UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

FACULDADE DE MATEMÁTICA

Adaílson Leitão Corrêa

DINÂMICA NO INTERVALO: O TEOREMA DE LI-YORKE

BELÉM - PA

2014

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS

FACULDADE DE MATEMÁTICA

Adaílson Leitão Corrêa

DINÂMICA NO INTERVALO: O TEOREMA DE LI-YORKE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento.

BELÉM - PA

2014

CERTIFICADO DE AVALIAÇÃO

ADAÍLSON LEITÃO CORRÊA

DINÂMICA NO INTERVALO: O TEOREMA DE LI-YORKE

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Faculdade de Matemática da Universidade Federal do Pará como requisito parcial para obtenção do título de Licenciado Pleno em Matemática, julgado pela seguinte banca examinadora:

____

Orientador : Prof. Dr. Márcio Lima do Nascimento.

Faculdade de Matemática, UFPA

____

Profa. Dra. Cristina Lucia Dias Vaz

Faculdade de Matemática, UFPA

____

Prof. Dr.

Faculdade de Matemática, UFPA

DATA DA AVALIAÇÃO: _____ /_____ /______

CONCEITO: ______________________________

Dedicatória

À Arnaldo dos Santos Corrêa e à Maria José Leitão Corrêa. Meus pais.

Agradecimentos

Ao Deus que creio pelo fôlego de vida, e aos meus pais por serem o alicerce de tudo que construí até aqui, palavras não podem expressar tal amor e gratidão que tenho por vocês. Com fé e trabalho breve poderei retribuir todo o empenho dedicado à mim. Amo vocês.

Aos meus irmãos Audicleide Leitão Corrêa e Adaías Leitão Corrêa por fazerem parte desta trajetória de lutas e vitórias, também amo vocês.

Aos amigos que esta jornada me concedeu: Filipe Alves Nobre que esteve comigo do 1º ao último dia de aula do curso; muito obrigado por sua sincera amizade. Antonio Eliton Lira da Costa, por sua alegria contagiante e por me dá força nas dificuldades, muito obrigado. Carlos Edilon Ferreira da Silva, Deus abençoe essa mente que me auxiliou muitas vezes nas duvidas. Jocimar Gomes Duarte Junior, por ter me surpreendido com sua amizade, que foi capaz de participar axiduamente da construção deste trabalho. Deus te abençoe amigo. Gedeão do Nascimento Corpes pelo grande auxílio em muitos momentos do curso. A todos vocês meu obrigado, e minha sincera amizade por toda a vida, juntos chegaremos além dos sonhos! Creiamos!.

Aos amigos da Igreja Evangélica Assembléia de Deus da Passagem São João no Bengui, por todo incentivo, carinho, orações, que tudo isso volte a vocês como bênçãos sobre suas vidas. Obrigado!

A todos os professores que ministraram com paciência e dedicação as disciplinas que compõe o curso. Muito obrigado, foi uma honra estudar com vocês mestres. Em especial ao meu orientador Profº Dr. Márcio Lima do Nascimento por me dá a oprtunidade de me mostrar capaz de realizar um trabalho como este. Sinto-me honrado por ter aceito me orientar nessa realização, muito obrigado por tudo!

A todos os demais amigos e colegas do curso.

A todos minha sincera gratidão.

Resumo

Este trabalho dedicou-se a apresentar uma demonstração do *Teorema de Li-Yorke*, que tem grande importância no estudo de Sistema Dinâmico Discreto Unidimensional. O Teorema mostra que se uma dada função contínua num intervalo da reta real, tem um ponto periódico de período 3, então esta possui pontos periódicos de todos os períodos, gerando órbitas complicadas de se gerar graficamente.

Palavras-chave: Sistema Dinâmico Discreto, Teorema de Li-Yorke.

Sumário

Introdução

O estudo de Sistemas Dinâmicos Discretos unidimensionais, que essencialmente é o estudo das funções de um intervalo nele mesmo e seus iterados, como veremos a seguir, foi impulsionado principalmente pelo intenso estudo dos modelos oriundos da biologia das décadas de 1960 e 1970. Porém, essas equações foram estudadas muito antes, pelo matemático belga Pierre François Verhust (1804 - 1849), para modelar o crescimento populacional com recursos limitados.

Suponha um processo de crescimento ecológico, econômico, populacional, em que comparamos a medida x_{n+1} da próxima geração (o número de animais, por exemplo) e adotamos que x_{n+1} é uma função linear do momento presente x_n:

$$x_{n+1} = rx_n$$

onde $r > 0$ é o parâmetro de crescimento. Neste caso, o crescimento seguirá uma lei geométrica exponencial, pois

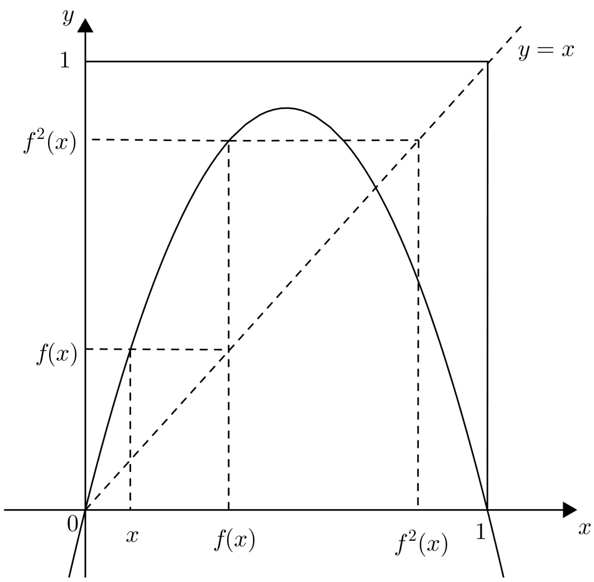
$$x_n = r^n x_0$$

que para $r > 1$ tenderá para o infinito, ou seja, a população irá crescer indefinidamente. Porém o crescimento de população é sempre limitado pela falta de recursos (comida). Então, ao invés de rx_n a maneira mais simples de modelar o declínio no fator de crescimento é substituir o fator r por $r(1 - x_n)$, tal que, quando x_n se aproxima do limitante (neste caso 1), o fator de crescimento vai a zero, ou seja, a população é extinta. É claro que x_n é tomado em porcentagens, para termos valores entre 0 e 1. Assim a lei se torna

$$x_{n+1} = f(x_n) = r(1 - x_n)x_n = r(x_n - x_n^2)$$

que é chamada de aplicação quadrática (seu gráfico é uma parábola de grau 2) ou ainda parábola logística.

Já nas décadas de 1960 e 1970, Robert May e Feigenbaum, não estudaram mais a equação de diferença, mas pensando o sistema da equação $f(x) = rx(1-x)$, $x \in [0,1]$ e suas iterações, ou seja, $f(f(x))$, denotada por $f^2(x)$, além de $f(f(f(x))) := f^3(x), ..., f^n(x) := f \circ f \circ f \circ ... \circ f(x)$. Essa análise abriu várias frentes de problemas matemáticos interessantes, além de inúmeras aplicações, desenvolvendo a chamada Teoria do Caos.



O termo Sistema Dinâmico Unidimensional vem do fato de estarmos considerando funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, e $\mathbb{R}$ tem dimensão 1. Este trabalho tem como foco principal apresentar uma demonstração do Teorema de Li-Yorke e para isto o primeiro capítulo apresenta as noções triviais de Sistemas Dinâmicos Discretos, tais como o conceito intuitivo de Sistemas Dinâmicos, ponto fixo, ponto periódico, órbita de um ponto e ponto periódico de período n. Em continuidade temos o segundo capítulo voltado para a exposição de uma demonstração do Teorema de Li-Yorke acompanhado de algumas noções necessárias para o entendimento da prova, como a noção de $f - cobertura$. Por fim escrevemos um terceiro capítulo contendo um estudo simples sobre.

Capítulo 1

Introdução aos Sistemas Dinâmicos na reta

1.1 Conceito de Sistema Dinâmico Discreto

Considere uma função de um intervalo na reta, ou seja $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, onde para todo $x \in I$ calcula-se os iterados de f no ponto x, ou seja $f(x), f(f(x)), f(f(f(x))), ...$
Denotaremos as composições da seguinte forma:

$$f^0(x) = Id(x)$$

$$f^1(x) = f(x)$$

$$f^2(x) = f \circ f(x)$$

$$f^3(x) = f \circ f \circ f(x)$$

$$f^n(x) = f \circ f \circ ... \circ f(x)$$

Chamamos de Sistema Dinâmico a terna $(I, f, \circ)$.
Diferente dos chamados sistemas dinâmicos contínuos, $(I, f, \circ)$ é um sistema dinâmico discreto, pois o ”tempo”, neste caso, são os iterados da função. Vimos na introdução que não é o mesmo enfoque das equações de diferença.
Então tomemos um ponto p e f uma função contínua.

Definição 1.1. *O conjunto dos pontos $\{p, f(p), f^2(p), ...\}$ é chamado a órbita de p.*
Notação: Denotamos a órbita de um dado ponto p por $O(p)$.

Exemplo 1.1. *Seja $f(x) = 5x - x^2$, determinemos a órbita dos pontos 1 e 2.*

Solução:Por definição a órbita de 1 é o conjunto $O(1) = \{1, f(1), f^2(1), f^3(1), \cdots\}$

$x_0 = 1$, $f(1) = 4$, $f^2(1) = 4$, $f^3(1) = 4$, ...

$O(1) = \{1, 4, 4, 4, ...\}$

$O(2) = \{2, f(2), f^2(2), f^3(2), ...\}$

$x_0 = 2$, $f(2) = 6$, $f^2(2) = -6$, $f^3(2) = -66$, ...

$O(2) = \{2, 6, -6, -66, ...\}$

Exemplo 1.2. *Seja $f(x) = x - x^2$, determinemos a órbita dos pontos $\frac{1}{2}$ e 2.*

Solução: Por definição $O(\frac{1}{2}) = \{1, f(\frac{1}{2}), f^2(\frac{1}{2}), f^3(\frac{1}{2}), ...\}$

$x_0 = \frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$, $f^2(\frac{1}{2}) = \frac{3}{16}$, $f^3(\frac{1}{2}) = \frac{39}{256}$, ...

$O(\frac{1}{2}) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{39}{256}, ...\}$

$O(2) = \{2, f(2), f^2(2), f^3(2), ...\}$

$x_0 = 2$, $f(2) = -2$, $f^2(2) = -6$, $f^3(2) = -42$, ...

$O(2) = \{2, -2, -6, -42, ...\}$

Toda a base de nossas seguintes demonstrações está firmada no Teorema do Valor Intermediário.

Inicialmente veremos que se $f : [m, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, tem sinais contrários nos limites do domínio, então f tem um zero no intervalo $[m, n]$.

Lema 1.1. *Seja $f : [m, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(m) < 0 < f(n)$. Então existe $m < p < n$ tal que $f(p) = 0$, e portanto p é um zero da função.*

Demonstração. Considere o conjunto $A = \{x \in [m, n]; f(x) < 0\}$. Temos que A é limitado superiormente e não-vazio, pois $a \in A$, logo possui um supremo e digamos que seja p este supremo, assim $p \geq n$. Como $f(n) > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $x \in [n - \delta, b]$ então $f(x) > 0$ e assim, todo elemento do intervalo $[n - \delta, b]$ é uma cota superior de A. Como p = sup A, segue que $p \geq n - \delta < n$. Tendo isto, mostremos que $f(p) = 0$. Se $f(p) > 0$, então existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$, o que implica $f(x) > 0$. Mas isto gera uma contradição, pois $f(p - \epsilon) > 0$, sendo uma cota superior de A menor que o seu supremo. Agora suponhamos $f(p) < 0$. Neste caso existe $\epsilon > 0$ tal que $x \in [p - \epsilon, p + \epsilon]$ o que implica $f(x) < 0$. Em particular, $f(p + \epsilon) < 0$, daí $p + \epsilon \in A$, o que gera uma contradição, pois p = sup A. Portanto $f(p) = 0$ $\square$

Lema 1.2. *Seja* $f : [m, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(m) > 0 > f(n)$*. Então existe* $m < p < n$ *tal que* $f(p) = 0$*.*

Demonstração. Considere a função $\Phi : [m, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $\Phi(x) = -f(x)$. Note que Φ é contínua e $\Phi(m) < 0 < \Phi(n)$. Pelo **Lema 1.1**, existe $p \in (m, n)$ que anula Φ, daí

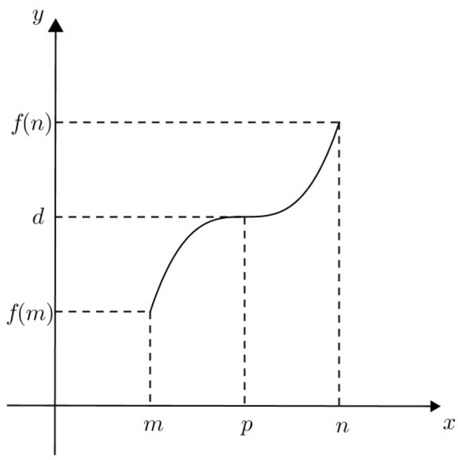
$$\Phi(p) = -f(p) \Rightarrow f(p) = 0$$

$\square$

Teorema 1.1. *(Teorema do Valor Intermediário) Seja* $f : [m, n] \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua tal que* $f(m) < d < f(n)$*, para algum número real* d*. Então existe* $m < p < n$ *tal que* $f(p) = d$*.*

Demonstração vide referência [3]

Graficamente, pelo Teorema do Valor Intermediário, vemos que f assume todos os valores entre $f(m)$ e $f(n)$.



1.2 Ponto Fixo

Vimos que para estudarmos um sistema dinâmico teremos que calcular os iterados $f(x), f^2(x), ...$, etc. Então será importante estudar os pontos de interseção dessas funções com a identidade $y = x$, ou seja, pontos fixos e periódicos.

Determinar um ponto fixo de uma função contínua f, consiste em encontrar um ponto p do domínio da função em que a imagem de p é o próprio p. Então definimos:

Definição 1.2. *Seja o intervalo $I = [m, n]$ e $f : I \longrightarrow I$ uma função contínua. Dizemos que p é ponto fixo de f se $f(p) = p$.*

A fim de garantir a existência de pontos fixos para uma função sob estas condições veremos um Terema do Ponto Fixo.

Teorema 1.2. *(Teorema do Ponto Fixo) Seja o intervalo $I = [m, n]$, se $f : I \longrightarrow I$ é uma função contínua definida em I, então existe pelo menos um ponto fixo p para f em I.*

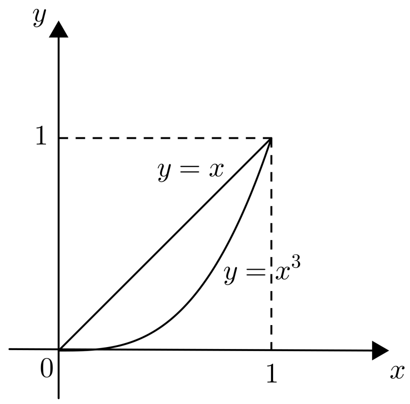
Demonstração. Caso $f(m) = m$ ou $f(n) = n$ temos trivialmente a conclusão. Agora suponha que $f(m) > m$ e $f(n) < n$. Considere a função $\Phi(x) = f(x) - x$, temos que Φ é contínua e além disso $\Phi(m) > 0$ e $\Phi(n) < 0$. Pelo **Lema 1.1** da seção anterior existe $p \in [m, n]$ que anula Φ. Assim,

$$\Phi(p) = f(p) - p \Rightarrow f(p) = p$$

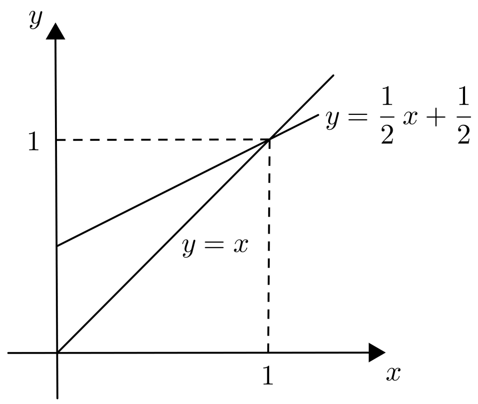
□

Gráficamente, os pontos fixos são todos os pontos onde a reta $y = x$ intersecta o gráfico de uma função contínua definida em um intervalo.

Exemplo 1.3. *Os pontos 0 e 1 são pontos fixos da função $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ definida por $f(x) = x^3$*



Exemplo 1.4. *O ponto* 1 *é ponto fixo da função* f *definida por* $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$



1.3 Ponto Periódico de Período n

Veremos nesta seção os pontos periódicos, que serão na verdade, os pontos fixos das funções iteradas.

Definição 1.3. *Se para algum* $n \geq 1$ *tivermos* $f^n(p) = p$*, dizemos que* p *é ponto periódico de período* n *de* f*.*

Ou seja, p é ponto fixo de f^n, e n é o menor período para o qual isto acontece.
A órbita de um ponto periódico de período n é chamada órbita periódica de p.

Exemplo 1.5. *Seja $f(x) = -x + 1$, temos que $\frac{1}{3}$ é ponto periódico de período 2, pois $f^2(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$ e $O(\frac{1}{3}) = \{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\}$*

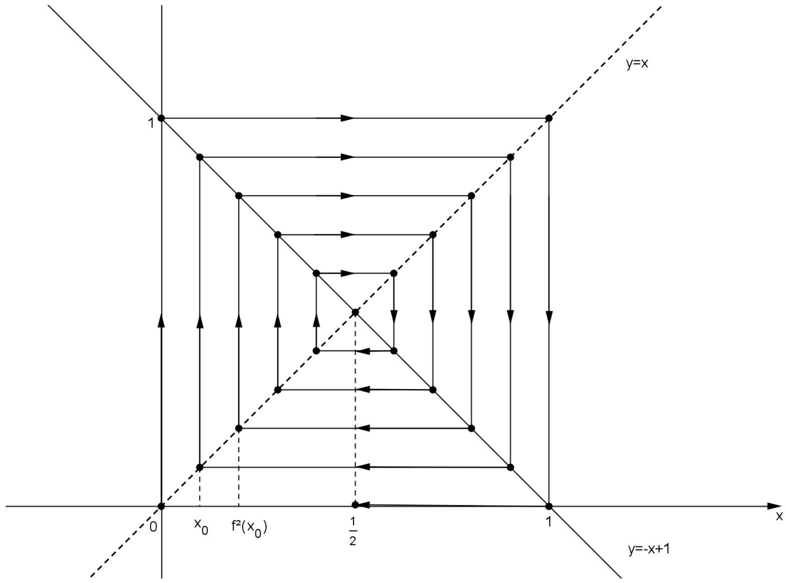


Figura 1.1: Órbita periódica de período 2

Observe que $f^2(x) = -(-x + 1) + 1 = x + 1 - 1 = x$, ou seja, todo ponto do domínio é um ponto periódico de período 2. Além disso, $x = \frac{1}{2}$ também é fixo. Aliás, é o único ponto fixo. No gráfico abaixo podemos observar o comportamento de uma órbita de período três no intervalo. Neste caso x_1 é levado em x_2, x_2 é levado em x_3 e x_3 retorna a x_1.

Exemplo 1.6. *Uma órbita de período três.*

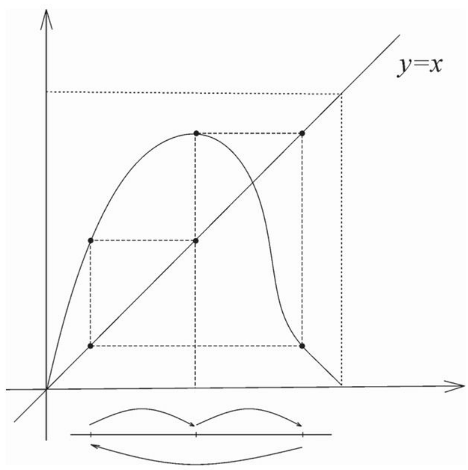


Figura 1.2: Órbita periódica de período 3

Exemplo 1.7. *Uma órbita de período quatro.*

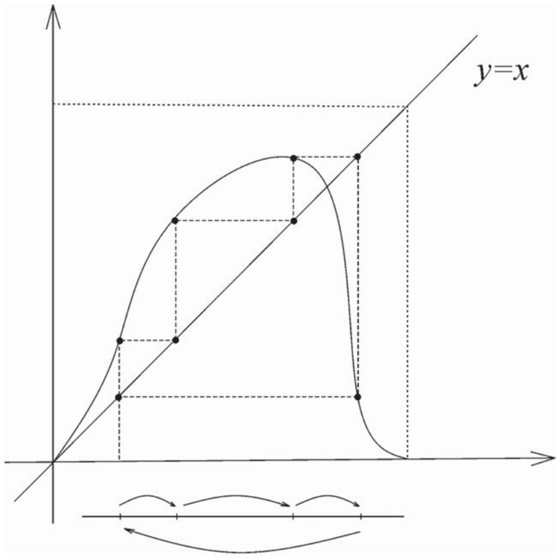


Figura 1.3: Órbita periódica de período 4

Capítulo 2

O Teorema de Li-Yorke

Por volta de 1975, James A. Yorke e seu co-autor Tien-Yen Li publicaram um artigo intitulado *Período três implica caos*, onde provaram o que viria a ser o *Teorema de Li-Yorke*. James Alan Yorke nasceu em 3 de aagosto de 1941, em *New Jersey*, Estados Unidos. Foi chefe do Departamento de Matemática da Universidade de *Maryland*, e hoje com 72 anos é professor do Instituto de Ciência e Tecnologia do Departameto de Física da Universidade de *Maryland*. Yorke foi orientador de doutorado de Tien-Yen Li. Li nasceu em junho de 1945 em *Fujian*, província chinesa, e hoje é professor da Universidade de *Michigan*.
Esses dois ilustres matemáticos nos mostraram que se uma dada uma função contínua tem um ponto periódico de período três, então esta tem pontos periódicos de todos os períodos.

Figura 2.1: Tien-Yen Li

Figura 2.2: James Alan Yorke

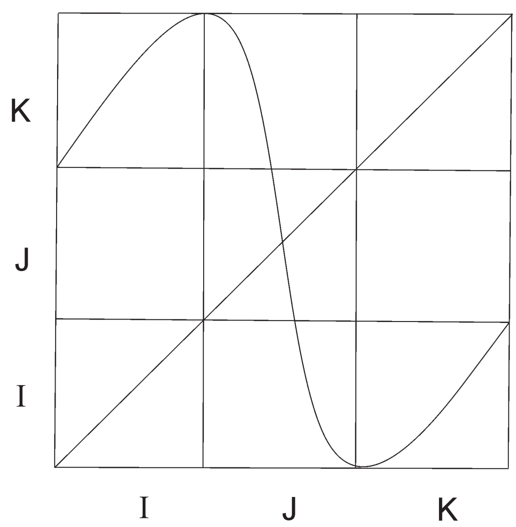
Em dinâmica não-linear há casos em que não há uma predeterminação do comportamento futuro de uma aplicação, o período três é o estopim dessa complexidade. É notável que basta que uma aplicação tenha uma órbita de período três para que ela possua pontos periódicos de todos os períodos. Mais tarde se percebeu que esse teorema era um caso particular de um teorema mais forte ainda publicado em 1968 por Sharkovskii

Antes de enunciar o *Teorema de Li-Yorke*, veremos alguns resultados relevantes que nos auxiliarão na demonstração deste teroema.
O primeiro dado, não menos importante, é a noção de $f - coberturas$. Esta noção será usada fortemente nas demonstrações dos próximos resultados.

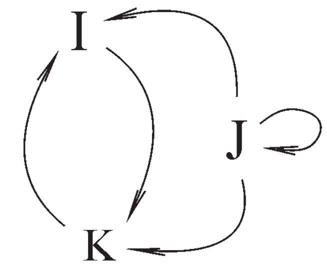
Definição 2.1. *Um intervalo* I $f - cobre$ *um intervalo* J *se, e somente se,* $f(I) \supset J$.
notação: I $f - cobre$ $J := I \rightarrow J$

Em outras palavras, dados dois subintervalos I e J em f, com f contínua, se a imagem de I contém todo o subintervalo J, diz-se que que I $f - cobre$ J. Uma $f - cobertura$ é dada pela iteração de intervalos em f.
Também podemos representar uma $f - cobertura$ através de um grafo, como no exemplo a seguir

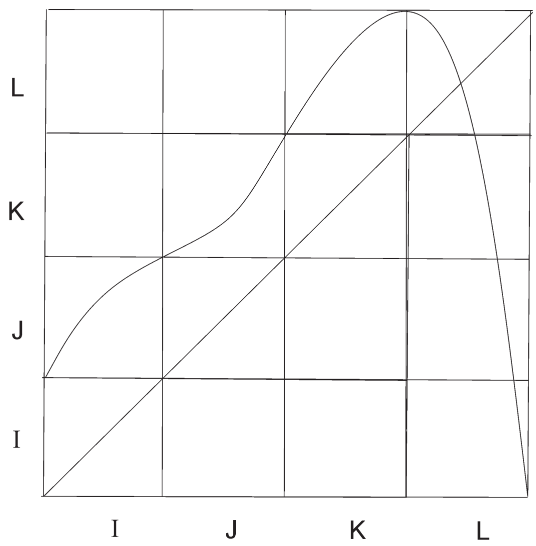
Exemplo 2.1. *Sejam os intervalos* I, JeK, *observe no gráfico abaixo que* I $f - cobre$ k, J $f - cobre$ I, J *e* K, *e* K $f - cobre$ I.



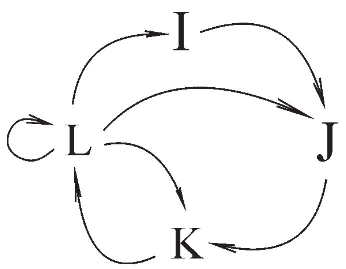
Abaixo temos o grafo que representa esta $f - cobertura$



Exemplo 2.2. *Observemos a $f - cobertura$ com 4 intervalos, onde nesta função I $f - cobre$ J, J $f - cobre$ K, K $f - cobre$ L e L $f - cobre$ I, J, K e L.*



O grafo desta $f - cobertura$



A partir desta noção vejamos mais alguns resultados importantes.

Lema 2.1. *Sejam I e J dois intervalos fechados. Se $f(I) \supset J$ então existe um subintervalo $K \subset I$ tal que $f(k) = J$, $f(int(K)) = int(J)$ e $f(\partial K) = \partial J$*

Demonstração. Tomemos $J = [b_1, b_2]$ e $a_1, a_2 \in I$ com $a_1 < a_2$, $f(a_1) = b_1$ e $f(a_2) = b_2$. Consideremos

$$x_1 = sup\{x : a_1 \leq x \leq a_2 | f(x) = b_1\}$$

Pela continuidade de f, $f(x_1) = b_1$. Note que $x_1 < a_2$. Também

$$x_2 = inf\{x : x_1 \leq x \leq a_2 | f(x) = b_2\}$$

Então $f(x_2) = b_2$ e $f(\{x_1, x_2\}) = \{b_1, b_2\}$. Pela definição de x_1 e x_2 temos que $f((x_1, x_2)) \cap \partial J = \emptyset$ e também $f(int([x_1, x_2])) = int(J) = (b_1, b_2)$. $\square$

Lema 2.2. $a)$ *Seja f uma função contínua e $I = [a, b]$ um intervalo contido no dominio de f. Tomemos dois pontos a e b com $a \neq b$, $f(a) > a$ e $f(b) < b$, então existe um ponto fixo entre a e b.*

$b)$ *Se um intervalo fechado I f-cobre ele mesmo, então existe um ponto fixo em I.*

Demonstração. $a)$ Seja $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f(x) - x$, pelo **Lema 1.2** existe c entre a e b que anula g, assim

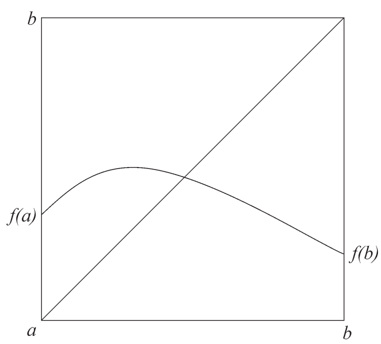
$$g(c) = f(c) - c \Rightarrow f(c) = c$$

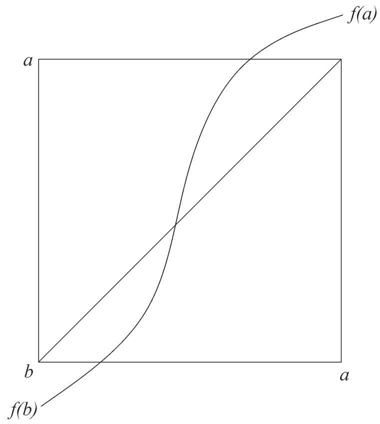
$b)$ Sejam $c, d \in I$ tais que $f(c) = a$ e $f(d) = b$. Temos que, se $c = a$ e $d = b$, temos a conclusão. Agora suponhamos $c \neq a$ e $d \neq b$, de forma que $a < c < d$ e $a < d < b$. Considerando a função continua $g : [c, d] \Rightarrow \mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - x$. Note que $g(c) < 0$ e $g(d) > 0$ o que permite aplicar o **Lema 1.2** à função g. Portanto existe $p \in I$ que anula g. Daí

$$g(p) = f(p) - p \Rightarrow f(p) = p$$

$\square$

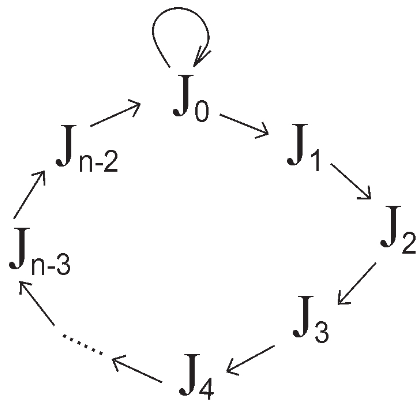
Graficamente os pontos fixos mencionados neste lema são assim



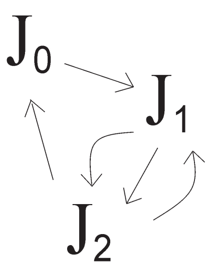


Lema 2.3. *Se $J_0 \to J_1 \to \cdots \to J_n = J_0$ é um ciclo com $f(J_k) \supset J_{k+1}$ para $k = 0, \cdots, n-1$.*
$a)$ Então existe um ponto fixo x_0 de f^n com $f^k(x_0) \in J_k, k = 0, \cdots, n$.
$b)$ Ainda (i) este ciclo não é o produto de ciclos formados pela ida p vezes em volta de um ciclo menor de medida m, onde $m.p = n$, e (ii) $int(J_i) \cap int(J_k) = \emptyset$, a menos que $J_i = J_k$. Se o ponto periódico x_0, descrito na parte (a), estiver no interior de J_0, então este possui o menor período n.

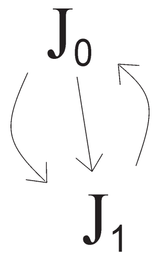
Antes de provarmos este Lema, vale ressaltar que nos ciclos podem se repetir alguns intervalos, como por exemplo o ciclo $J_0 \to J_1 \to ... \to J_{n-2} \to J_0 \to J_0$, e representamos assim



ou o ciclo $J_0 \to J_1 \to J_2 \to J_1 \to J_2 \to J_0$. Representando:



No entanto não há ciclos do tipo $J_0 \to J_1 \to J_0 \to J_1$.



Vejamos a prova.

Demonstração. Usaremos indução em j para a prova de (a). Assim, seja a proposição S_j
(S_j) : Existe um subintervalo $K_j \subset J_0$ tal que $f^i(K_j) \subset J_i$, $f^i(int(K_j)) \subset int(J_i)$, e $f^j(K_j) = J_j$.
Pelo **Lema 2.1**, temos que S_j é válida para $j = 1$. Assumimos por hipótese que para $j = k-1 > 1$, S_{k-1} é válida. Mostremos que S_k é válida.
Da hipótese, existe um K_{k-1} e daí,

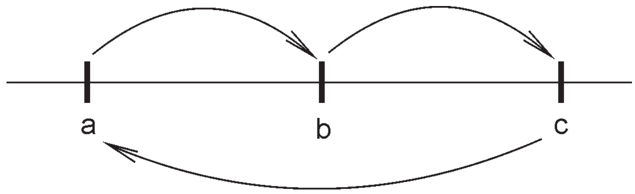
$$f^k(K_{k-1}) = f(f^{k-1}(K_{k-1})) = f(J_{k-1}) \supset J_k,$$

o que implica, ainda pelo **Lema 2.1**, a existência de $K_k \subset K_{k-1}$, tal que $f^k(K_k) = J_k$ com $f^k(int(K_k)) = int(J_k)$. As outras afirmações são garantidas pela hipótese de indução. Agora usando (S_n), temos que $f^n(K_n) = J_0$. Pelo **Lema 2.2** f^n tem um ponto fixo x_0 em $K_n \subset J_0$. Logo, $f^i(x_0) \in J_i$, para $i = 0, ..., n$, pois $x_0 \in K_n$, e assim concluimos (a).
Para a parte (b), já que $f^n(int(K_n)) = int(J_0)$, se $x_0 \in int(J_0)$ então $x_0 \in int(K_n)$ e $f^i(x_0) \in int(J_i)$ para $i = 1, ..., n$. Como o ciclo não é um produto, segue que x_0 tem período n. $\square$

Toda essa construção feita até aqui, foi uma preparação para que pudessemos compreender como *Li e Torke* chegaram a um resultado tão importante para o estudo de Sistemas Dinâmicos Discretos.

Teorema 2.1. *(Teorema de Li-Yorke). Seja $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se f tem um ponto periódico de período 3, então f tem pontos periódicos de todos os períodos.*

Demonstração. Seja o conjunto $\{a, b, c\}$ uma órbita periódica de período 3, de uma dada f contínua. Vamos assumir $f(a) = b > a$, $f^2(a) = f(b) = c > f(a) = b$, e $f^3(a) = f(c) \leq a$. Como representado a seguir



Tomando dois intervalos $I_1 = [a, b]$ e $I_2 = [b, c]$. Então temos que $I_1 f - cobre I_2$ e $I_2 f - cobre I_1 e I_2$, daí tiramos que $f(I_2) \supset I_2$ e pelo **Lema 2.2**, f possui um ponto fixo em I_2. Agora tomemos um ciclo de comprimento n, com um intervalo sendo I_1, e $n-1$ intervalos sendo repetidas cópias de I_2: $I_1 \to I_2 \to I_2 \to ...I_2 \to I_1$. Pelo **Lema 2.3** existe um $x_0 \in I_1$ tal que $f^n(x_0) = x_0$ e $f^j(x_0) \in I_2$ para $j = 1, ..., n-1$. Supondo que haja um k com $1 \leq k < n$ e $f^k(x_0) = x_0$, então $x_0 = f^k(x_0) \in I_2$, implicando que $x_0 \in I_1 \cap I_2 = \{b\}$. Mas é impossível que $x_0 = b$, e isto se vê nos casos em que $n = 2$ e $n \geq 3$, com argumentos diferentes. No caso em que $n = 2$ temos $f^2(b) = f^2(x_0) = x_0 = b$, um absurdo pois contradiz o fato de $f^2(b) = f^3(a) \leq a$. Também, quando $n \geq 3$ basta observar que $f^2(b) = f^2(x_0) \in I_2$, o que contradiz o fato de $f^2(b) = f^3(a) \leq a$. Isto mostra que $f^j(x_0) \neq x_0$ para $1 \leq j < n$, e na verdade x_0 tem período n. $\square$

Nos exemplos vistos observa-se que temos um método seguro de obter pontos fixos. O ponto de período 2 foi obtido fácilmente no caso de uma função linear.
Porém, um exemplo de um ponto periódico de período 3, obtemos numa função não linear. No gráfico 1.2 vimos apenas o esboço de uma função com este comportamento. O *Teorema de Li-Yorke* nos garante que a existência de uma órbita desse tipo gera órbitas bem mais complicadas de se gerar gráficamente.

O *Teorema de Li-Yorke* é um caso especial de um teorema mais geral provado em 1968 pelo matemático russo Oleksandr Mikolaiovich Sharkovskii, conhecido como *Teorema de Sharkovskii*. Sharkovskii não só mostrou que período 3 implica a existência de todos os periodos, como também definiu uma nova ordenação dos números inteiros positivos. Esta ordenação foi feita alocando inicialmente, os inteiros ímpares maiores que um, usando o símbolo $\triangleright$ para definir a ordenação, desta forma:

$$3 \triangleright 5 \triangleright 7 \triangleright 11...$$

A partir daí são adicionados todos os inteiros que são duas vezes um inteiro ímpar e, em seguida, inteiros ímpares aumentados 2^n vezes.

Desta forma:

$$3 \rhd 5 \rhd 7 \rhd 11 \rhd ... \rhd 2.3 \rhd 2.5 \rhd ... \rhd 2^2.3 \rhd 2^2.5 \rhd ...$$

$$\rhd 2^n.3 \rhd 2^n.5 \rhd ... \rhd 2^{n+1}.5 \rhd ... \rhd 2^{n+1} \rhd 2^n \rhd ... \rhd 2^2 \rhd 2 \rhd 1$$

Esta então seria a ordem determinada por Sharkovskii para números inteiros positivos. Aqui ficaremos apenas com o enunciado deste grande resultado. Para a demonstração do teorema enunciadoa seguir, vide referência [5].

Teorema 2.2. *O Teorema de Sharkovskii Seja $f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se f possui um ponto de período n, com $n \rhd k$ na ordem de Sharkovskii, então f possui um ponto de período k.*

Capítulo 3

Uma Órbita de período 3 estranha

A matemática consegue modelar muitos acontecimentos na natureza através de suas equações. Já há muitos anos essa prática vem sido realizada no mundo, resultado disto é que há modelos matemáticos para tudo, desde um simples movimento de um pêndulo ao movimento dos planetas, e cada campo da ciência tem seu típico modelo.

Na maioria dos casos, os modelos matemáticos são muitos difíceis de serem resolvidos com exatidão, o que leva os cientistas a recorrerem ao uso de computadores para aproximar as soluções de seus modelos matemáticos. Infelizmente, apesar dos grandes avanços tecnológicos,que tem melhorado significantemente a velocidade computacional e a exatidão, os cientistas têm frequentemente sido incapazes de fazer previsões com base na saída do computador. Por exemplo, considerar o tempo. Ele ainda parece impossível de prever com precisão o tempo uma semana antes do tempo, apesar do fato de que nós podemos saber o tempo atual em praticamente todos os pontos do globo, em qualquer momento.
Durante anos, os cientistas esperavam ter acesso a máquinas maiores e melhores, ou a algoritmos mais rápidos, capazes de dar dados mais iniciais, em seguida, eles seriam capazes de fazer previsões precisas. No entanto, nos últimos 25 anos, cientistas e matemáticos têm vindo a perceber que isso nunca será alcançado. Quando o caos faz parte de um modelo matemático, nem a computação mais rápida e precisa será capaz de prever exatamente um comportamento. No caos, pequenas mudanças na configuração inicial do sistema pode levar a grandes discrepâncias na futuro do processo. Este efeito é o chamado ”efeito borboleta”, muito conhecido não só na ciência. Matemáticos descobriram que modelos matemáticos muito simples como a expressão matemática

$4x(1-x)$ podem levar a um tipo de caos ou imprevisibilidade que é observado em sistemas de tempo. De fato, é esse tipo de caos que pode aparecer em casos particulares do *Teorema de Li-Yorke (**Teorema 2.1**)*.

Este tipo de aplicação em sistemas dinâmicos discretos apresenta um comportamento complicado de se gerar graficamente, quando o estado inicial, que é um ponto fixo da aplicação, tem algumas peculiaridades dispostas a seguir.

3.1 Pontos Fixos: Atratores e Repulsores

Para definirmos mais estes objetos do estudo de sistemas dinâmicos discretos, veremos alguns resultados do cálculo.

O primeiro é o *Teorema de Rolle* que apenas enunciaremos, e para demonstração deste teorema vide referência [1].

Teorema 3.1. *Teorema de Rolle. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Se $f(a) = f(b) = 0$, então $f'(x_0) = 0$, para algum $x_0 \in (a, b)$*

Outro resultado importante para o nosso estudo é o *Teorema do valor Médio*. vejamos o enunciado e uma demonstração deste teorema.

Teorema 3.2. *Teorema do Valor Médio. Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e derivável no intervalo aberto (a, b). Então existe pelo menos um ponto $x_0 \in (a, b)$ tal que*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. Tomemos a função

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

Temos que F é cpntínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) e $F(a) = F(b) = 0$. O que nos permite aplicar o **Teorema** à função F em $[a, b]$. Portanto, existe $x_0 \in (a, b)$ tal que $F'(x_0) = 0$. Daí

$$F'(x_0) = f'(x_0) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \Rightarrow f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\square$

Uma pergunta cabível é o que garante a existência de pontos fixos nestas condições?. Em resposta a essa questão veremos um teorema que nos garante a existência de um único ponto fixo para uma dada $f : I \longrightarrow I$ contínua.

Teorema 3.3. *Teorema da Contração. Seja $f : I \longrightarrow I$ contínua, com $|f'(x)| < 1 \; \forall x \in I$. Então existe um único ponto fixo para f em I.*

Antes de apresentarmos uma demonstraçao deste teorema, vale ressaltar alguns fatos relevantes sobre a questão.
O *Teorema da Contração* é um teorema para espaços métricos compactos. Não tratamos desta forma desde início a fim de facilitar a compreensão. Ainda assim veremos superficialmente agora. Temos que qualquer subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ é completo, pois qualquer subconjunto fechado de um espaço completo, é completo. Portanto a aplicação f que temos trabalhado é o caso.

Também, f é uma contração se $|f(x) - f(y)| < |x - y| \; \forall x, y \in I$.
Tendo estes conceitos, vejamos a prova do *Teorema da Contração*.

Demonstração. Suponha que existem dois pontos fixos x e y em I, com $x \neq y$.

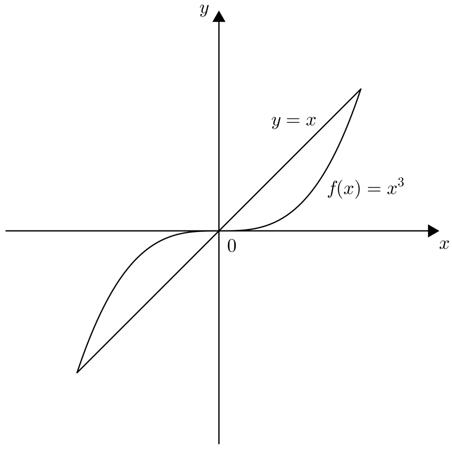
$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{x - y}{x - y} = 1$$

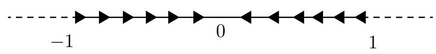
Um absurdo pois $|f'(x)| < 1, \forall x \in I$ □

Atratores e Repulsores

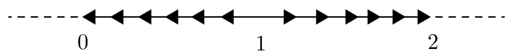
Seja f uma função contínua, e p um ponto fixo de f tal que $f'(p) > 1$, se esboçarmos o diagrama de degraus de um ponto próximo do ponto fixo p, notaremos que as sequências irão se afastar de p batizando-o como *Ponto Fixo Repulsor*. Agora se $f'(p) < 1$, as sequências irão se aproximar de p, então p é dito *Ponto Fixo Atrator*.
Ou seja, temos os seguintes tipos de pontos fixos:
1) Repulsor, se $f'(p) > 1$
2) Atrator, se $f'(p) < 1$

Exemplo 3.1. *Para $f(x) = x^3$, $p = 0$ é ponto fixo atrator pois $f'(x) = 3x^2$, daí $f'(0) = 3.0^2 = 0 < 1$. Assim as sequências perto de 0 se aproximam dele, como no gráfico a seguir.*





Exemplo 3.2. *Para $f(x) = x^3$, $p = 1$ é ponto fixo repulsor pois $f'(x) = 3x^2$, daí $f'(1) = 3.1^2 = 3 > 1$, e as sequencias perto de 1 se afastam dele.*



Mais atratatores:

Exemplo 3.3. *Considere a função $f(x) = kx(1-x)$, logo sua derivada é $f'(x) = k - 2kx$. Vejamos o que acontece quando $0 < k < 3$*

K = 2

$$f(x) = 2x - 2x^2$$

$$f'(x) = 2 - 4x$$

Ponto fixo:

$$2x - 2x^2 = x$$

$$2 - 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$f'(\frac{1}{2}) = 2 - 4.\frac{1}{2} = 0 < 1$. *Portanto* $\frac{1}{2}$ *é ponto fixo atrator.*

K = 2,9

$$f(x) = 2,9x - 2,9x^2$$

$$f'(x) = 2,9 - 5,8x$$

$f'(\frac{1}{2}) = 2,9 - 5,8.\frac{1}{2} = 0 < 1$. *Portando* $\frac{1}{2}$ *é ponto fixo atrator.*

Também podemos considerar tais pontos fixos como sendo um foco repulsor, ou sendo um foco atrator. Para que p seja dito foco repulsor basta olhar para a derivada da função em p. Assim:
1) Foco Repulsor, se $f'(p) < -1$
2) Foco Atrator, se $f'(p) > -1$

Em termos gráficos, observa-se que as sequências também se afastam de um p foco repulsor, só que alternando de um lado para o outro formando um espécie de ”teia de aranha”.
Quando p é um foco atrator, as sequências se aproximam dele, também alternando de uma lado para o outro, formando uma escada no gráfico.

3.2 Uma órbita de perído 3 estranha

Seja $f(x) = 3,839x - 3,839x^2$, sua derivada é $f'(x) = 3,839 - 7,678x$. Observe que os pontos

$$x_1 = 0,149888$$

$$x_2 = 0,489172 = f(0,149888)$$

$$x_3 = 0,959299 = f(0,489172)$$

e $f(x_3) = x_1$, formam uma órbita de período 3, pois $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ e $f(x_3) = x_1$.
Também

$$[f^3]'(x_1) = f'(f^2(x_1)).f'(f(x_1)).f'(x_1)$$

$\cdot f'(0,149888) = 3,839 - 7,678.0,149888$

$f'(0,149888) = 2,68$

$\cdot f'(0,489172) = 3,839 - 7,678.0,489172$

$f'(0,489172) = 0,083$

$\cdot f'(0,959299) = 3,839 - 7,678.0,959299$

$f'(0,959299) = -3,5264$

$\therefore\ [f^3]'(0,149888) = -3,5264.0,083.2,63 = -0,78 < 1 \Rightarrow x_1 = 0,149888$ é ponto de período 3 atrator.

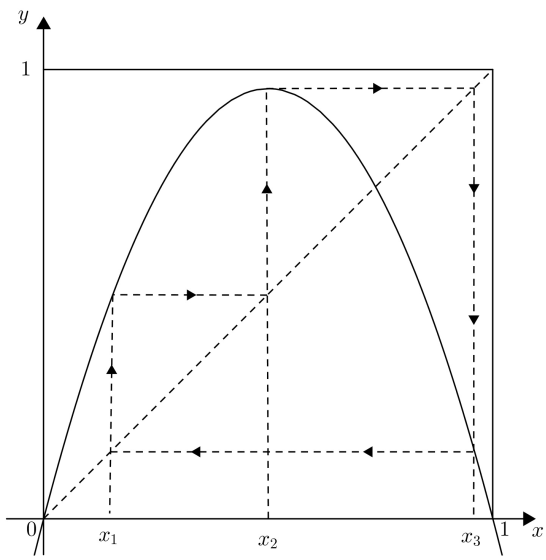


Figura 3.1: Atrator de Período 3

Isso significa que vai existir um intervalo I_1 ao redor de x_1 que vai ser levado em um intervalo I_2 ao redor de x_2. Em seguida esse intervalo é iterado em um intervalo I_3 ao redor de x_3, que depois retorna ao intervalo inicial. Essa é a bacia de atração dessa órbita periódica.

Nesses intervalos I_1, I_2 e I_3 não existem pontos periódicos. Todos os pontos irão convergir para a órbita $\{x_1, x_2, x_3\}$. A pergunta que se faz é: onde estão todos os outros períodos que o *Teorema de Li-Yorke* nos garante que existem?

Se estudarmos mais a fundo, poderemos mostrar que todos os outros pontos periódicos pertencem a um conjunto equivalente ao Conjunto de Cantor Ternário, que é um "fractal"bastante conhecido. Para isso, teríamos que estudar as chamadas equivalências topológicas e um pouco de Dinâmica Simbólica (subshift do tipo finito), que foge do escopo deste trabalho. (*veja referência [2]*)

Referências Bibliográficas

[1] CORRÊA, Júlio Francisco Araújo de Sobreira. Introdução à Análise Real. 2.ed. - Recife: Imprima, 2012.

[2] DEVANEY, Robert L., 1948. An introduction to chaotic dynamical systems. 2nd ed. p. cm. -Advanced book program. Includes index. ISBN 0-201-13046-7.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo Vol. 1. 5 ed. - LTC.

[4] ROBINSON, C. Dynamical systems: stability symbolic dynamics and chaos. Studies en advanced mathematics, 468 p. 1994.

[5] VILLATE, Jaime E. Introdução aos Sistemmas Dinâmicos: uma abordagem prática com Máxima. 222 p. 2007. ISBN 972-99396-0-8.

[6] YORKE, James A. et al. Chaos - an introduction to dynamical systems. p. cm. - Textbooks in mathematical sciences, 1996. ISBN 0-387-94677-2.