, & se \quad x \leq 0 \end{cases}$$

não é seccionalmente contínua, apesar de todas as descontinuidades serem de primeira espécie, acontece porém que no intervalo de $(0, 1)$ *há um número infinito de tais descontinuidades.*

Exemplo 1.4 *A função* $f\left(x\right) = x - [x]$. *Ver gráfico na figura 1.2.*

Exemplo 1.5 *A função* $f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad 0 \leq x < \pi \\ 0, & se \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases}$ *e periódica de período* 2π.

Exemplo 1.6 *A função* $f\left(x\right) = |x|$, *para* $x \leq 1$ *é periódica de período* 2.

1.4 Séries de Fourier

Definição 1.4 *Seja* $f(x)$ *definida no intervalo* $[-L, L]$ *e determinada fora desse intervalo por* $f(x+2L) = f(x)$, *isto é, suponhamos* $f(x)$ *periódica de período* $2L$. *Define-se a Série*

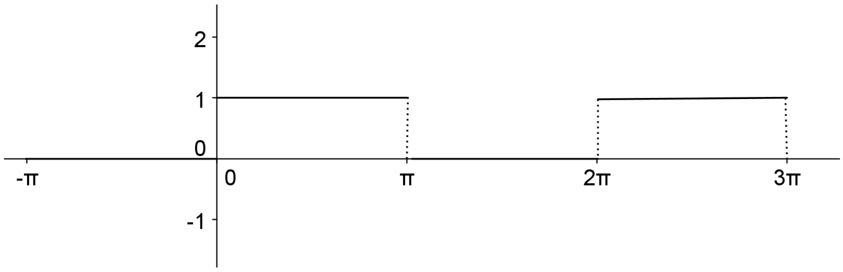
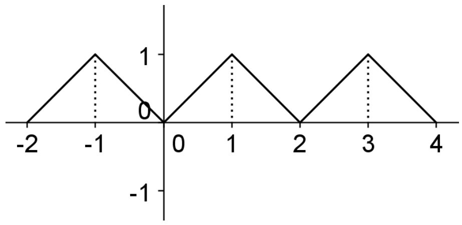


Figura 1.3:



de Fourier de $f(x)$ *como*

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1.4}$$

onde os coeficientes de Fourier a_n *e* b_n *são*

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \tag{1.5}$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)\, sen \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1.6}$$

1.5 Condição de Dirichlet para convergencia

Teorema 1.1 *Suponhamos que:*

1. $f(x)$ *seja definida, exceto, possivelmente em um número finito de pontos de* $[-L, L]$*;*

2. $f(x)$ *seja periódica de período* $2L$*;*

3. $f(x)$ *e* $f'(x)$ *sejam seccionalmente contínuas em* $[-L, L]$.

Então a série (1.4) com os coeficientes dados por (1.5) e (1.6) converge para:

- $f(x)$, *se* x *é ponto de continuidade.*
- $\dfrac{f(x+0) - f(x-0)}{2}$, *se* x *é ponto de descontinuidade.*

De acordo com o resultado acima, podemos escrever:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{1.7}$$

em qualquer ponto x de continuidade. Porém, se x é ponto de descontinuidade, o membro esquerdo deve ser substituído por $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$ de forma que a série converge para a média dos valores $f(x+0) + f(x-0)$.

As condições 1, 2 e 3 impostas a $f(x)$ são suficientes, mas não são necessárias, isto é, se elas são satisfeitas, a convergência está garantida. Todavia, não sendo elas satisfeitas, a série poderá convergir ou não. Essas condições são em geral satisfeitas nos problemas que surgem na ciência ou na engenharia. Não se conhecem, até o presente, condições necessárias e suficientes para a convergência das Séries de Fourier.

Exemplo 1.7 *Prove que*

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + ... + \cos Mt = \frac{sen\left(M + \frac{1}{2}\right)t}{2sen\frac{1}{2}t}$$

Solução:

Temos

$$\cos nt sen\frac{1}{2}t = \frac{1}{2}\left\{sen\left(n + \frac{1}{2}\right)t - sen\left(n - \frac{1}{2}\right)t\right\}$$

Somando de $n = 1$ até M

$$sen\frac{1}{2}t\{\cos t + \cos 2t + ... + \cos Mt\} =$$

$$= \left(sen\frac{3}{2}t - sen\frac{1}{2}t\right) + \left(sen\frac{5}{2}t - sen\frac{3}{2}t\right) + ... + \left[sen\left(M + \frac{1}{2}\right)t - sen\left(M - \frac{1}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left\{sen\left(M + \frac{1}{2}\right)t - sen\frac{1}{2}t\right\}$$

Dividindo por $sen\frac{1}{2}t$ e adicionando $\frac{1}{2}$, obtemos o resultado desejado.

1.6 Convergência Uniforme

Uma série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge** se a sucessão das reduzidas, também chamadas de somas parciais, converge. Lembremos que a sucessão das reduzidas é aquela cujo termo geral é

$$A_n = \sum_{j=1}^{n} a_n(\text{reduzida de ordem n}).$$

Uma série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, onde $u_n : I \to \mathbb{R}$ são funções reais definidas em um subconjunto I de $\mathbb{R}$, **convergirá pontualmente** se, para cada $x \in I$ fixado, a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convergir. Isso equivale a dizer que, dados $\epsilon > 0$ e $x_0 \in I$ existe um inteiro N dependendo de ϵ e de x_0, tal que $\left|\sum_{j=n}^{m} u_j(x_0)\right| < \epsilon$,para todos $n < m$, tais que $n \geq N$.

Definição 1.5 *Uma série de funções* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **convergirá uniformemente** *se, dado* $\epsilon > 0$*, existir um inteiro N, dependendo apenas de* ϵ*, tal que* $\left|\sum_{j=n}^{m} u_j(x)\right| < \epsilon$*, para todos* $m > n \geq N$.

Exemplo 1.8 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$*, onde* $u_n(x) = \dfrac{x}{n^2}$ *é considerada como definida em* $[0, 1]$*, converge uniformemente. De fato, para* $x \in [0, 1]$*,*

$$\left|\sum_{j=n}^{m} u_j(x)\right| \leq \sum_{j=n}^{m} \frac{1}{j^2}$$

E portanto, dado $\epsilon > 0$*, podemos determinar um inteiro* N*, independente de* x *e dependente apenas de* ϵ*, tal que* $\sum_{j=n}^{m} \dfrac{1}{j^2} < \epsilon$ *, para* $m > n \geq N$.

Exemplo 1.9 *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$*, onde* $u_1(x) = x$*,* $u_n(x)$*,* $x^n - x^{n-1}$*,* $n > 1$*, é uma função definida para* $0 \leq x \leq 1$*, converge pontualmente para cada* $x \in [0, 1]$*. De fato, a reduzida de ordem n,* $U_n(x) = x^n$ *convergirá para* 0 *se* $0 \leq x < 1$*, e para* 1 *se* $x = 1$*. Tal série não converge uniformemente, pois, dados* $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{2}$*e* N *inteiro, tomamos* $x = (2\varepsilon)^{\frac{1}{(N-1)}}$ *em*

$$\sum_{j=N}^{m} u_j(x) = x^m - x^{N-1}$$

e daí, $\left|x^m - x^{N-1}\right| = \left|(2\varepsilon)^{\frac{m}{(N-1)}} - 2\varepsilon\right|$*. Logo, se m for suficientemente grande,* $(2\varepsilon)^{\frac{m}{(N-1)}} < \varepsilon$*, e obtemos que*

$$\left|\sum_{j=N}^{m} u_j(x)\right| > \varepsilon$$

para $x = (2\varepsilon)^{\frac{1}{(N-1)}}$.

Ao verificarmos que a série do exemplo 1.8 converge uniformemente, usamos o artifício de majorar a série de funções por uma série numérica convergente, esta idéia é mostrada pelo Teste M de Weierstrass, que será anunciado a seguir. Esse critério não só assegura convergência uniforme, mas também convergência absoluta.

Definição 1.6 *Uma série* $\sum u_n(x)$ **convergirá absolutamente** *se a série* $\sum |u_n(x)|$ *dos valores absolutos convergir.*

Teste M de Weierstrass: "Seja $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ uma série de funções $u_n : I \to \mathbb{R}$ definida em um subconjunto I de $\mathbb{R}$. Suponha que existam constantes $M_n \geq 0$ tais que

$$|u_n(x)| \leq M_n, \text{ para todo } x \in I.$$

e que a série numérica $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ convirja. Então, a série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ converge uniforme e absolutamente em I".

Esse critério de convergência uniforme reduz o problema de verificar a convergência de uma série de funções àquele da convergência de uma série numérica.

A razão para estudar convergência uniforme é que as séries que convergem uniformemente apresentam excelentes propriedades. A seguir veremos algumas delas que enunciamos a seguir sob a forma de proposições, porém não faremos demonstrações.

Proposição 1.1 *Suponhamos que as funções* u_n *sejam contínuas e que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *convirja uniformemente. Então, a soma da série* $u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *é também uma função contínua.*

Observação 1.1 *No exemplo 1.8, a soma da série é* $\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}\right) x = \frac{\pi^2 x}{6}$*, que é uma função contínua em* $[0, 1]$*.*

Observação 1.2 *No exemplo 1.9, a soma da série é a função* $u(x)$*, definida como sendo* 0 *para* $0 \leq x < 1$ *e* 1 *para* $x = 1$*. Logo, uma função descontínua. Podemos observar que nesse caso, as funções* $u_n(x)$ *são contínuas, mas a convergência não é uniforme.*

Proposição 1.2 *Suponhamos que as funções* u_n *sejam integráveis em um intervalo* I *e que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ *convirja uniformemente. Então,*

$$\int_I \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I u_n(x) dx$$

Proposição 1.3 *Suponhamos que as funções $u_n(x)$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ das derivadas convirja uniformemente. Suponhamos ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ convirja. Então,*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$$

1.7 Coeficientes de Fourier

Admita que 1.7 é uma identidade e que a série no segundo membro de 1.7 convirja uniformemente. Da proposição 1.1, sabe-se que $f(x)$ é contínua (pois as funções de senos e cossenos são contínuas) e deve ser periódica de período $2L$, pois o período de $\cos\frac{\pi x}{L}$ é $2L$ e $2L$ é período também para as demais funções de senos e cossenos que aparecem na série. Dessa forma, usando a proposição 1.2 podemos integrar ambos os lados da igualdade para obter

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}dx$$

Como

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}dx = \int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}dx = 0$$

Temos então que

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_o}{2}\int_{-L}^{L} dx$$

Resolvendo esta equação, temos:

$$\begin{aligned}\int_{-L}^{L} f(x)dx &= \frac{a_0}{2}[x]_{-L}^{L} = \frac{a_0}{2}[L-(-L)] = \frac{a_0}{2}[L+L] = \frac{a_0}{2}2L\\ \int_{-L}^{L} f(x)dx &= a_0L\end{aligned}$$

Daí, temos que:

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx \tag{1.8}$$

Para obter os demais coeficientes, procedemos da seguinte maneira:

1. Para obter a_n: Multiplicamos (1.7) por $\cos\frac{n\pi x}{L}$ e integramos de $-L$ a L, usando as seguintes relações de ortogonalidade:

   - $\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L} sen\frac{m\pi x}{L}dx = 0$, se $n, m \geq 1$;

- $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} L, & \text{se} \quad n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se} \quad n \neq m, n, m \geq 1; \end{cases}$
- $\displaystyle\int_{-L}^{L} sen\frac{n\pi x}{L}sen\frac{m\pi x}{L}dx = \begin{cases} L, & \text{se} \quad n = m \geq 1, \\ 0, & \text{se} \quad n \neq m, n, m \geq 1; \end{cases}$

Procedendo dessa forma, temos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}dx +$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}sen\frac{n\pi x}{L}dx\right)$$

Para $m = n$

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx = a_m L$$
$$a_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}dx \tag{1.9}$$

2. Para obter b_n: Agora, multiplicando (1.7) por $sen\dfrac{m\pi x}{L}$ e integrando de $-L$ a L, usando também as relações de ortogonalidade, anteriormente citadas, temos

$$\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{m\pi x}{L}dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L}sen\frac{m\pi x}{L}dx +$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}sen\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}dx + b_n\int_{-L}^{L}sen\frac{m\pi x}{L}sen\frac{n\pi x}{L}dx\right)$$

Para $m = n$

$$\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{m\pi x}{L}dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\int_{-L}^{L}sen\frac{m\pi x}{L}sen\frac{n\pi x}{L}dx$$
$$\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{m\pi x}{L}dx = b_m L$$
$$b_m = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{m\pi x}{L}dx \tag{1.10}$$

De (1.8), (1.9) e (1.10), obtemos

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, n \geq 0 \tag{1.11}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx, n \geq 1 \tag{1.12}$$

Introduzimos o $\dfrac{1}{2}$ antes do a_0 em (1.7), porque, dessa forma, teremos uma única fórmula para todos os a_n. Agora sim, podemos definição

Definição 1.7 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado; em particular; $\int_{-L}^{L} |f(x)|\, dx < \infty$. Os números a_n, para $n \geq 0$ e b_n, para $n \geq 1$ dados em (1.11) e (1.12) são definidos como os coeficientes de Fourier da função f. A exigência da integrabilidade e integrabilidade absoluta de f é necessário para que as expressões (1.11) e (1.12) façam sentido.*

Exemplo 1.10

$$f(x) = \begin{cases} 0, & se \quad -5 < x < 0, \\ 3, & se \quad 0 < x < 5; \end{cases}$$

a) Determine os coeficientes de Fourier correspondentes à função.

b) Escreva a série e Fourier correspondente.

c)Como deveríamos definir $f(x)$ em $x = -5$, $x = 0$ e $x = 5$ a fim de que a série de Fourier convirja para $f(x)$ em $-5 < x < 5$?

Solução:

O gráfico de $f(x)$ é o seguinte:

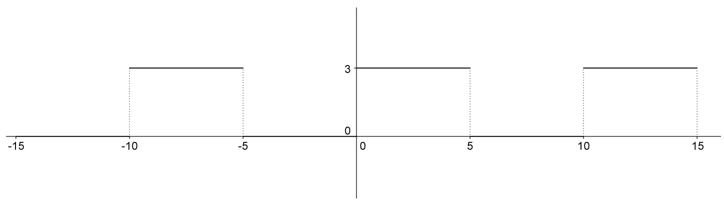


Figura 1.4:

(a) Período: $2L = 10$ e $L = 5$. Escolhemos o intervalo de c a $c + 2L$ como -5 a 5, de modo que $c = -5$. Então:

Se $n \neq 0$*:*

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)\cos\frac{n\pi x}{5}dx \\
&= \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0}(0)\cos\frac{n\pi x}{5}dx + \int_0^5 (3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right) \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{n\pi x}{5} \\
&= \frac{3}{5}\left[\left(\frac{5}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{5}\right)\right]_0^5 = 0
\end{aligned}$$

Se $n = 0$*:*

$$\begin{aligned}
a_n &= a_0 = \frac{3}{5}\int_0^5 \cos\frac{0\pi x}{5}dx = \frac{3}{5}\int_0^5 dx = 3 \\
b_n &= \frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)sen\frac{n\pi x}{L}dx \\
&= \frac{1}{5}\int_{-5}^{5} f(x)sen\frac{n\pi x}{5}dx \\
&= \frac{1}{5}\left(\int_{-5}^{0}(0)sen\frac{n\pi x}{5}dx + \int_0^5 (3)\cos\frac{n\pi x}{5}dx\right) \\
&= \frac{3}{5}\int_0^5 sen\frac{n\pi x}{5} \\
&= \frac{3}{5}\left[\left(\frac{-5}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{5}\right)\right]_0^5 \\
&= \frac{3\,(1-\cos n\pi)}{n\pi}
\end{aligned}$$

b) A série de Fourier correspondente é:

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L}\right) &= \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\,(1-\cos n\pi)}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{5} \\
&= \frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\left(sen\frac{\pi x}{5} + \frac{1}{3}sen\frac{3\pi x}{5} + \frac{1}{5}sen\frac{5\pi x}{5} + ...\right)
\end{aligned}$$

c)Como $f(x)$ *satisfaz as condições de Dirichlet, podemos afirmar que a série converge para* $f(x)$ *em todos os pontos de continuidade, e para* $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *nos pontos de continuidade. Em* $x = 5,\ 0$ *e* 5*, que são os pontos de descontinuidade, a série converge para* $\dfrac{3+0}{2} = \dfrac{3}{2}$*, como se vê no gráfico. A série convergirá para* $f(x)$ *em* $-5 < x < 5$ *se*

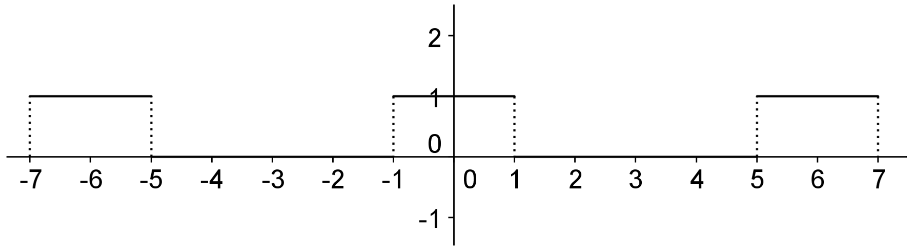


Figura 1.5:

definirmos $f(x)$ como segue:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, & se \quad x = -5 \\ 0, & se \quad -5 < x < 0 \\ \frac{3}{2}, & se \quad x = 0 \\ 3, & se \quad 0 < x < 5 \\ \frac{3}{2}, & se \quad x = 5 \end{cases}$$

Exemplo 1.11 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -3 < x < -1, \\ 1, & -1 < x < 1, \\ 0, & 1 < x < 3; \end{cases}$$

e suponha que $f(x+6) = f(x)$, veja a figura a seguir. Encontre os coeficientes da Série de Fourier de f.

Note que nos pontos de descontinuidade não foi atribuído valor para $f(x)$, como em $x = -1$ e em $x = 1$. Isso não afeta os valores dos coeficientes de Fourier, já que eles são calculados por uma integral e o valor da integral não é afetado pelo valor do integrando em um único ponto ou em um número finito de pontos. Portanto, os coeficientes são os mesmos, independentemente dos valores que porventura forem atribuídos a $f(x)$ nos pontos de descontinuidade.

Como f tem período 6, segue que $L = 3$, neste problema. Em consequência, a Série de Fourier de f tem a forma

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{3} + b_n sen \frac{n\pi x}{3} \right)$$

onde os coeficientes a_n e b_n são dados pelas equações (1.11) e (1.12) com $L = 3$. Temos

$$a_0 = \frac{1}{3} \int_{-3}^{3} f(x)dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^{1} dx = \frac{2}{3}$$

Analogamente,

$$a_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} cos\frac{n\pi x}{3}dx = \frac{1}{n\pi}\left[sen\frac{n\pi x}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{n\pi}sen\frac{n\pi x}{3}, n = 1, 2, 3...$$

e

$$b_n = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1} sen\frac{n\pi x}{3}dx = -\frac{1}{n\pi}\left[cos\frac{n\pi x}{3}\right]_{-1}^{1} = 0, n = 1, 2, 3...$$

Assim, a série de Fourier de f é:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} sen\frac{n\pi}{3} cos\frac{n\pi x}{3} \\ &= \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left[cos(\pi x/3) + \frac{cos(2\pi x/3)}{2} - \frac{cos(4\pi x/3)}{4} - \frac{cos(5\pi x/3)}{5} + ...\right] \end{aligned}$$

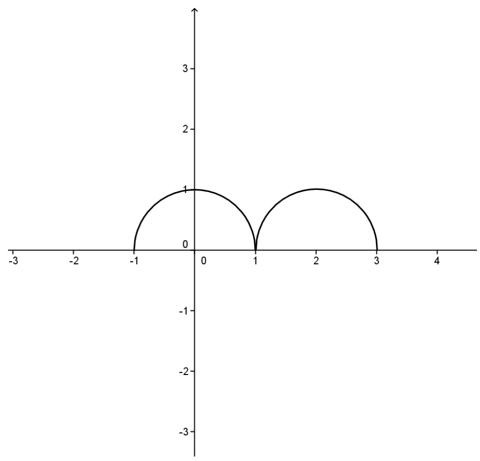
1.8 Teorema de Fourier

Definição 1.8 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se ela for seccionalmente contínua e se a função derivada f' for também seccionalmente contínua. Observe que a derivada f' não está definida em todos os pontos: com certeza $f'(x)$ não existe nos pontos x onde f é descontínua; e mais, $f'(x)$ pode não existir, mesmo em alguns pontos onde f é contínua. As funções dos exemplos, (1.4), (1.5) e (1.6) são seccionalmente diferenciáveis.*

A seguinte função é contínua, mas não seccionalmente diferenciável

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & \text{se} \quad |x| \leq 1 \\ \text{e periódica de período 2.} & \end{cases}$$

Pois, nos pontos onde f' é descontínua, a descontinuidade é de segunda espécie. Veja o gráfico:



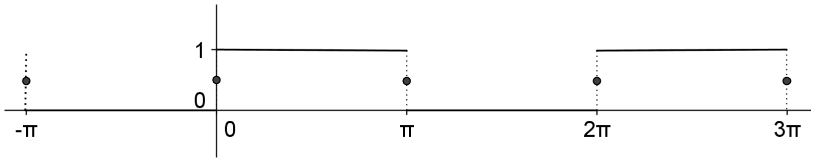


Figura 1.6:

Teorema de Fourier: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável e de período $2L$. Então a série de Fourier da função f dada em

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

converge em cada ponto x, para $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$, isto é,

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n sen \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Exemplo 1.12 *Calcular a série de Fourier da função f definida no exemplo 1.5:*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad 0 \leq x < \pi \\ 0, & se \quad -\pi \leq x < 0 \end{cases} \quad e \; periódica \; de \; período \; 2\pi.$$

E traçar o gráfico da função definida por essa série.

Resolução:

Cálculo dos coeficientes:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} dx = 1$$

E para $n \neq 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{sennx}{n} \right]_0^{\pi} = 0 \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} sennx dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{-cosnx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{n\pi}(1 - \cos n\pi) \end{aligned}$$

Ou $b_{2k} = 0$ e $b_{2k-1} = \frac{2}{(2k-1)\pi}$, $k = 1, 2, 3, ...$
A série de Fourier será:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{2k-1} sen \, (2k-1) \, x$$

Pelo Teorema de Fourier, o gráfico da função definida pela série é:

Exemplo 1.13 *Use os resultados do exemplo 1.12 para obter uma expressão em série para π.*

Resolução:

No ponto $x = \dfrac{\pi}{2}$, a série de Fourier é igual a 1, em virtude do Teorema de Fourier. Logo,

$$1 = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} sen \left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

ou seja,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} sen \left[(2k-1)\frac{\pi}{2}\right]$$

ou finalmente,

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

Que é conhecida como a série de Leibniz.

1.9 Séries de Fourier de funções pares e ímpares

Definição 1.9 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é par se $f(x) = f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso significa que o gráfico da função f é simétrico em relação ao eixo dos y. Assim, podemos dizer as funções x^4, $2x^6 - 4x^2 + 5$, $\cos x$, $e^x + e^{-x}$ são funções pares.*

Definição 1.10 *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é ímpar se $f(x) = -f(-x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Isso significa que o gráfico da função f é simétrico com relação à origem. Dessa forma, podemos dizer que as funções x^3, $x^5 - 3x^3 + 2x$, $senx$, são funções ímpares.*

Proposição 1.4

- *A soma de duas funções pares é uma função par. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;*
- *O produto de duas funções pares é uma função par;*
- *O produto de duas funções ímpares é uma função par;*
- *O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.*

1.10 Forma complexa da Série de Fourier

Utilizamos a fórmula de Euler,

$$e^{i\theta} = \cos\theta + seni\theta$$

e suas consequências,

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

e

$$sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Para escrever

$$a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n sen\frac{n\pi x}{L} = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) e^{\frac{in\pi x}{L}} + \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i}\right) e^{\frac{-in\pi x}{L}}$$

Logo, o coeficiente C_n de $e^{\frac{in\pi x}{L}}$ é dado por

$$C_n = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i}\right) = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\left(\cos\frac{n\pi x}{L} - isen\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

ou seja,

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{\frac{-in\pi x}{L}} dx$$

Definimos também,

$$C_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)$$

Resumindo, mostramos que se, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica de período 2L, integrável e absolutamente integrável, então a série de Fourier poderá ser escrita na forma

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{\frac{in\pi x}{L}}$$

onde

$$C_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x) e^{-in\pi x/L} dx, \text{ para } n = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Capítulo 2

Transformada de Fourier

2.1 Introdução

Neste capítulo abordaremos a teoria da Transformada de Fourier para Funções de $\mathcal{L}^1$. A Série de Fourier só pode ser definida para funções periódicas, enquanto que a Transformada de Fourier abrange uma classe funções bem mais ampla. A Transformada de Fourier é utilizada para tratar problemas de vibração de cordas infinitas e semi-infinitas, problemas da condução de calor em barras infinitas e semi-infinitas e o problema de Dirichlet para a equação de Laplace em um semiplano, porém não nos aprofundaremos muito nestas aplicações, faremos apenas uma breve introdução a esta transformada.

2.2 Motivação

Na resolução das equações diferenciais o que pode nos causar algum problema é a presença da derivada da função incógnita. Consideremos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$3y" + 5y' + 2y = f(x)$$

A qual podemos representar assim:

$$3D^2y + 5Dy + 2y = f(x), \text{ com } D = \frac{d}{dx}.$$

Seria extremamente conveniente se pudéssemos resolver essa equação como se ela fosse uma equação algébrica e escrever:

$$y(x) = \frac{f(x)}{3D^2 + 5D + 2}$$

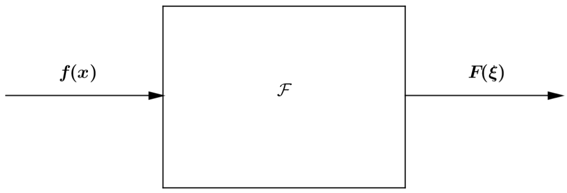


Figura 2.1:

Mas isso não faz sentido, porém deste raciocínio podemos extrair algo. Nosso esforço deve ser direcionado a "algebrizar"a equação diferencial de algum modo.

Podemos imaginar como se a Transformada de Fourier fosse uma caixa, conforme mostrado no figura, onde a seta no lado esquerdo representa a função que entra na caixa e a seta do lado direito representa a função que sai da caixa após ser operada ou transformada.

Usamos a notação $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$. Este sistema tem três propriedades extremamente importantes, que passaremos a explicar.

- O sistema é *linear*, o que quer dizer que ele é aditivo e homogêneo. Aditividade significa que, se temos duas funções de entrada, $f(x)$ e $g(x)$, tanto faz somá-las antes e, a seguir, passar pela caixa, como passá-las pela caixa e somar as funções de saída $F(\xi)$ e $G(\xi)$, depois; o resultado é o mesmo. Na notação acima: $\mathcal{F}[f(x)+g(x)] = \mathcal{F}[f(x)] + \mathcal{F}[g(x)]$. Homogeneidade significa que tanto faz multiplicar a função de entrada $f(x)$ por uma constante α e, a seguir, passar pela caixa, como passá-la pela caixa e depois multiplicar a função de saída $F(\xi)$ por α: $\mathcal{F}[\alpha f(x)] = \alpha\mathcal{F}[f(x)]$. O esquema é o da figura seguinte:

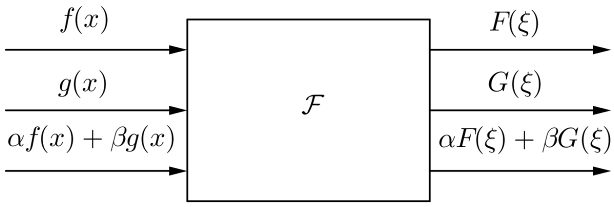


Figura 2.2:

Nota: Em termos de Álgebra Linear, o que se tem é que $\mathcal{F}$ é uma transformação ou um operador linear.

- O sistema *"destrói"derivadas*, isto é, se $f'(x)$ entra na caixa, ela sai como $i\xi F(\xi)$, onde $i = \sqrt{-1}$. O esquema é o seguinte:

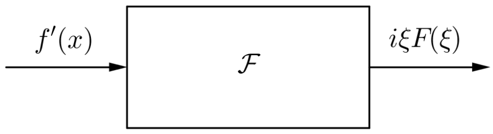


Figura 2.3:

- O sistema é *inversível*, isto é, existe uma outra caixa, denominada $\mathcal{F}^{-1}$, que, se atravessada pela função de saída $F(\xi)$ da caixa $\mathcal{F}$, fornece $f(x)$, de volta. Assim, se $F(\xi) = \mathcal{F}[f(x)]$, temos $f(x) = \mathcal{F}^{-1}[F(\xi)]$.

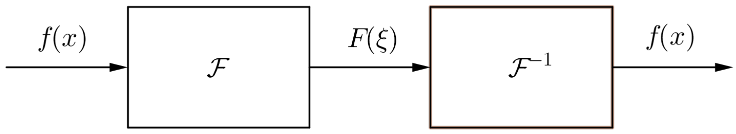


Figura 2.4:

A idéia, agora, é usar as três propriedades acima para resolver a equação diferencial. Primeiro, fazemos a equação diferencial passar pela caixa $\mathcal{F}$. Podemos imaginar a

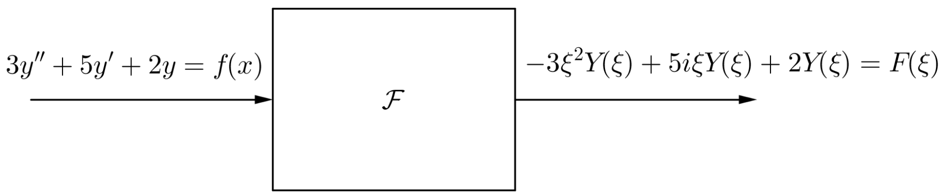


Figura 2.5:

existência de dois universos. Um de cada lado da caixa: o universo-x e o universo-ξ. O nosso problema, no universo-x, é uma equação diferencial. Mas ele é levado num problema algébrico equivalente no universo-ξ. Neste universo-ξ, o problema algébrico é resolvido trivialmente:

$$Y(\xi) = \frac{F(\xi)}{-3\xi^2 + 5i\xi + 2}$$

E finalmente, a idéia é passar Y pela caixa $\mathcal{F}^{-1}$ para obter a solução $y(x)$ do problema diferencial. Nosso trabalho será estudar bem a caixa $\mathcal{F}$. Que tipos de funções podem ser entradas na caixa $\mathcal{F}$? Essa e outras questões devem ser cuidadosamente tratadas.

2.3 Definição da Transformada de Fourier

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gostaremos de definir sua Transformada de Fourier pela expressão

$$F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

A expressão (1) envolve uma integral imprópria, que deve ser entendida no seguinte sentido:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x)dx = \lim_{M,N\to\infty} \int_{-M}^{N} e^{-ix\xi} f(x)dx$$

Onde M e N tendem independentemente para o infinito. Considerar o limite com M e N independentes é importante quando se lida com integrais impróprias, pois não queremos situações como esta:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xdx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} xdx = 0 \tag{2.1}$$

E pelo contrário, o que queremos dizer é que, neste caso, a integral imprópria em (2.1) não existe.

Que tipos de funções f devemos considerar para que as integrais no segundo membro de (2) existam e para que o limite exista?

Vamos inicialmente exibir uma classe de funções para as quais (1) está bem definida e que contém a maior parte das funções presentes nas aplicações. Afirmar que (1) está bem definida siginifica que para cada ξ, a integral converge para um número e, assim, temos uma função F bem definida em $\mathbb{R}$. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está nessa classe se:

1. f é seccionalmente contínua em cada intervalo $[-M, N]$, e

2. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty$

Observe que (1) implica que a função $e^{-ix\xi}f(x)$ é limitada e integrável em $[-M, N]$. A condição (2) implica que o limite (2) exista: de fato, podemos observar que, dado $\epsilon > 0$, existe $K > 0$ tal que

$$\int_{|x|>K} |f(x)|\, dx < \epsilon$$

E que

$$\left| \int_{|x|>K} e^{-ix\xi} f(x) dx \right| \leq \int_{|x|>K} |f(x)|\, dx$$

Podemos ainda definir uma classe mais geral de funções f para as quais (1) está bem definida: O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que as integrais impróprias de f e $|f|$ existem é chamado de espaço $\mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Cada função do espaço é uma função $\mathcal{L}^1$. Isso requer que f e $|f|$ sejam integráveis em cada intervalo $[-M, N]$ e que os limites abaixo existam:

$$\lim_{M,N\to\infty} \int_{-M}^{N} f(x)dx \text{ e } \lim_{M,N\to\infty} \int_{-M}^{N} |f(x)|\, dx$$

Observe que se f for seccionalmente contínua em cada intervalo $[-M, N]$ e se o segundo limite em (3) existir, a função será $\mathcal{L}^1$.

Nota: É conveniente trabalhar com $\mathcal{L}^1$, pois a Transformada de Fourier resulta em algo com melhores propriedades. Entretanto, chamamos atenção para o fato de que existem funções que não são $\mathcal{L}^1$, para as quais a expressão (1) converge, mas não absolutamente, por exemplo, $f(x) = \dfrac{senx}{x}$.

Definição 2.1 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ for uma função $\mathcal{L}^1$, sua **Transformada de Fourier** $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ se definirá pela expressão:*

$$\mathcal{F}[f](\xi) \equiv F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx$$

2.4 Transformada Inversa de Fourier

A inversão da transformada de Fourier, obedece uma fórmula semelhante à da transformada direta. Recuperamos a $f(x)$ através da transformada inversa de Fourier.

Definição 2.2 *Definimos a transfromada de Fourier inversa, $F^{-1}[F(\xi)] = f(x)$ por,*

$$F^{-1}[F(\xi)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-ix\xi} d\xi$$

2.5 Propriedades da Transformada de Fourier

Enunciaremos as propriedades da transformada de Fourier na forma de proposições.

Proposição 2.1 *(Linearidade). Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são funções absolutamente integráveis e $a, b \in \mathbb{R}$, então:*

$$\mathcal{F}(af(x) + bg(x) = a\mathcal{F}(f(x)) + b\mathcal{F}(g(x)).$$

Prova: *Segue direto da definição e da propriedade de linearidade da integral.*

Proposição 2.2 *(Transformadas de Fourier de Derivadas). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função diferenciável absolutamente integrável tal que f' também é uma função absolutamente integrável, então*

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ uma função duas vezes diferenciável absolutamente integrável tal que (f') e (f'') também são funções absolutamente integráveis, então

$$\mathcal{F}(f'')(\xi) = i\xi\mathcal{F}(f')(\xi) = -\xi^2\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Em geral, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função k vezes diferenciável absolutamente integrável tal que as suas derivadas até a ordem k também são funções absolutamente integráveis, então

$$\mathcal{F}(f^{(k)})(\xi) = (i\xi)^k\mathcal{F}(f)(\xi)$$

Prova: *Integrando por partes, temos que*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f')(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x}dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\left[f(x)e^{-i\xi x}\right]_{-\infty}^{\infty} - (-i\xi)\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx\right] \\
&= i\xi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx \\
&= i\xi\mathcal{F}(x)
\end{aligned}$$

porque, como f' é absolutamente integrável, necessariamente $\lim\limits_{x\to\pm\infty}|f'(x)| = 0$, logo $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left|f'(x)e^{-i\xi x}\right|$ 0.

As fórmulas para as transformadas de Fourier de derivadas de ordem superior seguem da aplicação iterada desta fórmula.

Proposição 2.3 *(Derivadas de Transformadas de Fourier). Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável tal que $xf(x)$ também é uma função absolutamente integrável, então*

$$\mathcal{F}(xf(x))(\xi) = i\mathcal{F}(f)'(\xi)$$

Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ uma função absolutamente integrável tal que $x2f(x)$ também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(xf(x))(\xi) = -\mathcal{F}(f)''(\xi)$$

Em geral, se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável tal que $x^k f(x)$ também é uma função absolutamente integrável, então

$$\mathcal{F}(x^k f(x))(\xi) = i^k\mathcal{F}(f)^{(k)}(\xi)$$

Prova: *Passando a derivada para dentro do sinal de integração, temos*

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}\mathcal{F}(f(x))(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{d\xi}\left[f(x)e^{-i\xi x}\right]dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(-ix)f(x)e^{-i\xi x}dx = (-i)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\xi x}dx \\
&= -i\mathcal{F}(xf(x))(\xi)
\end{aligned}$$

Multiplicando ambos os lados por $-i$ obtemos a primeira fórmula. As outras fórmulas seguem da aplicação iterada da primeira.

Proposição 2.4 *(Transformada de Fourier de uma Translação). Se $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável, então*

$$\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) = e^{-i\xi a}\mathcal{F}(f(x))(\xi)$$

Reciprocamente,

$$\mathcal{F}(e^{iax}f(x))(\xi) = \mathcal{F}(f(x))(\xi - a)$$

Prova: *Mudando variáveis, temos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f(x-a))(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t-a)e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi(x+a)}dx \\
&= e^{-i\xi a}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\xi x}dx = e^{-i\xi a}\mathcal{F}(f(x))
\end{aligned}$$

A segunda fórmula é obtida diretamente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-i\xi x}f(x)\right)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax}f(x)e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi-a)x}dx \\
&= \mathcal{F}f(x)(\xi - a)
\end{aligned}$$

Proposição 2.5 *(Transformada de Fourier de uma Dilatação). Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ é uma função absolutamente integrável e $a \neq 0$, então*

$$\mathcal{F}(f(ax))(\xi) = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f)\left(\frac{\xi}{a}\right)$$

Em particular,

$$\mathcal{F}(f(-x))(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi)$$

Prova: *Mudando variáveis, se $a > 0$ temos que:*

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(ax))(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{\xi}{a}x}\frac{\xi}{a}dx \\ &= \frac{1}{a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{\xi}{a}x}dx = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f(x))\left(\frac{\xi}{a}\right)\end{aligned}$$

Se $a < 0$, temos

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(f(ax))(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-i\xi x}dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{\xi}{a}x}\frac{\xi}{a}dx \\ &= \frac{1}{-a}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\frac{\xi}{a}x}dx = \frac{1}{|a|}\mathcal{F}(f(x))\left(\frac{\xi}{a}\right)\end{aligned}$$

Observação 2.1 *A* **convolução** *de duas funções absolutamente integráveis f, g é definida como sendo a função*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt$$

Podemos assegurar que ela está bem definida (isto é, a integral imprópria que a define converge para todo x), se as funções f e g, além de serem absolutamente integráveis, são também quadrado-integráveis, isto é, seus quadrados também são absolutamente integráveis:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2\, dt, \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty$$

De fato, utilizando a desiguadade de Schwraz,

$$|ab| \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2},$$

válida para todos $a, b \in \mathbb{R}$, segue que,

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)g(t)|\, dt \leq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)|^2\, dt + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2\, dt < \infty$$

Denotamos o espaço das funções quadrado-integráveis na reta por $L^2(R)$. Além disso, a convolução de funções absolutamente integráveis, quando está definida, é também uma *função absolutamente integrável, de modo que a sua transformada de Fourier está definida:*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left|(f * g)(x)\right| dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)||g(t)| dt dx = \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| \, dx \right) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx \right) dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)| \, dt \right) \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

A transformada de Fourier comporta-se extremamente bem em relação a convoluções: ela transforma convolução de funções essencialmente em produto de funções:

Proposição 2.6 *(Transformada de Fourier de uma Convolução). Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ funções absolutamente integráveis, então*

$$\mathcal{F}(f * g) = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).$$

Prova: *Mudando a ordem de integração e usando a Proposição 2.4, temos*

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x) e^{-i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) g(s) ds \right] e^{-i\xi x} dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-s) e^{-i\xi x} dx \right] g(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{-i\xi s} \mathcal{F}(f)(\xi) \right] g(s) ds \\
&= \mathcal{F}(f)(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} g(s) e^{-i\xi s} ds = \mathcal{F}(f)(\xi) \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(g)(\xi)
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Condução de calor

3.1 Introdução

Neste capítulo faremos estudo sobre a condução de calor, para resolvê-lo podemos usar a Matemática que aprendemos no curso de Cálculo Diferencial e Integral, mas somente isso não será suficiente, é necessário algo mais e o método que utilizaremos para solucionar tal problema serão as Séries de Fourier.

3.2 Fluxo de calor em um fio

Considere um fio metálico, cilíndrico, com área de seção reta transversal constante igual a σ. Suponha-se que o fio coincida com o eixo dos x de um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais $t0x$, como mostra a figura a seguir.

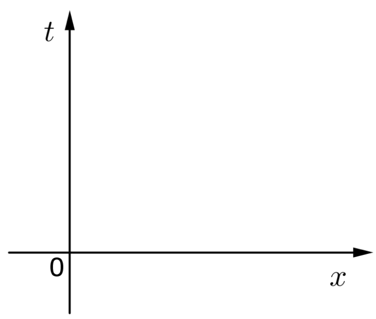


Figura 3.1:

Seja ρ a densidade do material, constante, sendo o fio suficientemente fino. A quantidade de calor necessária para elevar de um grau a tempertura de uma unidade de massa do material do fio denomina-se calor específico c do material. Suponha-se o fio completamente isolado do meio ambiente, de modo a não haver trocas de calor com o exterior. Admita-se um fluxo de calor no fio; deseja-se estudar a variação da temperatura ao longo do fio. Seja x um ponto do fio e represente-se por $u\left(x,t\right)$ a temperatura de sua seção no ponto x, no instante t. Calcule-se a quantidade de calor em um segmento $[x, x+\Delta x]$ do fio. Faça-se uma decomposição desse segmento através dos pontos $x = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = x + \Delta x$. A quantidade de calor no segmento $[x_{i-1}, x_i]$ dessa composição é aproximadamente, no instante t,

$$\sigma\rho c\left(x_i - x_{i-1}\right) u\left(\xi_i, t\right)$$

sendo ξ_i um ponto do intervalo $(x_{i-1} - x_i)$. Está se supondo que a temperatura $u\left(x,t\right)$ seja duas vezes continuamente derivável em relação a x e uma vez continuamente derivável em relação a t. A quantidade de calor no segmento $[x, x+\Delta x]$ será aproximadamente,

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma\rho c\left(x_i - x_{i-1}\right) u\left(\xi_i, t\right)$$

no instante t. Logo, obter-se-á uma melhor aproximação quando se fizer a amplitude máxima dos intervalos $(x_{i-1} - x_i)$ tender para zero. Representando-se por $Q(t)$ a quantidade de calor no instante t, no segmento $[x, x+\Delta x]$, o limite do somatório, quando máx.$(x_i - x_{i-1})$, tende a zero, existe, devido às hipóteses sobre $u\left(x,t\right)$, obtendo-se

$$Q\left(t\right) = \int_{x}^{x+\Delta x} \sigma\rho c u\left(\xi, t\right) d\xi$$

A lei de Fourier sobre transferência de calor diz que a variação do fluxo de calor através da seção reta do fio é proporcional ao gradiente da temperatura $u\left(x,t\right)$ no ponto x considerado. O gradiente, neste caso unidimensional, é $\dfrac{\partial u}{\partial x}$. O calor flui das temperaturas altas para as baixas e o gradiente tem a direção apontando para o intervalo dos valores maiores da função. Portanto, pela lei de Fourier, pode-se concluir que o calor flui através da seção reta em x, na proporção de

$$-k\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\left(x,t\right)$$

sendo k uma constante própria do material, denominada condutividade térmica. Analogamente, a proporção em que o calor flui no ponto $x+\Delta x$ é

$$-k\sigma\frac{\partial u}{\partial x}\left(x+\Delta x,t\right)$$

A quantidade de calor no segmento $[x, x + \Delta x]$ é a diferença entre o que flui em $x + \Delta x$ e o que flui em x, devendo ser igual à variação da quantidade de calor no segmento inteiro $[x, x + \Delta x]$. Formalmente, tem-se

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = k\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} (x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) \right],$$

isto é,

$$\int_{x}^{x+\Delta x} \rho\sigma c \frac{\partial u}{\partial t} (\xi, t) \, d\xi = k\sigma \left[\frac{\partial u}{\partial x} (x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x} (x, t) \right].$$

Dividindo-se ambos os membros por Δx, tomando-se o limite quando Δx tende a zero, observando-se que o integrando é uma função contínua de ξ, obtém-se,

$$\rho\sigma c \frac{\partial u (x, t)}{\partial t} = k\sigma \frac{\partial^2 u (x, t)}{\partial x^2},$$

em cada ponto x do fio. Fazendo-se $a^2 = \dfrac{k}{\rho c}$, obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

para todo ponto x do fio.

Suponha-se que exista uma fonte externa de calor com uma intensidade de $f (x, t)$ calorias por unidade do fio, por unidade de tempo no instante t. Admitindo-se essa função contínua, a quantidade de calor fornecida ao segmento $[x, x + \Delta x]$, por unidade de tempo, seria

$$\int_{x}^{x+\Delta x} f (\xi, t) \, d\xi.$$

Portanto, a equação final, seguindo-se o mesmo método, seria

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F (x, t) \tag{3.2}$$

para todo x do fio, no instante t, sendo $F = \dfrac{1}{\rho c\sigma} f$.

Outra hipótese razoável é admitir que haja perda de calor proporcional à temperatura $u (x, t)$ em cada ponto x no instante t. Com essa hipótese, a equação se transforma em

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku, \tag{3.3}$$

denominada equação de radiação (k constante).

A equação mais geral contendo as equações (3.2) e (3.3) seria

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku + F(x, t)$$

em todo ponto x do fio, no instante t.

Passaremos ao estudo da equação diferencial parcial (3.1). Podemos distinguir os casos em que o fio possui comprimento finito $[0, L]$ e o caso em que se supõe o seu comprimento infinito. Teremos dois problemas matemáticos distintos, sendo o caso do fio infinito adequado para a introdução da integral de Fourier. Temos assim, dois problemas de Cauchy.

Problema 1: Encontrar a função real $u(x,t)$, $0 < x < L$, $L > 0$, $t > 0$duas vezes continuamente derivável em relação a x e uma vez continuamente derivável em relação a t, satisfazendo as seguintes condições:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \tag{3.4}$$

em $0 < x < L$ $0 < t < T$

$$u(x,0) = u_0(x), \text{ em } 0 < x < L;$$
$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \text{ para todo } 0 < t < T.$$

A função u_0, supõe-se contínua, limitada em $0 < x < L$ e sendo T um número real positivo.

Problema 2: Conhecida a função $u_0(x)$ para $-\infty < x < \infty$, encontrar $u(x,t)$ em $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < \infty$ duas vezes continuamente derivável em relação a x, uma vez derivável em relação a t, satisfazendo as seguintes condições:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ em } -\infty < x < +\infty \ 0 < t < T;$$
$$u(x,0) = u_0(x), \text{ em } -\infty < x < +\infty.$$

A função u_0, é suposta contínua e limitada em $-\infty < x < +\infty$.

O problema 1 corresponde ao estudo da propagação de calor em um fio de compirmento L, supondo-se que os extremos do fio estejam a $0°$. A condição $u(0,t) = u(L,t) = 0$, para todo $0 < t < T$ denomina-se condição de contorno, tratando-se assim de um problema misto, pois se exige a condição inicial mais a condição de contorno. O problema 2 é de valor inicial apenas, sem condição de contorno.

O objetivo deste trabalho é a introdução da Série de Fourier atravé s do problema 2. Todavia, mencionaremos como resolver o prblema 1, apenas para motivar o estudo do segundo problema.

Usaremos o método de separação de variáveis. Buscaremos a solução $u(x,t) = X(x)\theta(t)$.

Substituindo na equação (2.4), obtém-se

$$X(x)\theta'(t) = a^2 X''(x)\theta(t),$$

para todo x e t.

Resulta que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{\theta'(t)}{a^2\theta(t)} = -\lambda^2$$

sendo $\lambda > 0$ um número real, para todo x e t. Daí, obtém-se

$$\theta'(t) + \lambda^2 a^2 \theta(t) = 0$$

isto é, a solução em t é dada por

$$\theta(t) = ce^{-\lambda^2 a^2 t}.$$

Para se obter a solução em x, tem-se

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

com

$$X(0) = X(L) = 0$$

A solução geral da equação linear de segunda ordem é dada por

$$X(x) = Acosx + BsenX$$

sendo A e B constantes a serem determinadas pela condição nos extremos $X(0) = X(L) = 0$. Encontra-se:

$$A = 0 \text{ e } \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, n = 0, 1, 2...$$

Obtém-se uma sucessão de funções

$$u_n(x,t) = B_n e^{-\lambda^2 a^2 t} sen \frac{n\pi}{L} x, n = 0, 1, 2...$$

cada uma solução da equação (3.4) em $0 < x < L$, $0 < t < T$, satisfazendo as condições de contorno em $0 < t < T$. Como se trata de uma equação linear, qualquer combinação linear finita das funções $u_n(x,t)$ ainda é uma solução. O problema esté resolvido mostrando que os limites das somas finitas

$$\sum_{v=0}^{n} B_v e^{-\lambda^2 a^2 t} sen \frac{n\pi}{L} xx$$

quando n tende para o infinito são soluçao do problema 1. Para que isso aconteça, a função $u_0(x)$ deve possuir uma extensão ao intervalo $(-L, +L)$, dotada de uma representação em série de Fourier aí convergente. Assim, acontecendo, coeficientes B_n são calculados através da condição (3.5), obtendo-se

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} u_0(x) sen \frac{n\pi}{L} x dx \tag{3.5}$$

Conclui-se assim que a solução $u(x, t)$ seria representada por uma série de Fourier cujos coeficientes são calculados através de (3.5).

Considerações finais

As Séries e Transformadas de Fourier de uma função são instrumentos extremamente importantes para a solução de problemas de condução de calor. Suas propriedades facilitam a resolução de problemas e utilizando-se estes métodos pode-se solucionar um número significativo de problemas de condução do calor, problemas estes que se resolvidos por métodos usuais teriam limitações em sua resolução.

Bibliografia

[1] FIGUEIREDO, D. G., *Análise de Fourier e Equações Diferenciais Parciais*, 4ªEd, Rio de Janeiro: IMPA, 2005.

[2] MEDEIROS, L. A.; ANDRADE, N. G., *Iniciação às Equações Diferenciais Parciais*, Rio de Janeiro: LTC, 1978.

[3] BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C., *Equações Diferenciais Elementares e problemas de valores de contorno*, Rio de Janeiro: LTC, 2011.

[4] Disponível em: http://www.mat.ufmg.br/ aneves/ensino/edb/chapter8.pdf. Acessado em 28 de Março de 2013.

[5] Disponível em: http://www.ceunes.ufes.br/downloads/2/luciofassarellawdisciplina-calculo1-listalimite-continuidade.pdf. Acessado em 10 de Maio de 2013.